ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

12. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter

2011. május 3.

1. $\mathcal{BPP}$ helye korábbi osztályaink között

A címmel kapcsolatban két tételt említünk meg,

1. Tétel (Adlemann).

$$\mathcal{BPP} \subseteq \mathcal{P}^{nem\text{-}uniform}.$$

Bizonyítás. Legyen $L \in \mathcal{BPP}$. Egy korábbi tételünk alapján bármilyen α konstansra létezik T polinom idejű véletlen Turing-gép, amelynél minden n hosszú ω inputra a hibázás valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2^{\alpha n}}$.

Tehát létezik olyan ρ véletlenszalag-tartalom, hogy az ezzel végrehajtott futás nem hibázik semelyik ω-ra sem hibázik: jelölje ugyanis R_ω az $\{\rho : T$ hibázik ω-n ρ-val$\}$ eseményt. Ekkor $\mathbb{P}\big(\cup_{\omega:\omega\in\Sigma^n} R_\omega\big) \leq |\Sigma^n|\frac{1}{2^{\alpha n}} < 1$, vagyis az előző megállapítás valóban igaz.

Tekintsük T-t. A számolása folyamatát egy polinom méretű hálózat-sorozattal szimulálhatjuk, amelynek az inputbitjei ω és ρ kódja.

1. ábra.

A fenti univerzálisan jó ρ-t bitjeit lerögzítve/behuzalozva egy hálózatot kapunk, ami csak ω kódjaiból kiszámolja az L-hez tartozást kódoló bitet (a hálózatméret nem változik a huzalozástól, azaz polinomiális).

Az ω, ρ-t olvasó hálózat uniform módon konstruálható, az uniformitást a ρ nemkonstruktív mivoltja rontja el. ■

2. Tétel (Gács Péter-Sipser).

$$\mathcal{BPP} \subseteq \Sigma_2\mathcal{P} \cap \Pi_2\mathcal{P}.$$

Bizonyítás. (Lautemann) Mivel $\Pi_2\mathcal{P} = co\Sigma_2\mathcal{P}$, elég megmutatni, hogy $\mathcal{BPP} \subseteq \Sigma_2\mathcal{P}$.

Legyen $\Sigma = \mathbb{Z}_{|\Sigma|} = \{0, 1, \ldots, |\Sigma| - 1\}$ additív mod $|\Sigma|$-aritmetikával, a véletlenszalag ábécé-je.

Definiáljuk a következő fogalmakat: $S \subseteq \Sigma^N$ halmaz akkor és csak akkor *sűrű*, ha $|S| \geq 1 - \frac{1}{N}|\Sigma^N|$, továbbá egy $R \subseteq \Sigma^N$ halmaz akkor és csak akkor *ritka*, ha $|R| < \frac{1}{N}|\Sigma^N|$, azaz $\overline{R}$ sűrű.

Először igazoljuk az alábbi lemmát.

3. Lemma. *(i) Ha R ritka, akkor minden $c_1, \ldots, c_N \in \Sigma^N$-re $\cup_{i=1}^N (c_i + R) \subsetneq \Sigma^N$,*

(ii) Ha S sűrű, akkor létezik olyan $c_1, \ldots, c_N \in \Sigma^N$, hogy $\cup_{i=1}^N (c_i + S) = \Sigma^N$.

A lemma bizonyítása. Az első állítás triviális, hiszen $\cup_{i=1}^N (c_i + R)$-ben kevesebb, mint $N\frac{1}{N}|\Sigma^N| = |\Sigma^N|$ elem van R ritkasága miatt.

A második rész bizonyításához valószínűségszámítási módszert használunk.

Elég belátni, hogy

$$\mathbb{P}\big(r_1, \ldots, r_N \in \Sigma^N : \cup(r_i + S) = \Sigma^N\big) > 0$$

ahol $r_1, \ldots, r_N$ független, uniform eloszlású elemek/vektorok (hiszen Σ^N egy vektortér). Az eseményt átírva a bizonyítandó

$$\mathbb{P}\big(\bigwedge_{x \in \Sigma^N} (r_1, \ldots, r_N \in \Sigma^N : \exists i : x \in r_i + S) > 0$$

Az $x \in r_i + S$ feltétel ekvivalens $r_i \in x - S$-sel. $x - S$ elemszáma egyenlő $|S|$-sel, amit becsülhetünk $|S| \geq (1 - \frac{1}{N})|\Sigma^N|$ módon.

Jelölje a fenti és-sel összekapcsolt eseményeket E_x. Ekkor $\mathbb{P}(\overline{E_x}) \leq \frac{1}{N^N}$, így $\mathbb{P}(\overline{\wedge E_x}) = \mathbb{P}(\vee \overline{E_x}) \leq |\Sigma^N| \frac{1}{N^N} < 1$, így a komplementer esemény valószínűsége valóban pozitív és ezzel a lemmát beláttuk. (Lemma bizonyítása)■

Most visszatérhetünk a tétel bizonyításához. Legyen T egy $L \in \mathcal{BPP}$-t bizonyító Turing-gép, aminek a hibázási valószínűsége kevesebb, mint $\frac{1}{2^n}$. Legyen $t(n) \in \mathbb{N}$ a futásnak egy polinomiális időkorlátja.

Legyen $S_\omega = \{\rho : T(\omega, \rho) = \text{ELFOGAD}\}$. Jelölje N a futás során elolvasott véletlen bitek számát, ez $t(n)$-nel felülről becsülhető. Vegyük észre, hogy ha $\omega \notin L$, akkor a hibázás valószínűsége $\frac{|S_\omega|}{|\Sigma^N|} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{N}$, vagyis S_ω ritka. Hasonlóan, ha $\omega \in L$, akkor a nem hibázás valószínűsége $\frac{|S_\omega|}{|\Sigma^N|} > 1 - \frac{1}{2^n} > 1 - \frac{1}{N}$, vagyis S_ω sűrű.

Tehát $\omega \in L$ akkor és csak akkor teljesül, ha S_ω sűrű/nem ritka, ami a lemma alapján ekvivalens a következővel

$$\exists (c_1, \ldots, c_N) \in \Sigma^{N \times N}, \text{ hogy } \forall l \in \Sigma^N\text{-re } l - c_i \in \Sigma_\omega \text{ valamely } i\text{-re.}$$

Az, hogy $l - c_i \in \Sigma_\omega$, ellenőrizhető $\mathcal{P}$-ben. Így az is polinomiálisan ellenőrizhető, hogy $l - c_i \in \Sigma_\omega$ valamely i-re (a lehetséges i-k száma $N \leq t(n)$). Már csak azt kell észrevenni, hogy az utóbbi bekezdés tartalma L egy $\Sigma_2\mathcal{P}$-beli nyelvként való jellemzése, így a bizonyítás teljes. ■

2. Véletlen algoritmusok

2.1. Irányítatlan gráfokra vonatkozó elérhetőség

Definíció. Az IRÁNYÍTATLAN-ELÉRHETŐSÉG problémában/nyelvben adott egy G irányítatlan gráf és két kitüntetett csúcsa s és t. El kell döntenünk, hogy van-e G-ben út a két kitüntetett csúcs között.

A probléma megoldásához egy véletlen sétát végzünk s-ből indulva. Ha közben t-t elérjük, akkor tudjuk, hogy s és t között van út. Ha elég hosszú séta során sem érjük el t-t, akkor elég nagy bizonyossággal sejtjük, hogy s és t között nincs út.

Kiindulás: Legyen aktuális-csúcs az s csúcs. $\ell = 0$, az eddig megtett lépések száma.
Véletlen lépés: Az aktuális-csúcs szomszédai közül válasszunk ki egy véletlen r csúcsot. Legyen aktuális-csúcs r és legyen $\ell = \ell + 1$.
Teszt: Ha aktuális-csúcs$= t$, akkor ELFOGAD állapottal leállunk.
Ha $\ell < T$, akkor a véletlen lépést hajtjuk végre.
Ha $\ell \geq T$, akkor a VALÓSZÍNŰLEG-ROSSZ állapottal leállunk.

Ebben a pillanatban az algoritmus leírása egy kissé pontatlan: nem írtuk le pontosan a véletlen lépést, illetve szerepel egy egyelőre definialatlan T paraméter. Ezekre a későbbiekben térünk ki.

Az egyetlen mód, ahogy algoritmusunk hibázhat, az az ha s és t a G gráf egy komponensébe esik és az T hosszú véletlen séta elkerüli t-t. Belátjuk, ha $T = |V|^3$, akkor ennek valószínűsége kisebb mint $1/2$. Ezzel kapjuk, hogy IRÁNYÍTATLAN-ELÉRHETŐSÉG$\in \mathcal{RP}$.

Igazából algoritmusunk ennél „igényesebb”: tárigénye logaritmikus. A megfelelő osztály bevezetésénél óvatosnak kell lennünk.

Definíció. Egy L nyelv akkor és csak akkor tartozik az $\mathcal{RL}$ osztályhoz, ha van hozzá olyan véletlen biteket használó Turing-gép, amely eldönti és polinomiális idejű, logaritmikus tárat használ, továbbá teljesíti az (R_1) és (R_2) feltételeket.

Így a következő eredményt kapjuk.

4. Tétel (Aleliunas—Karp—Lipton—Lovász—Rackoff 1979). *IRÁNYÍTATLAN-ELÉRHETŐSÉG$\in \mathcal{RL}$.*

A bizonyítás következő eredményből nyilvánvaló.

5. Tétel (Aleliunas—Karp—Lipton—Lovász—Rackoff 1979). *Legyen G egy összefüggő irányítatlan gráf. Ekkor tetszőleges pontjából indítva egy véletlen sétát annak a lépésszámnak, amely az összes csúcs meglátogatásához szükséges a várható értéke kisebb mint $|V|^3/2$*

A tétel Markov-láncok elméletét használja, nem bizonyítjuk.

Bonyolultságelméleti eredményünk jóval gyengébb mint a korábban már említett Reingold-tétel.

6. Tétel (Reingold, 2008). *IRÁNYÍTATLAN-ELÉRHETŐSÉG$\in \mathcal{L}$.*

A fenti klasszikus tétel volt az, ami a kutatások hosszú sorát indította el és vezetett el a fenti 2008-as eredményhez.

Megjegyzés. Az algoritmus minden probléma nélkül kiterjeszthető irányított gráfokra. Hogy ez az algoritmus hasznos legyen szükségünk lenna véletlen séta fenti analízisére irányított gráfokra. Sajnos a megfelelő tétel nem igaz. Ehhez vegyünk egy gráfot, amiben s és t-t egy n pontú út köti össze. az út minden pontjából vezessen egy irányított él s-be is. Azaz sétánk során minden t-től különböző csúcsban két lehetőségünk van: vagy t-felé lépünk, vagy visszatérünk a kiinduló pontba. Így

a véletlen séta akkor éri el t-t, ha $n-1$-szer egy két kimenetelű véletlen választásból mindig a kedvező következik be. Erre várhatóan exponenciális sokáig kell várnunk. Az ELÉRHETŐSÉG probléma (amiről tudjuk, hogy $\mathcal{NL}$-teljes) $\mathcal{RP}$ osztályba esése meglepő lenne (következne az $\mathcal{L} = \mathcal{RP}$ egyenlőség).

2.2. Kielégítő értékelés keresése kis fokú k-CNF formulához

Legyen φ egy k-CNF. Legyen Δ egy becslés, hogy egy klóz hány másikkal (saját magát beszámolva) tartalmaz közös változót (elképzelhető, hogy egyikben negálva másikban negálatlanul). Feltesszük, hogy $\Delta \leq 2^k/4k$.

7. Tétel (Lovász László). *A fenti feltételek mellett a formula garantáltan kielégíthető.*

Lovász László eredeti bizonyítása nem konstruktív. Célunk, hogy konstruktívan belássuk, hogy φ kielégíthetőségét. Egy véletlen algoritmust adunk meg, ami a feltételeknek elegettevő φ-hez kielégítő értékelést ad. Az algoritmus nagyon egyszerű lesz (analízise már nem annyira).

Moser—Tardos-algoritmus:
Kiindulás: `Változóinknak adjunk független, uniform eloszlású véletlen bitértékeket.`
Teszt: `Teszteljük, hogy kielégíti-e` φ`-t.`
Szerencse: `Ha igen, akkor leállunk az aktuális éltékadással.`
Szerencsétlenség, OKKERESÉS: `Ha nem, akkor keressünk egy` C `klózt, ami nincs kiélégítve.`
Szerencsétlenség, ÚJRASOROSOLÁS: `Értékadásunkat a` C`-ben szereplő változókon változtassuk meg. A` k `darab változónak az előzőektől független véletlen biteket adunk értékként.`
`VISSZA a Teszt lépéshez.`

Ha belátjuk, hogy minden a feltételeknek elegettevő formula esetén algoritmusunk futási idejének várható értéke polinomiális az input hosszában. Speciálisan bármilyen feltételünknek elegettevő k-CNF-re 1 valószínűséggel leáll. Így Lovász László tételét is beláttuk.

8. Tétel (Moser—Tardos-tétel). *A fenti algoritmus minden kiinduló feltételünknek eleget tevő φ formulán való futása során az újrasorsolások számának várható értéke az input hosszának polinomjával becsülhető.*

A bizonyítás nem egyszerű, nem végezzük el. A tétel bonyolultságelméleti nyelven is kimondható. Ehhez azonban egy új osztályt kell bevezetnünk.

2.3. $\mathcal{ZPP}$

A következő osztály egy nagyon fontos nyelvosztályt ír le különböző módokon.

9. Lemma. *Legyen L egy nyelv. A következők ekvivalensek:*

(i) $L \in \mathcal{RP} \cap co\mathcal{RP}$,

(ii) Van olyan véletlen polinomiális idejű T algoritmus (leálló állapotai ELFOGAD, ELVET és NEM-IS-TUDOM), amelyre teljesül

- $\omega \in L$ *esetén* $\mathbb{P}_\rho[T(\omega,\rho) = ELFOGAD] \geq 1/2$,
  és $\mathbb{P}_\rho[T(\omega,\rho) = ELVET] = 0$.
- $\omega \notin L$ *esetén* $\mathbb{P}_\rho[T(\omega,\rho) = ELVET] \geq 1/2$,
  és $\mathbb{P}_\rho[T(\omega,\rho) = ELFOGAD] = 0$.

Továbbá ELFOGAD/ELVET leállásnál az output biztos korrekt.

(iii) Van olyan véletlen (nem szükségszerűen leálló) T algoritmus (leálló állapotai ELFOGAD, ELVET), amelyre teljesül

- *Van olyan $p(x)$ polinom, hogy minden $\omega \in \Sigma^*$ esetén*

$$\mathbb{E}[TIME(T(\omega,\rho))] \leq p(|\omega|),$$

- *$\omega \in L$ esetén T leállása esetén biztos ELFOGAD, míg $\omega \notin L$ esetén T leállása esetén biztos ELVET.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) A (ii) pont követelményeinek elegettevő algoritmust úgy kapjuk, hogy először az L-et eldöntő $\mathcal{RP}$ algoritmust futtatjuk. Ha ez elfogad, akkor leállunk ELFOGAD állapottal. Ha nem, akkor az L-et eldöntő co$\mathcal{RP}$ algoritmust futtatjuk. Ha ez elvet, akkor leállunk ELVET állapottal. Különben NEM-IS-TUDOM állapottal fejeződik be a számítás. Az előírt követelmények könnyen láthatóan teljesülnek.

(ii)⇒(iii) Futassuk az L-et eldöntő, a feltételben leírt algoritmust. Ha NEM-IS-TUDOM állapottal áll le, akkor ismételjük meg (persze a szükséges véletlen biteket a szalagról olvassuk — nem a korábbiakat használjuk — azaz az új futás független lesz az előzőtől). Az ismételést addig végezzük, amíg az egyik futásnál ELFOGAD vagy ELVET állpothoz jutunk. Az előírt követelmények közül csak a futási idő várhatóértékének becslése nem triviális. Elég az ismételések számának várható értékét becsülni.

Ezt $\omega \in L$ esetén végezzük el. Ha egy ismételést egy pénzfeldobásnak gondolunk, amelyben a FEJ az elfogadás, míg az ÍRÁS a nem-is-tudom állapot, akkor addig dobálunk, amíg FEJ nem jön ki (amely valószínűsége minden dobásnál ugyanaz az érték, legalább 1/2). A dobások függetlenek, a dobások számának várható értékének becslése standard valószínűségszámítási feladat, konstansnak adódik.

(iii)⇒(i) Legyen p a feltétel által garantált algoritmus futási idejére adott korlát polinomja. Szimuláljuk ezt az algoritmust $2p(|\omega|)$ lépésig. Ha közben leáll (elfogad vagy elvet), akkor mi is bejelentjük a szimuláció által kiszámolt végeredményt. Különben NEM-IS-TUDOM állapottal fejezzük be a számítást. A Markov-egyenlőtlenség adja, hogy ez utóbbi esemény valószínűsége legfeljebb 1/2. ■

Definíció. A fenti tulajdonságoknak (illetve bármelyiküknek) elegetttevő nyelvek osztályát $\mathcal{ZPP}$-vel jelöljük.

Megjegyzés. Természetesen a (ii) pontban szereplő 1/2 (vagy bármilyen 1-nél kisebb konstans) könnyen tetszőlegesen 1-hez közelivé tehető korábban megismertetett független ismétléses technikával.

Megjegyzés. 1) Az osztályt adó betűszó Z betűje a hibázás lehetetlenségére utal (zero error), a két P betű a probabilistic és polynomial szavakból ered.

2) Az eddig megismert véletlen algoritmusok két osztályba esnek: garancia van futási idejükre, de végeredményük hibázást rejthet ($\mathcal{BPP}, \mathcal{RP}, \text{co}\mathcal{RP}$), illetve garancia van a végeredményükre, de futási idejük egy valószínűségi változó ($\mathcal{ZPP}$). A véletlen algoritmusokban rejlő fent említett két lehetőség megkülönböztetésére rendre a Monte Carlo, illetve Las Vegas jelzőket használják.

3. APPENDIX

Az alábbiakban az előadásban nem elhangzott bizonyításokat ismertetünk. Ez NEM vizsgaanyag.

3.1. Véletlen séták

Célunk az Aleliunas—Karp—Lipton—Lovász—Rackoff-tétel bzionyításának ismertetése.

Legyen G egy n pontú, m élű gráf. Nézzük meg, hogy G-ben egy véletlen séta L lépése után milyen eloszlású lesz helyzetünk (a V csúcshalmaz felett). Célunk, hogy belássuk az eloszlás konvergál egyetlen „stacionárius eloszláshoz". Ez általában nem igaz. Ha G páros gráf, akkor L paritása alapján az eloszlások különböző színosztályokra koncentrálódnak. A standard sétát (egy d fokú csúcsnál a következő meglátogatott csúcs a d szomszéd közül a korábbi történésektől függetlenül, uniform eloszlással választott szomszéd lesz) egy kissé módosítjuk.

Legyen A a gráfunk szomszédsági mátrixa. Legyen Δ a gráf maximális foka. A főátlóba írjunk olyan számokat, hogy minden sor és oszlop összeg $\Delta + 1$ legyen. Jelöljük $\widetilde{A}$-mal azt a mátrixot, amit így kaptunk. Legyen M az a mátrix amit $\widetilde{A}$ elemeinek $\Delta + 1$-gyel való osztásával kapunk. Az így kapott mátrix szimmetrikus, nem negatív, főátlójában pozitív értékű és minden sor-, oszlopösszege 1 (úgy nevezett *duplán sztochasztikus mátrix*).

Az M mátrix egy véletlen séta átmeneti mátrixaként értelmezhető. Ez lesz a véletlen sétánk. Ez persze elemi módon is leírható. Egy v csúcsnak $d(v)$ szomszédja van, amiket azonosíthatunk az $\{1, 2, \ldots, d(v)\}$ halmaz elemeivel. Válasszunk az $\{1, 2, \ldots, \Delta + 1\}$ halmazból uniform módon egy elemet. Ha ez az $\{1, 2, \ldots, d(v)\}$ halmazba esik akkor v-ből a megfelelő szomszédba lépünk át. Különben maradunk a v csúcsban. A helyben maradásnak mindig pozitív valószínűsége van. (Emiatt nem lesz problémánk a páros gráfok esetével.)

Kezdőpontunk eloszlását egy $\vec{k}$ eloszlásvektor (nemnegatív vektor, komponenseinke összege 1) írja le (vektoraink, soraink, oszlopaink pozícióit a V csúcshalmazzal azonosítottuk). A mi véletlen sétánknál ez különösen egyszerű: s-ben 1 komponensű, minden más komponens értéke 0. A következő észrevétel más kiinduló eloszlásnál és más átmeneti mátrixnál is igaz.

10. Lemma. *A véletlen sétánk L lépés utáni helyzetének eloszlása $M^L\vec{k}$.*

A lemma csupán a definíciók és a mátrix aritmetika ismeretét kívánja. Az olvasóra hagyjuk.

M szimmetrikus, így sajátértékei valósak ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, ahol $n = |V|$) és alkalmas Q ortogonális mátrixszal

$$M = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} Q = Q^{-1} \Lambda Q.$$

A következő lemmából

11. Lemma. *M sajátértékeinek abszolútértéke legfeljebb 1. Az 1 sajátérték, -1 pedig nem sajátérték. Ha G összefüggő, akkor az 1 sajátérték multiplicitása 1.*

Bizonyítás. Legyen λ egy sajátérték és $\vec{v}$ egy hozzátartozó sajátvektor. Vegyük a $\vec{v}$ sajátvektor egy maximális abszolútértékű komponensét. Mi lesz ezen komponens éréke $M\vec{v}$-ben? Egyrészt M sztochasztikus mátrix, így minden komponense $\vec{v}$ komponensiből átlagolódik ki, abszolútértékben nem nőhet. Másrészt λ-szorosa lesz. Így valóban $|\lambda| \leq 1$.

A csupa 1 vektor (továbbiakban $\vec{j}$) sajátvektor 1 sajátértékkel. Sőt az 1 sajátértékhez tartozó összes sajátvektor konstans komponensű vektor ($\vec{j}$ számszorosa): Valóban. Legyen $\vec{s}$ egy tetszőleges sajátvektor 1 sajátértékkel. Mint előbb most is vegyük a $\vec{s}$ sajátvektor egy maximális abszolútértékű komponensét, értékét jelöljük C-vel. Ekkor ezen komponense az M mátrix-szal való szorzás után a saját és a szomszédokhoz tartozó komponensek értékéből átlagolódik ki, közben nem változik (egyszerese lesz önmagának). Ez csak úgy lehet, ha minden szomszédjához tartozó komponens értéke is C volt. A gondolatmenet ismételgetésével, felhasználva, hogy G összefüggő kapjuk, hogy $\vec{s} = C \cdot \vec{j}$.

Ha feltennénk, hogy -1 sajátérték és megismételnénk a fenti gondolatmenetet egy hozzátartozó sajátvektorral, akkor ellentmondásra jutnánk: az átlagolásnál a megfelelő komponens is szerepet játszik (ezért tértünk át $\widetilde{A}$-ra), a -1-szereződés nem lehetséges. ■

A lemmából adódik

$$M^L = Q^{-1} \Lambda^L Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^L & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^L \end{pmatrix} Q,$$

ami egy konvergens mátrixsorozat.

A stacionárius eloszlás az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor számszorosa, így az uniform eloszlás.

A bizonyítás hátralévő részéhez néhány definícióra van szükségünk.

Definíció. Legyen $\rho_t(u)$ az a valószínűségi változó, amely megmondja a véletlen séta folyamán az első $t-1$ lépéssel meglátogatott t csúcs között milyen arányban szerepel a u csúcs.

Legyen uv egy él a gráfunkban, ekkor $\nu(u)$ az a lépésszám, amit egy u pontból indulva megteszünk a következő u látogatásig.

Legyen uv egy él a gráfunkban, ekkor $\sigma(uv)$ az a lépésszám, amit egy uv lépés után teszünk a következő uv (sorrend számít) lépéssel bezárólag.

A fenti definiált három valószínúségi változó alapparamétereit akövetkező lemma adja meg.

12. Lemma. *(i)* $\mathbb{E}(\rho_t(u)) \to \frac{1}{|V|}$,

(ii) $\mathbb{D}(\rho_t(u)) \to 0$,

(iii) $\mathbb{E}(\nu(u)) = |V|$,

(iv) $\mathbb{E}(\sigma(uv)) = (\Delta + 1)|V| \leq |V|^2$.

A Lemma a Markov-láncok elméletének ismerete alapján könnyen bizonyítható.

A Lemma alapján egyszerűen becsülhető, hogy mi azon séta hosszának várható értéke, amely az s csúcsból egy t-be vezető legrövidebb séta éleinek megfelelő lépéseket sorban (közbeiktatott lépésekkel) megteszi. Az algoritmus helyességet bizonyító tétel könnyen adódik.

3.2. Moser—Tardos-algoritmus analízise

A felhasznált véletlen biteket egy táblázatban helyezzük el. A táblázat oszlopai a változókkal vannak azonosítva. Végtelen sok sora van, amelyek természetes számokkal indexeltek. Ezt a táblázatot töltjük ki független bitekkel. Ha algoritmusunknak véletlen bitekre van szüksége, akkor ezeket a táblázatból olvassa ki. Egy változó értékadásánál az oszlopából az első nem olvasott bitet adjuk értékként.

A 0 indexű sor tartalmazza a kiinduló értékadás bitjeit. Minden újrasorsolás az újrasorsolt változók oszlopában az utolsónak kiolvasott bit alatti bit elővételét jelenti. Így minden újrasorsolás k bit elővételét/olvasását jelenti. Jelölje B_ℓ, P_ℓ és V_ℓ az ℓ-edik újrasorsolás k bitjét, ezek pozícióit a táblázatban (ezeket blokkoknak nevezzük), illetve azon változók halmazát, amelyeket újrasorsoltunk. Az első újrasorsolás az 1 indexű sorból történik. A későbbi újrasorsolások azonban a sorok tekintetében töredezettek lehetnek, akár az is elképzelhető, hogy ugyanazon újrasorsolás k bitje k különböző sorból vevődik. Ha P_i és P_j két blokk és az elsőnek van olyan bitje, ami közvetlen a második (P_j) egy bitje felett van, akkor azt mondjuk, hogy P_i fedi P_j-t. Természetesen ekkor $i < j$, a két blokk diszjunkt és ha ugyanazon oszlopból mindkettőnek van bitje, akkor az P_i-beli van magasabb pozícióban.

Annak a ténynek, hogy az ℓ-edik újrasorsolás megtörtént megfeleltethetünk egy O_ℓ oksági fát. A fa gyökere V_ℓ lesz. A fát felfelé növőnek képzeljük. Azon V_i-k kerülnek bele, amikre i olyan, hogy B_ℓ-ből eljuthatunk B_i-be fedések sorozatával.

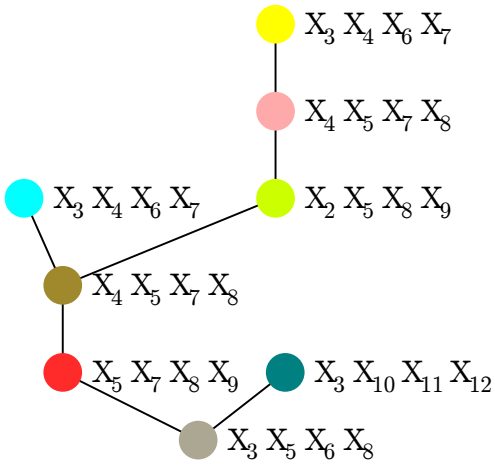
A felépítését „lustán” végezzük el. V_{ell}-ből egy oksági fában lévő csúcshoz vezető (egyértelmű út) a megfelelő blokkok között a leghosszabb fedési sorozatnak felel meg.

Két nagyon fontos megjegyzést teszünk:

- Vegyük észre, hogy ha két blokk ugyanazon klóz miatt lett újrasorsolva, akkor a megfelelő pozíciók felett (a klóz változóinak régi értékadása) ugyanazok a bitek szerepelnek, azok amik a kérdéses klózt hamissá teszik (CNF formulánál ez a klózban szepelő változók egyetlen értékadására teljesül).

- A fából (a csúcsok mellett a változó k-asok címkéivel) visszafejthető, hogy a fa csúcsainak megfelelő egyes újrasorsolások során a változók hanyadszorra lettek újrasorsolva, azaz a fa csúcsaihoz tartozó blokkok táblázatbeli helyzete.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1



2. ábra. Algoritmusunk egy futása (azonos szín azonos blokk) és a szürke blokk oksági fája. A szürke blokkot fedi a világos kék. Mégis a megfelelő csúcs messze van a fában a gyökértől. Gyerekként nem adjuk egyből a fához mert a piros fedőblokkot fedő barna blokk fedője. Csak a piros és barna blokk fához adása után következik.

Legyen E az az esemény, hogy több mint $d \cdot n$ újrasorsolás történt. Ekkor a blokkokban lesz olyan bit, amit legalább d indexű sorba esik. Ekkor ennek oksági fája legalább d csúcsot tartalmaz (sőt lagalább d lesz a mélysége).

Legyen T ezen blokk oksági fája. Legyen E_T azon esemény, hogy az algoritmus futása során valamelyik újrasorsolás redukált oksági fája T lesz.

Így az E eseményt lefedhetjük az $\cup_{T:|V|\geq d} F_T$ eseménnyel, ahol F_T az az esemény, hogy a futás során valamelyik blokk oksági fája T.

Legyen T egy v csúcsú oksági fa. Ekkor

$$\mathbb{P}(F_T) \leq \left(\frac{1}{2^k}\right)^v = \frac{1}{2^{kv}},$$

hiszen minden csúcs azt jelenti, hogy a megfelelő klózt a korábbi véletlen bitek nem elégítették ki (amely bit k-asok a táblázat diszjunkt pozícióhalmazaiból jöttek) Tehát v darab független esemény egyszerre történő bekövetkezése, amelyeknek egyenként a valószínúsége $1/2^k$.

Másrészt felülről becsülhetjük hány v pontú oksági fa van. Legyen m a φ formula klózainak száma. Az oksági fa gyökerét m-féleképpen választhatjuk. Ezekután $v-1$ ághajtást hajtunk végre. Mindegyiknél meg kell mondanunk, hogy melyik csúcsból (v darab lehetőség) melyik másikhoz vezet az ághajtás. Ez legfeljebb Δ lehetőség, hiszen a szomszéd klózjában szereplő változókat kell csak leírnunk, amelyek halmaza metszi a csúcs változóhalmazát. Ilyen klóz csak Δ lehet. Így az ághajtások lehetségét $v\Delta$-val becsülhetjük felül, amiből $v-1$ valósul meg. A v pontú oksági fák száma

legfeljebb $m\binom{v\Delta}{v-1}$ Azonban

$$m\binom{v\Delta}{v-1} \leq m\binom{v\Delta}{v} \leq m(e\Delta)^v.$$

Így

$$\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(\cup_{T:|V|\geq d} F_T) \leq \sum_{v=d}^{\infty} m(e\Delta)^v \cdot \frac{1}{2^{kv}} = m\frac{\left(e\Delta/2^k\right)^d}{1-e\Delta/2^k}.$$

Esetünkben

$$\frac{e\Delta}{2^k} \leq \frac{e2^{k-2}}{2^k} \leq \frac{3}{4}.$$

Azaz

$$\mathbb{P}(E_{\geq dn}) \leq 4m\left(\frac{3}{4}\right)^d.$$

Ezekután jelöljük ξ-vel az újrasorsolások számát megadó valószínűségi változót. Várható értéke most már könnyen becsülhető:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}(\xi = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq i) = \sum_{j=1}^{\infty} n\mathbb{P}(\xi_j \geq (j-1)n) = \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} n\mathbb{P}(E_{\geq(j-1)n}) \leq \sum_{j=0}^{\infty} n \cdot 4m\left(\frac{3}{4}\right)^j = 16nm.\end{aligned}$$

Ami nyilván polinomiális φ méretében, ahogy bizonyítani kellett.

Megjegyzés. Természetesen a Δ-ra vonatkozó 2^{k-2}-es becslés helyettesíthető $2^k/(e+\epsilon)$-nal, tetszőleges $\epsilon > 0$ konstansra.