ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

8. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2012. március 28.

Emlékeztető. Legyen $V=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ egy változó halmaz. Legyen $L=V\dot\cup\overline{V}$ a literálok halmaza ($\overline{V}$ a negált változók halmaza, azaz $\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n\}$) L egy részhalmazát klóznak nevezzük. Esetünkben a klózra úgy gondolunk, hogy a hozzá tartozó literálokat $\vee$ logikai művelettel, azaz diszjunkcióval kapcsoljuk össze. Egy φ konjunktív normálformában lévő formula (CNF formula) klózok egy halmaza. Erre a klózhalmazra úgy gondolunk, hogy a klózok $\wedge$ logikai művelettel, azaz konjukcióval kapcsoljuk össze. Egy φ CNF formula kielégíthető, ha adható V egy kiértékelése (ami természetes módon kiterjeszthető L egy kiértékelésévé), amelyre minden klózban lesz igazzá kiértékelt literál.

$$\mathrm{SAT}=\{\lceil\varphi\rceil:\varphi \text{ kielégíthető CNF}\}$$

egy $\mathcal{NP}$-beli nyelv. Cook—Levin-tétel alapján ez egy $\mathcal{NP}$-teljes nyelv.

Ha egy $\mathcal{NP}$-beli L nyelvet polinomiális időben redukálunk SAT-ra, akkor L is $\mathcal{NP}$-teljes. Így további NP-teljes nyelvekhez jutunk.

1. További $\mathcal{NP}$-teljes problémák

1.1. SAT változatai

Legyen $(=3)$-SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz. Legyen (≤ 3)-SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz legfeljebb 3 literált tartalmaz.

1. Lemma. *$(=3)$-SAT $\preceq_{\mathcal{P}}$ (≤ 3)-SAT, továbbá (≤ 3)-SAT$\preceq_{\mathcal{P}}$$(=3)$-SAT.*

Bizonyítás. Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(=3)$-SAT probléma egy speciális esete (≤ 3)-SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3)-SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózok mérete három legyen. Egy φ input 3 méretű klózait tartsuk meg, míg a kicsi klózaikkal az alábbi operációt végezzük el (párhuzamosan): Egy $C:\langle\ell_1,\ell_2\rangle$ „kicsi" klózt helyettesítsünk a $\langle\ell_1,\ell_2,u\rangle$, $\langle\ell_1,\ell_2,\overline{u}\rangle$ klózpárral. Természetesen formulánk kielegítése esetén C is igazzá válik, ami a C-t helyettesítő klózokat is igazzá teszi. Fordítva: A C-t helyettesítő klózpárt csak úgy tudjuk kielégíteni, ha az eredeti C-t is kielégítjük.

A fenti példában a kicsi klóz két literált tartalmazott. Ennél is kisebb klózokra is alkalmazható ötletünk. Eredménye: ekvivalens formula eggyel nagyobb klózokkal. Ötletünket iteráltan kell alkalmazni, amíg minden klóz három méretűvé válik. ∎

Ha két nyelv „oda-vissza" redukálható, akkor (polinomiális redukcióra) ekvivalensnek mondjuk. Ekkor a két probléma egyenértékű („modulo" polinomiális számolás). A fenti tétel egy ekvivalenciát állít. Ez alapján a két probléma egyenértékű. Ha a 3-SAT nyelvet említjük, akkor alatta a fenti két nyelv bármelyikét érthetjük. Természetesen, ha 3-SAT-ot redukáljuk, akor az input CNF-ről feltesszük, hogy minden klóza három literált tarrtalmaz. Ha 3-SAT-ra redukálunk, akkor nem zavar, ha a redukciós algoritmus háromnál kisebb klózokat is „gyárt".

2. Tétel. *3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. 3-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális (a SAT speciális esete).

3-SAT $\mathcal{NP}$-nehéz: SAT visszavezetése 3-SAT-ra (emlékeztetőül: egy $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvény kell, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in$ SAT akkor és csak akkor, ha $\mathcal{C}' \in$ 3-SAT).

A hozzárendelés a következő lesz: a $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klózra vezessünk be $u_1, \ldots, u_{k-1}$ új változókat és a következő klózokat vegyük fel $\mathcal{C}'$-be a

$$\langle \ell_1, \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \overline{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$$

klózokat Ezt minden $\mathcal{C}$-beli klózra végezzük el. Amit kapunk, az egy 3-CNF. A következőket kell belátni:

(i) $\mathcal{C}'$ meghatározható ($\mathcal{C}$ kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.

(ii) $\mathcal{C}$ pontosan akkor kielégíthető, ha $\mathcal{C}'$ az:

Ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, akkor vegyük egy kielégíthető kiértékelését. $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén legyen ℓ_i a klózban az első igaz literál. Ekkor ℓ_i értékeit megtartva, $u_1 = \ldots = u_{i-1} = h$ és $u_i = \ldots = u_{k-1} = i$ kiértékelés jó lesz.

Másik irány: $\mathcal{C}'$-nek nincs olyan kielégítő kiértékelése, amelyben valamely $\mathcal{C}$-beli $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén $\ell_1 = \ldots = \ell_k = h$ lenne, mivel az

$$\langle \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \overline{u}_{k-1} \rangle \langle u_{k-1} \rangle$$

klózokat tartalmazó formula kielégíthetetlen.

∎

Legyen k-SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz legfeljebb k literált tartalmaz (k-CNF). Kielégíthető-e?

Megjegyzés. Egyszerűen látható, hogy 2-SAT $\in \mathcal{P}$. Sőt 2-SAT $\in co\mathcal{NL}$.

Megjegyzés. Nyilván igaz a következő redukciólánc:

$$2\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} 3\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} 4\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} \ldots \preceq_{\mathcal{P}} k\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} \ldots \preceq_{\mathcal{P}} SAT.$$

Definíció. V egy kiértékelése egy klózt homogénné tesz, ha a klóz minden literálja ugyanazt a logikai értéket kapja. Azaz a klóz akkor nem lesz homogén, ha igazzá értékelődik ki (lesz benne igaz értékű literál), de nem minden literál igaz értékű (lesz benne hamis literál is).

Legyen

$$\text{NEM-MIND-IGAZ-SAT} = \{ \lceil \varphi \rceil : \varphi \text{ CNF, amely kielégíthető úgy, hogy ne legyen olyan klóz, amelyben minden literál igaz} \}.$$

3. Tétel. *NEM-MIND-IGAZ-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. NEM-MIND-IGAZ-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\mathcal{NP}$-nehéz: Legyen $\mathcal{C}$ a SAT egy inputja. Leírunk egy $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvényt, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in$ SAT akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathcal{C}' \in$ NEM-MIND-IGAZ-SAT. A hozzárendelés a következő lesz: Vegyünk fel egyetlen új y változót. A $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klózra vegyük fel $\mathcal{C}'$-be a

$$\langle \ell_1, \ldots, \ell_k, y \rangle$$

klózt. Ezt minden $\mathcal{C}$-beli klózra végezzük el. (Tehát $\mathcal{C}'$-nek ugyanannyi klóza lesz mint $\mathcal{C}$-nek.) Amit kapunk, az egy CNF. A következőket kell belátni:

(i) $\mathcal{C}'$ meghatározható ($\mathcal{C}$ kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.

(ii) $\mathcal{C}$ pontosan akkor kielégíthető, ha $\mathcal{C}'$ kielégíthető nem-mind-igaz módon,

Ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, akkor vegyük egy kielégíthető kiértékelését. Ezeket az értékeket tartsuk meg és az új y változónak adjunk hamis értéket. $\mathcal{C}$ kielégítettsége miatt $\mathcal{C}'$ minden klózában lesz igaz értékű literál. De ott lesz y is, amely értéke hamis. Azaz $\mathcal{C}'$-nek van nem-mind-igaz kielégítése.

Fordítva vegyük $\mathcal{C}'$ egy nem-mind-igaz kielégítését. Vegyük észre, ha minden változó értékét megfordítjuk (negáljuk), akkor is egy nem-mind igaz kielégítést kapunk. Így feltehető, hogy y értéke hamis. A maradék változók $\mathcal{C}$ változói. Ezek értékei nyilván kielégítik $\mathcal{C}$-t ($\mathcal{C}'$ minden klózában lennie kell igaz literálnak). ■

Legyen NEM-MIND-IGAZ-3-SAT azon CNF-ek halmaza, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz és van olyan kiértékelése a változóknak, hogy φ összes klóza nem homogén.

4. Következmény. *NEM-MIND-IGAZ-3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. Ha egy 3-SAT inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan formulát kapunk, amelyben minden klóz négy literált tartalmaz. Minden

$$C = \langle \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \rangle$$

klózt helyettesítsünk

$$C' = \langle \ell_1, \ell_2, y_C \rangle, \qquad C'' = \langle \overline{y_C}, \ell_3, \ell_4 \rangle$$

klózpárral.

A redukció korrektségének ellenőrzése egyszerű. ■

A SAT problémának van egy természetes optimalizálási változata:

Definíció. MAX-SAT az a probléma, amely egy adott $\mathcal{C}$ CNF esetén kéri azt a K maximális számot, ahány klóz egyszerre kielégíthető egy értékadással.

Nyilván $\mathcal{NP}$-nehéz problémával állunk szemben: $\mathcal{C}$ akkor és csak akkor kielégíthető, ha a rá vonatkozó MAX-SAT probléma optimuma megegyezik a klózok teljes számával. (MAX-SAT nem egy nyelv, így nem lehet benne az $\mathcal{NP}$ nyelvosztályban.)

Nyilván megfogalmazható ugyanez a kérdés, ha a klózok méretére felső becslés van. Továbbiakban használjuk a MAS-2-SAT, MAX-3-SAT jelöléseket.

A következő tételt bizonyítás nélkül közöljük. Egy magabiztos hallgató megpróbálhatja igazolni.

5. Tétel. *MAX-2-SAT $\mathcal{NP}$-nehéz.*

Az optimalizálási változat előnye, hogy a kezelhetetlenség miatt megelégedhetünk egy approximációs algoritmussal is. Azaz egy olyan α-approximációs algoritmussal, ami az optimális K helyett egy K_0-at számol ki (hatékonyan, azaz polinom időben), melyre K_0 klóz kielégíthető és $\alpha K \leq K_0 \leq K$.

A következő igen mély tétel azt állítja, ha $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, akkor az approximalhatóságnak is vannak határai.

6. Tétel (Hastad-tétel (2001)). *Legyen ϵ tetszőlegesen kicsi pozitív szám.*

(i) Ha lenne $\left(\frac{21}{22} + \epsilon\right)$-approximációs algoritmus MAX-2-SAT-ra, akkor $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

(ii) Ha lenne $\left(\frac{7}{8} + \epsilon\right)$-approximációs algoritmus MAX-3-SAT-ra, akkor $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

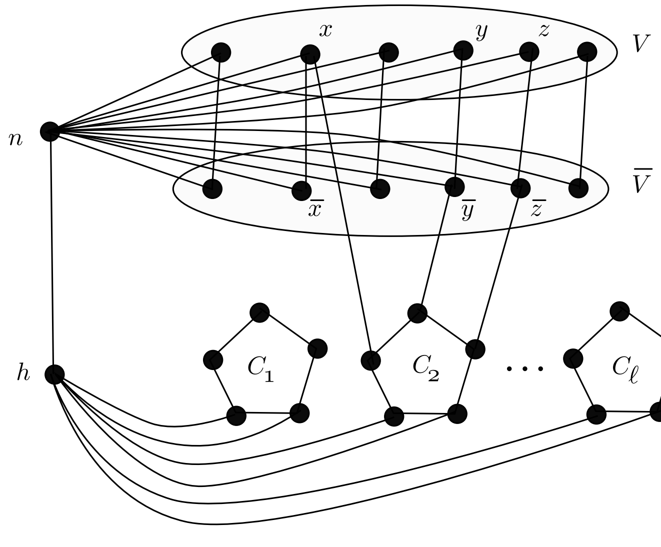
1.2. Gráfelméleti problémák

Definíció. k-SZÍNEZHETŐSÉG a következő probléma: adott egy gráf, kiszínezhető-e k színnel?

7. Tétel. *3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. 3-SZÍNEZHETŐSÉG $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-nehéz: 3-SAT-ot vezetjük rá vissza. $\mathcal{C}$ 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai n, h, $\mathcal{C}$ változói és azok negáltjai (a literálok), továbbá minden $C \in \mathcal{C}$ klózra C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. $G_{\mathcal{C}}$ élei a következők lesznek: nh, minden x_i változóra $x_i\overline{x}_i$, nx_i és $n\overline{x}_i$, illetve minden $C = \langle \ell_1, \ell_2, \ell_3 \rangle$ klózra C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_1, $C_1\ell_1$, $C_2\ell_2$, $C_3\ell_3$, C_4h, C_5h.



Könnyű ellenőrizni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható, és pontosan akkor 3-színezhető, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető.

Ezen állítás egyik iránya egy kielégítő kiértékelésből garantál jó 3-színezést. $V \cup \overline{V}$-t színezzük a kiértékelés szerint „igaz", „hamis" színekkel. h színe is legyen „hamis". n színe a harmadik szím. A lényegi észrevétel, hogy $\ell_1, \ell_2, \ell_3, h$ 3-színezése pontosan akkor terjeszthető ki $C = \langle \ell_1, \ell_2, \ell_3 \rangle$ klózhoz tartozó ötszögre jó színezésként, ha a 4 csúcs színe nem azonos.

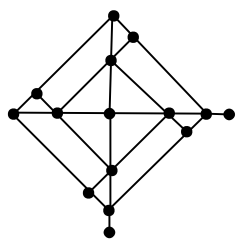
A gondolatmenet megfordíthatósága adja a redukció korrektségének teljes bizonyítását. ■

Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy 2-SZÍNEZHETŐSÉG $\in co\mathcal{NL}$.

8. Tétel. *SÍKGRÁF 3-SZÍNEZHETŐSÉGE $\mathcal{NP}$-teljes.*

Vázlat. $\mathcal{NP}$-beliség triviális.

SÍKGRÁF 3-SZÍNEZHETŐSÉGE $\mathcal{NP}$-nehéz: 3-SZÍNEZHETŐSÉG-et vezetjük rá vissza. Lerajzolás után a kereszteződő éleket kell helyettesíteni az alábbi kis gráffal:



Azt kell meggondolni, hogy megtehetők a helyettesítések úgy, hogy nem hoznak be új metszéseket, és a keletkezett gráf pontosan akkor 3-színezhető, ha az eredeti is. ■

Megjegyzés. A 2-színezhetőség $co\mathcal{NL}$-beli, síkgráfokra a 4-színezhetőség triviális a négyszíntétel (Appel, Haken 1977) alapján.

Definíció. SZÍNEZÉSI PROBLÉMA: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-nek jó k-színezése?

9. Tétel. *SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

A SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-nehéz, mivel a 3-SZÍNEZHETŐSÉG általánosítása. ■

Természetesen ismét van egy optimalizálási probléma: Határozzuk meg egy adott gráf kromatikus számát. Ennek neve legyen OPT-SZÍNEZÉS. Erre kereshetünk egy α-approximációs algoritmust, amely egy gráfhoz keres egy olyan k_0 színszámot, amennyi színnel G jól kiszínezhető és $k_0 \le \chi(G) \le \alpha k_0$. Ismét határai vannak az approximálhatóságnak.

10. Tétel (Zuckerman (2007)). *Ha lenne $|V(G)|^{(1-\epsilon)}$-approximációs algoritmus OPT-SZÍNEZÉS-re, akkor $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

$\star \qquad \star \qquad \star$

Definíció. FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k-elemű független csúcshalmaz?

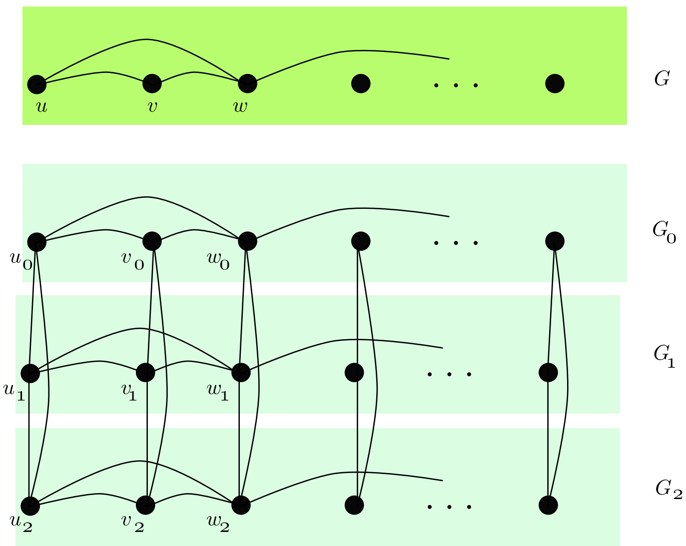
11. Tétel. *FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\in \mathcal{NP}$: tanú egy független csúcshalmaz.

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\mathcal{NP}$-nehézségére két bizonyítást adunk.

I. SAT visszavezetése: $\mathcal{C} = (C_1 = \langle z_{1,1}, \ldots, z_{1,r_1}\rangle, \ldots, C_k = \langle z_{k,1}, \ldots, z_{k,r_k}\rangle) \mapsto (G_\mathcal{C}, k)$ ((i,j) jelentése: i-edik klóz j-edik literálja), $V(G_\mathcal{C}) = \{(i,j) : i \leq k, j \leq r_i\}$, $E(G_\mathcal{C}) = \{(i,j),(i',j') : i = i' \text{ vagy } z_{i,j} = \overline{z}_{i',j'}\}$. Könnyű meggondolni, hogy $G_\mathcal{C}$ polinom időben meghatározható és pontosan akkor van benne k elemű független halmaz, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, mivel kiértékelés akkor kielégítő, ha minden klózból ki tudunk választani egy igaz literált (az élek garantálják, hogy változó és negáltja egyszerre ne szerepeljenek, illetve minden klózból legfeljebb egy literált válasszunk).

II. SZÍNEZÉSI PROBLÉMA visszavezetése: $G \mapsto (G', |V(G)|)$, ahol $V(G') = \{(v,i) : v \in V(G), i \in [3]\}$ (itt (v,i) jelentése az, hogy v az i színt kapja), $E(G') = \{(v,i)(v',i') : v = v', i \neq i' \text{ vagy } vv' \in E(G), i = i'\}$ (vagyis: élek a tiltások, tiltott, hogy egy csúcs több színt kap vagy összekötött csúcsok azonos színt kapnak).



Könnyű meggondolni, hogy G' és $|V(G)|$ is polinom időben meghatározható, és pontosan akkor van G'-ben $|V(G)|$ elemű független halmaz, ha G gráf 3-színezhető. ■

Megjegyzés. Szemben a SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁval, ha k nem az input része, hanem konstans, akkor az így kapott k-FÜGGETLEN HALMAZ probléma már polinom időben megoldható (egy n csúcsú gráfnak n-ben polinomiális sok k-elemű részhalmaza van, ha k fix).

$\star$

Definíció. KLIKK probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k méretű klikk?

Definíció. LEFOGÓ PONTHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k-elemű lefogó ponthalmaz?

12. Következmény. *KLIKK és LEFOGÓ PONTHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljesek.*

Bizonyítás. Ekvivalensek a FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ problémával. ■

Természetesen ismét van egy optimalizálási probléma: Határozzuk meg egy adott gráfhoz a legnagyobb klikkméretet. Ennek neve legyen OPT-KLIKK. Erre kereshetünk egy α-approximációs algoritmust, amely egy gráfhos keres egy olyan k_0 méretet, amekkora klikk létezik és $k_0 \leq \omega(G) \leq \alpha k_0$. Ismét határai vannak az approximálhatóságnak.

13. Tétel (Zuckerman (2007)). *Ha lenne $|V(G)|^{(1-\epsilon)}$-approximációs algoritmus OPT-KLIKK-re, akkor $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

⋆ ⋆ ⋆

Egy gráf vágása csúcsainak két diszjunkt részre bontása. A vágás élhalmaza azon éleket tartalmazza, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részbe esik.

Definíció. MAX-CUT probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben olyan vágás, amely legalább k élű?

14. Tétel. *MAX-CUT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. MAX-CUT $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben kiszámolható az élszáma, amit k-val összehasonlíthatunk.

MAX-CUT $\mathcal{NP}$-nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza. $\mathcal{C}$ 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai $\mathcal{C}$ változói és azok negáltjai (a literálok). Minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a benne szereplő három literált páronként összekötjük. (Ezekre az élekre mint klóz-élekre hivatkozunk.) Minden klózhoz három klóz-él tartozik. Ha két literál több klózban is együtt szerepel, akkor többszörös élek lesznek a redukció által megkonstruált gráfban. Minden x változóra x és $\overline{x}$ közé is behúzunk egy élt. (Ezekre az élekre mint változó-élekre hivatkozunk.) Ezzel leírtuk a $G_{\mathcal{C}}$ gráf összes élét.

Könnyű ellenőrizni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható, és pontosan akkor van benne $|V| + 2|\mathcal{C}|$ élű vágás, ha van olyan kiértékelése a változóinknak, hogy $\mathcal{C}$ minden klóza nem-homogén. Valóban, $G_{\mathcal{C}}$ minden vágása lefeljebb (az összes) $|V|$ változó-élet és minden klóz három klózéléből legfeljebb 2-t tartalmaz. Azaz $|V|+2|\mathcal{C}|$ egy felső becslés $G_{\mathcal{C}}$ tetszőleges vágásának élszámára. Ha egy (I, H) vágás eléri ezt a felső becslést, akkor minden literálet tartalmaz, azaz minden x változóra x és $\overline{x}$ közül egyik I-be, másik H-ba esik. Azaz a vágás definiál egy kiértékelését a változóinknak. Továbbá minden klóz három klózéléből kettőt tartalmaz a vágás, azaz a leírt kiértékelés nem-mind-igaz módon kielégíti (a tetszőlegesen választott) klózt $\mathcal{C}$-ből. ■

Megjegyzés. A MIN-CUT probléma annak tesztelését kéri, hogy van-e olyan vágás, amely élszáma k-nál nem nagyobb. Ez a probléma polinom időben megoldható. A folyamok elmélete alapján a legkisebb vágás élhalmaza meghatározható.

Természetesen ismét van egy optimalizálási probléma: Határozzuk meg egy adott gráf esetén a legnagyobb vágás K élszámát. Ennek neve legyen OPT-MAX-CUT. Erre kereshetünk egy α-approximációs algoritmust, amely egy gráfhos keres egy olyan e_0 élszámot, amekkora vágás létezik és $\alpha K \leq e_0 \leq K$ Ismét határai vannak az approximálhatóságnak.

15. Tétel (Hastad (2001)). *Ha lenne* $\left(\frac{16}{17} + \epsilon\right)$*-approximációs algoritmus OPT-MAX-CUT-ra, akkor* $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

⋆ ⋆ ⋆

Az alábbi problémák mindegyike $\mathcal{NP}$-teljes. Ezek nem szerepeltek előadáson. Csak megemlítjük az érdeklődő olvasóknak és ötletet adunk az igazoláshoz.

Definíció. HAMILTON-ÚT: adott egy gráf. Van-e benne Hamilton-út?

Ötlet. Szokásos visszavezetés: 3-SAT.

Definíció. HAMILTON-KÖR: adott egy gráf. Van-e benne Hamilton-kör?

Ötlet. Szokásos visszavezetés: SAT, LEFOGÓ PONTHALMAZ.