ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

11. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2011. április 26.

1. Mahaney-tétel bizonyítása

Emlékeztető. Mahaney-tétel feltevése $SAT^* \prec S$, ahol $S \subset \Sigma^*$ egy ritka nyelv, azaz alkalmas $t(x) \in \mathbb{N}[x]$ polinomra $|S \cap \Sigma^n| \leq t(n)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezen feltevés alapján kell egy polinomiális algoritmust adnunk SAT-ra.

SAT^*-hoz fel kell idéznünk egy rendezést a $\{0,1\}^{\leq n}$ halmazon: $x, y \in \{0,1\}^{\leq n}$ esetén $x \prec y$, ha x és y első eltérő bitje 0 az x-ben és 1 az y-ban vagy pedig y valódi kezdőszelete x-nek.

Azonos hosszú szavakra megszorítva ez éppen a lexikografikus rendezés.

Bizonyítás. Polinom időben megoldjuk a SAT problémát: Algoritmusunk futása alatt mindig lesz egy polinomiális hosszú $\mathcal{L}_i$ listánk $\{0,1\}^i \subset \{0,1\}^{\leq n}$ elemeiből, azaz L_i elemeinek hossza mindig ugyanaz az i lesz (a futás során i egyesével fog nőni).

L_0 az ϵ 0-hosszú szóból áll.

$L_i = \{\ell_1, \ldots, \ell_s\}$-ből rekurzív módon írjuk fel L_{i+1}-et. Feltesszük, hogy a fenti indexelés a lexikografikus sorrendet, azaz $\prec$-et követi. A rekurzió több listán keresztül jut el a céljához. L_i^+ tartalmazza L_i elemeinek összes kiterjesztését egy bittel:

$$L_i^+ = \{\ell_1 0, \ell_1 1, \ldots, \ell_s 0, \ell_s 1\}$$

Azaz listánk teljes hossza $2|L_i|$. Feltesszük, úgy írtuk fel, hogy sorrendje a lexikografikus sorrend.

„Nem hagyhatjuk”, hogy ez a lista mindig megduplázódjon, exponenciálisan nagy legyen. L_i^+ minden elemére végezzük el a Karp-redukciót. Könnyű látni, hogy listánk elején NEM S-beli elemet kell kapnunk. Egy ponton lesz egy váltás és után a redukció csupa S-beli elemet ad (ez a rész lehet üres is). Sajnos S „nehéz” nyelv a váltást „nem látjuk”. Először az azonos sorozatra redukálódott elemek közül csak az elsőt hagyjuk meg. Legyen L_i^{+-} az így kapott lista.

Ez a lista még lehet hosszú. Azonban azok a bitsorozatok, amik S-beli karaktersorozatra redukálódnak már kevesen vannak: S maga ritka és maradék listánkon már különböző elemekre képez a redukció. A polinomiális redukciót legfeljebb n hosszú bitsorozatokra futtatjuk így a redukció által kiszámolt output hosszára polinomiális becslést adhatunk. Így az ilyen S-beli szavak száma legfeljebb $\overline{q}(n)$.

A következő lépésben ismét ritkítjuk listánka (most L_i^{+-}-t). A lexikografikus rendezésben utolsó $\overline{q}(n)$ elemét hagyjuk csak meg. Az eredmény lesz L_{i+1}.

A rekurzióval L_n-et számoljuk ki. Eljárásunk során minden listánk legfeljebb $2\overline{q}(n)$ hosszú, így az L_n lista előállításának időigénye polinomiális.

Végül L_n mindegyik elemére ellenőrizzük kielégíti-e φ-t. Ha bármelyik kiélegítő értékadás, akkor elfogadjuk az inputot. Különben elvetjük. Ez a lépés időigénye is polinomiális ($|L_n| \leq \overline{q}(n)$).

Csak az algoritmus helyességét kell ellenőrizni. Egyetlen módon tévedhet: Egy kielégíthető formula esetén L_n elemi közt nem lesz kielégítő értékadás. A következő állítás $i = n$ esete ezt zárja ki és így bizonyítja a tételt.

1. Lemma. *Tegyük fel, ho φ-nek van kielégítő értékadása. Legyen a rendezésünkben az első ilyen értékadás, e, továbbá i hosszú kezdőszelete legyen e_i. Ekkor e_i az L_i listán lesz.*

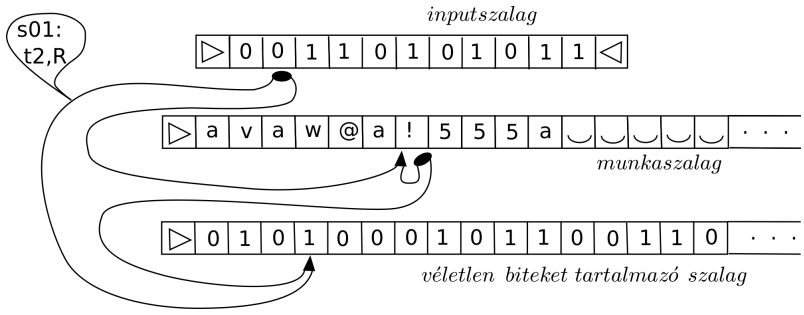
Lemma bizonyítása. $i = 0$ esetén nyilvánvaló az állítás.

Tegyük fel, hogy $e_i \in L_i$. Ekkor nyilván $e_{i+1} \in L_{i+1}$. Az első ritkítást megelőző redukciókban e_{i+1} lesz az első elem, ami S-beli elemre képződik, azaz megmarad.

A második ritkítást úgyválasztottuk, hogy biztos megmaradjon L_i^{+-} összes olyan eleme, ami S-beli elemre redukálódik (ezek a listánk hátulsó részében legfeljebb $\overline{q}(n)$ elem). Így e_{i+1} ismét megmarad. Kaptuk, hogy $e_{i+1} \in L_{i+1}$, ahogy bizonyítani kellett. ■

2. Véletlen számokat használó/valószínűségszámítási Turing-gépek

Definíció. Egy T Turing-gépet *véletlen számokat használó* (röviden véletlen) Turing-gépnek nevezünk (eldöntési feladatok esetén), ha az input- és munkaszalag mellett van egy harmadik szalag, egy úgy nevezett *véletlenszalag*, amely véletlen számok egy sorozatát tartalmazza, és az szalaghoz tartozó fej egyetlen műveletre képes: jobbra lépni és olvasni az elé kerülő mezőt. (Általában a véletlenszalag ábécéje $\Sigma_v = \{0, 1\}$ (ez nem szükségszerű), továbbá a szalag bitjei uniform eloszlásúak.) Az ilyen T futása az $\omega \in \Sigma_{input}^n$ inputszalag-tartalomból és ρ véletlenszalag-tartalomból egyértelműen (determinisztikusan) meghatározható (a kiszámolt értéket/leálló állapotot jelöljük $T(\omega, \rho)$-val).



1. ábra.

Megjegyzés. Ha csak ω-t rögzítjük, akkor a futás már szereteágazó lesz (függ a véletlen biteket tartalmazó szalag tartalmától). A fa, amley a futás lehetőségeit leírja hasonlít a nem-determinizmus esetén látott képhez. Ott a futást egy „zseniális elme” irányította, most a véletlen mozgatja. Adott input esetén a futásra úgy gondolhatunk, mint a „Galton-deszkán” lefutó golyó utjára.

Akár a nem-determinizmusnál most is gondot kell fordítanunk az elfogadás/elvetés definiációjára. Erre több lehetőségünk is van. Mi csak polinomiális időkorlát mellett definiálunk két lehetőséget.

Definíció. Egy L nyelvre $L \in \mathcal{BPP}$ pontosan akkor, ha létezik polinom idejű véletlen T Turing-gép, amelyre teljesül a következő két feltétel:

(BP$_1$) $\omega \in L$ esetén $\mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = \text{ ELFOGAD}\big) \geq 2/3$,

(BP$_2$) $\omega \notin L$ esetén $\mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = \text{ ELVET}\big) \geq 2/3$.

Megjegyzés. 1. Tehát annak az esélye, hogy T jó értéken áll le, $2/3$ minden ω-ra. Egyszerűen megfogalmazva, ha $L \in \mathcal{BPP}$, akkor ELFOGAD =„VALÓSZÍNŰLEG-JÓ”, ELVET =„VALÓSZÍNŰLEG-ROSSZ”.

2. A $\mathcal{BPP}$ nyelvosztály elnevezésében $\mathcal{B}$ a „bounded error” szóra, a két $\mathcal{P}$ pedig a „probabilistic” illetve „polinomial” szavakra utal.

Definíció. Egy L nyelvre $L \in \mathcal{RP}$ pontosan akkor, ha létezik polinom idejű T Turing-gép, amelyre teljesül a következő két feltétel:

(R$_1$) $\omega \in L$ esetén $\mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = \text{ ELFOGAD}\big) \geq 1/2$,

(R$_2$) $\omega \notin L$ esetén $\mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = \text{ ELVET}\big) = 1$.

Megjegyzés. 1. Vagyis ha $L \in \mathcal{RP}$, akkor ha $T(\omega,\rho)$ ELFOGAD, akkor $\omega \in L$ biztosan teljesül. Így elég ELVET =„VALÓSZÍNŰLEG-ROSSZ” átírást elvégezni, hogy a leálló állapotok kifejezzék az $\mathcal{RP}$ gépek filozófiáját.

2. A nyelvosztály nevében $\mathcal{R}$ a „random” szóból származik.

Megjegyzés. A $\mathcal{BPP}$ nyelvosztály definiciójában az elfogadás/elvetés között szimmetria volt. Azt monddhatjuk, hogy *co* $\mathcal{BPP} = \mathcal{BPP}$. Ez nem igaz $\mathcal{RP}$ esetén. Így természetesen bevezethető a *co* $\mathcal{RP}$ nyelvosztály. A részletek kidolgozása nem okozhat problémát a halgató számára.

A következő diagram a bevezetett és néhány ismerős osztály viszonyát fogalalja össze.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{PSPACE} & & \\
 & \subseteq & \cup\!\mid & \supseteq & \\
\mathcal{NP} & & \mathcal{BPP} & & co\,\mathcal{NP} \\
 & \supseteq & & \supseteq & \\
 & \mathcal{RP} \arrow[uur, phantom, "\subseteq"] & & co\,\mathcal{RP} \arrow[uul, phantom, "\subseteq"] & \\
 & & \mathcal{P} \arrow[uul, phantom, "\supseteq"] \arrow[uur, phantom, "\subseteq"] & &
\end{tikzcd}$$

Már a $\mathcal{RP}$ osztály definíciójából könnyen látszik, hogy $\mathcal{P} \subset \mathcal{RP} \subset \mathcal{NP}$ illetve $\mathcal{P} \subset co\mathcal{RP} \subset co\mathcal{NP}$. Az első tartalmazási lánc az alábbi megfigyelések eredménye:

Ha az (R$_1$)-ben szereplő esemény valószínűségéről azt kötjük ki, hogy pontosan 1 (így (R$_1$) és (R$_2$) is teljesül) akkor $\mathcal{P}$ definícióját kapjuk (a véletlenszalag olvasása helyett mindig 0 értéket képzelve). Ha pedig az (R$_1$)-ben szereplő esemény valószínűségről azt kötjük ki, hogy 0-nál szigorúan nagyobb, akkor $\mathcal{NP}$ definícióját kapjuk

(a véletlenszalagot tanúszalagként elképzelve). A másik tartalmazási lánc pedig a komplementálás/negálás tulajdonságából következik. A $\mathcal{BPP}$ osztály beillesztése a következő tétel után nyilvánvaló.

Az alábbi tétel alapvető jelentőségű.

2. Tétel. *$\mathcal{RP}$ és $\mathcal{BPP}$ is robosztus a hibázás valószínűségének korlátozását tekintve a következő értelemben:*

(i) $\mathcal{RP}$ definíciója nem változik, ha (R_1)-et (R_1^-)-szal vagy (R_1^+)-szal helyettesítjük, ahol ezek rendre

$$(R_1^-)\text{: } \omega \in L \Longrightarrow \mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = ELFOGAD\big) \geq 1/p(|\omega|),$$
$$(R_1^+)\text{: } \omega \in L \Longrightarrow \mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = ELFOGAD\big) \geq 1 - 1/2^{p(|\omega|)},$$

ahol $p \in \mathbb{N}[x]$ tetszőleges (minden egész helyen pozitív) polinom.

(ii) $\mathcal{BPP}$ definíciója nem változik, ha (BP_k)-t (BP_k^-)-szal vagy (BP_k^+)-szal helyettesítjük ($k \in \{1,2\}$), ahol ezek rendre

$$(BP_1^-)\text{: } \omega \in L \Longrightarrow \mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = ELFOGAD\big) \geq 1/2 + 1/p(|\omega|),$$
$$(BP_2^-)\text{: } \omega \in L \Longrightarrow \mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = ELFOGAD\big) \geq 1/2 + 1/p(|\omega|),$$
$$(BP_1^+)\text{: } \omega \notin L \Longrightarrow \mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = ELVET\big) \geq 1 - 1/2^{p(|\omega|)},$$
$$(BP_2^+)\text{: } \omega \notin L \Longrightarrow \mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = ELVET\big) \geq 1 - 1/2^{p(|\omega|)}.$$

ahol p hasonló az előző pontban szereplőhöz.

Bizonyítás. (i) legyen T $\mathcal{P}$ idejű L-t eldöntő véletlen Turing-gép. A hibázás valószínűségét vizsgáljuk. Legyen $\omega \in L$ úgy, hogy $|\omega| = n$. A hibázás csak $\omega \in L$ esetén lehetséges. Tegyük fel, hogy egy T polinomiális algoritmus esetén (R_2) mellett teljesül, hogy

$$\omega \in L \Longrightarrow \mathbb{P}_\rho\big(T(\omega,\rho) = \text{ELFOGAD}\big) \geq \kappa.$$

Konstruáljuk meg a $\widetilde{T}$ Turing-gépet úgy, hogy T futását ismételje meg r-szer (mindegyik futásnál a véletlen bitek szalagjának újabb blokkját használva). Ezek a futások független eredményt adnak, mert a véletlenszalag egy-egy futásnál felhasznált bitsorozatai is függetlenek. Egy ω inputra $\widetilde{T}$ futása ELFOGAD-dal ér végget, ha valamelyik futás elfogadó.

Könnyen látszik, hogy $\widetilde{T}$ polinomiális idejű, ha r polinomiális $|\omega|$-ban, továbbá teljesül hogy $\mathbb{P}(\widetilde{T}\text{ hibázik}) = \big(\mathbb{P}(T\text{ hibázik})\big)^r \geq \kappa^r$.

Tegyük fel, hogy T teljesítette (R_1^-) feltevést.

- Ha az $r = 1/\kappa = 10p(|\omega|)$-t választással élünk, akkor következik $\widetilde{T}$ elfogadja ugyanazt a nyelvet az (R_1) feltétel mellett.
- Ha az $r = 1/\kappa = 10p^2(|\omega|)$-t választással élünk, akkor következik $\widetilde{T}$ elfogadja ugyanazt a nyelvet az (R_1^+) feltétel mellett.

EbbőL adódik a bizonyítandó.

(ii) Hasonlóan dolgozunk az *(i)* ponthoz. Legyen T egy L nyelvet $\mathcal{BPP}$ módon eldöntő Turing-gép, amely legalább $1/2+\kappa$ valószínűséggel a korrekt választ adja. $\widetilde{T}$ pedig az a Turing-gép, amit T r-szeri (most r páratlan szám) ismételt futtatásával

kapunk úgy, hogy $\widetilde{T}$ eredménye az r eredményből adódik „többségi szavazással”, vagyis az dönt, hogy ELFOGAD vagy ELVET futás volt több. r-et az input méret polinomjának választhatjuk.

Minden futtatáshoz tartozzon egy 0-1 értékű X_i valószínűségi változó: 1 érték az ELFOGADÁS-nak felel meg, a 0 érték az ELVETÉS-nek.

$\omega \in L$ esetén $\mathbb{E}[X_i] \geq 1/2 + \kappa$. A hibázás eseménye, hogy $S_r < r/2$, amit felülről becsül, hogy $|S_r - r\mathbb{E}[X]| > r\kappa$.

$\omega \notin L$ esetén $\mathbb{E}[X_i] \leq 1/2 - \kappa$, A hibázás eseménye, hogy $S_r > r/2$, amit felülről becsül, hogy $|S_r - r\mathbb{E}[X]| > r\kappa$.

A bizonyítás befejezéséhez egy valószínűségszámítási tételt idézünk fel (bizonyítása nélkül).

3. Tétel. *(Chernoff-becslés) Legyenek $\{X_i\}_{i=1}^r$ független, azonos eloszlású,* 0-1 *értékű valószínűségi változók ($\mathbb{P}[X_i = 1] = p$ és így $\mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$). Legyen $S_r = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$ (így $\mathbb{E}S_r = rp$). Ekkor*

$$\mathbb{P}[|S_r - rp| \geq \Delta] \leq 2e^{-2\Delta^2/r}.$$

Ebből a bizonyítás vége egyszerűen adódik:

- Ha κ értéke BP_1^- szerint adott, akkor r választásával elérhetjük, hogy $-\kappa^2 \cdot r < -1/10$ legyen. Azaz $\widetilde{T}$ BP_1 szerint hibázzon.
- Ha κ értéke BP_1 szerint adott, akkor r választásával elérhetjük, hogy $-\kappa^2 \cdot r < -10p(|\omega|)$ legyen. Azaz $\widetilde{T}$ BP_1^+ szerint hibázzon.

$\omega \notin L$ esetén teljesen hasonlóan dolgozhatunk. ■