ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

8. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Győrffy Lajos 2011. március 29.

1. További $\mathcal{NP}$-teljes problémák

Az előző előadásokon láthattunk példát minden fontosabb bonyolultsági osztályra. $\mathcal{NP}$ esetén több példa is szereplet, mindegyik a kielégíthetőség egy formája: HÁLÓZAT-SAT, BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT, SAT, 3-SAT. Az $\mathcal{NP}$-teljesség ennél általánosabb. A mindennapi gyakorlatban gyakran merülnek fel $\mathcal{NP}$-teljes problémák. Most néhány további $\mathcal{NP}$-teljes problémát ismertetünk.

Emlékeztető. A 3-SZÍNEZHETŐSÉG probléma azt jelenti, hogy megadunk egy G gráf kódját, és el kell dönteni, hogy három színnel jól kiszínezhető-e, azaz teljesül-e, hogy a kromatikustikus száma legfeljebb 3. 3-SZÍNEZHETŐSÉG $\in \mathcal{NP}$, hiszen megadunk egy három színezést tanúként, majd polinomiális időben ellenőrizzük, hogy valóban azt kódolja-e és jó színezés-e.

Megállapodás: A $\preceq$ jel a mai előadáson mindig a polinomiális Karp redukciót ($\preceq_{\mathcal{P}}^{K}$) jelent.

1.1. Gráfelméleti problémák

1. Tétel. *3-SAT $\preceq$ 3-SZÍNEZHETŐSÉG*

Bizonyítás. A tétel két lépésben bizonyítható:

(1) **A konstrukció:** Ha adott φ egy $3-CNF$ formula, azaz $\varphi = \wedge_{i \in I} C_i$, ahol a $C_i : (\ell_i^{(1)} \vee \ell_i^{(2)} \vee \ell_i^{(3)})$ alakú és $\ell_i^{(j)} \in V \cup \overline{V}$, akkor polinom időben kiszámolható a későbbiekben konstruált G_φ egyszerű gráf.

(2) **Az elmélet:** $\varphi \in$ 3-SAT akkor és csak akkor $G_\varphi \in$ 3-SZÍNEZHETŐSÉG

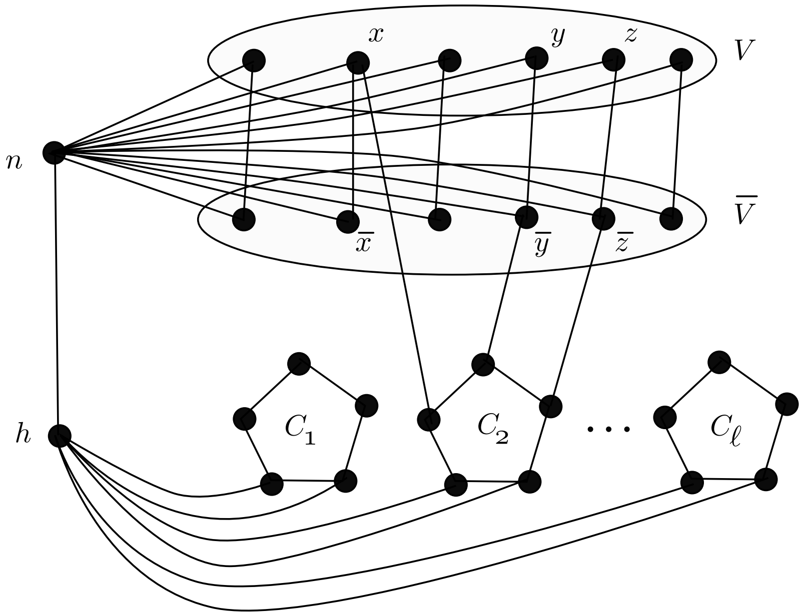
Az elméleti rész azt állítja, hogy a G_φ gráf színezetősége teljesen megfogja a φ kielégíthetőségének problémáját.

Először lássuk a konstrukciót. A csúcsok és élek leírása párhuzamosan történik

- Minden V-beli változót és a negáltjaikat egy-egy csúcs reprezentálja. A párokat egy teljes párosítás köti össze. Az eddigi csúcsok halmaza legyen $V \cup \overline{V}$.
- Egy n csúcs (neutrális csúcs), mely az összes előbbivel összekötött.
- Egy rajtuk kívül eső h csúcs (hamis csúcs), ami a korábbiak közül csak n-nel összekötött.

- Valamint minden klózhoz egy 5-hosszú kör, amely három csúcsát a benne lévő literálokat reprezentáló három csúccsal párosítjuk, a kör maradék két csúcsát pedig h-val kötjük össze.

A következő ábra egy egyszerű példa a konstrukcióra.



1. ábra. Példa töredék a konstrukcióra. Csupán a második klóz köréből kiinduló éleket rajzoltuk fel teljesen. $C_2 = x \vee \neg y \vee z$.

Észrevétel. Ha G_φ-ben az 5-körökön túli csúcsokat jól 3-színezzük, akkor ez a színezés akkor és csak akkor terjeszthető ki G_φ jó 3-színezésére, ha mindegyik 5-kör csúcsainak szomszédai NEM azonos színűek.

Valóban, ha egy 5-kör szomszédságában egyetlen szín szerepelne, akkor az 5-kör csúcsainál csak két színt használhatnánk, de páratlan hossz mellett ez nem elég. 2 színnel színezni. Ha mindegyik 5-kör szomszédságában több szín is szerepel, akkor a körökre való kiterjesztések függetlenül vizsgálhatók (különböző körök között nincs él). Egy kör esete pedig eset analízissel könnyen ellenőrizhető.

A 3-színezések palettáját nevezzük el:

Jelölés. h színét nevezzük pirosnak, n színét nevezzük kéknek. A harmadik szín legyen zöld.

A piros színt a hamis logikai értéknek, a zöld színt az igaz logikai értéknek értelmezzük.

Észrevétel. Vegyük G_φ egy jó 3-színezését. Ebben $V \cup \overline{V}$-re megszorítva a színezést és ezt logikailag értelmezve a literálok egy kiértékelését látjuk.

Továbbá a kiértékelés olyan, hogy φ-t igazzá teszi.

Valóban. Mindegyik csúcs szomszédos a kék színű n-nel, így egy piros-kék színezést kell látnunk. Ebben x és $\neg x$ összekötött, így egyikük színét mint igaz, másikét mint hamis logikai érték értelmezzük.

A második részhez csak azt kell látni, hogy minden klóz 5-körében lenni-e piros csúcsnak, ami nem lehet h szomszédja. Azaz egypiros csúcs szomszédja az egyik a klózban lévő literál. Ennek színe csak zöld lehet. Ez garantálja a tetszőlegesen választott klóz igaz voltát a színezésből kiolvasott kiértékelés esetén.

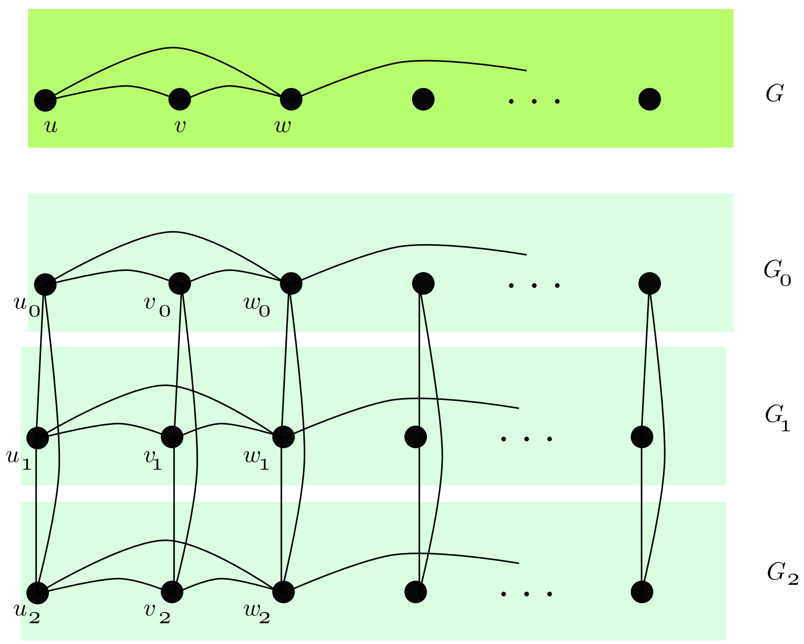
A fenti értelmezések és észrevételek után az elméleti rész világos, a bizonyítás teljes. ■

Emlékeztető. FGTLEN-CSÚCSOK: Adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k elemű független csúcshalmaz?

2. Tétel. *3-SZÍNEZHETŐSÉG $\preceq$ FGTLEN-CSÚCSOK*

Bizonyítás. Itt és később is a redukciók bizonyítása ugyanabból a két részből áll mint korábban; egy konstrukció leírásából és annak elméleti elemzéséből.

Konstrukció: G-ből konstruálunk egy $\widehat{G}$ gráfot és egy k_G számot. $V(\hat{G}) = \{v_i : i \in \{0, 1, 2\}\}$ Legyen $V_i = \{v_i : v \in V(G)\}$. Mindegyik V_i elhelyezünk G egy példányát és mindegyik $v \in V(G)$ esetén v_0, v_1, v_2 csúcshármast összekötjük egy három hosszú körrel. Továbbá legyen $k_G = |V(G)|$.



2. ábra.

A konstrukció nyilván polinomiális. Például k_G kiszámolásához és leírásához logaritmikus tár is elég.

Észrevétel. $\widehat{G}$ mindegyik független csúcshalmaza maximum $|V(G)|$ elemszámú, és ha pont ilyen méretű egy F, akkor tetszőleges $v \in V(G)$ esetén $|F \cap \{v_0, v_1, v_2\}| = 1$.

Az észrevétel alapján egy $|V(G)|$ elemű független halmazra alapozva 3-színezhetjük G-t az $\{0, 1, 2\}$ palettával: $v \in V(G)$ esetén $F \cap \{v_0, v_1, v_2\}$ egyetlen elemének indexe lesz a színe.

Ebből jön a konstrukció elméleti analízise: Ha $\widehat{G}$-ban F egy $|V(G)|$ méretű független ponthalmaz, akkor a belőle kiolvasható 3-színezés jó színezés!

A gondolatmenet megfordítható: Ha $c : V(G) \to \{0, 1, 2\}$ jó 3-színezés, akkor $F = \{v_{c(v)} : v \in V\}$ független és $|F| = |V(G)|$. ■

1.2. Halmazrendszerekkel kapcsolatos problémák

Definíció. $\mathcal{H}$ halmazrendszer a Vhalmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. $\mathcal{H}$ elemei a halmazrendszer élei. k-uniform halmazrendszer olyan halmazrendszer, amely összes éle k elemű. Tehát az egyszerű gráfok pontosan a 2-uninform halmazrendszerek.

Definíció. A gráfelmélet független csúcshalmazának fogalmát kétféleképpen terjeszthetjük ki halmazrendszerekre:

- I független, ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $E \not\subseteq I$.
- I független*: ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $|E \cap I| \leq 1$.

Definíció. FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

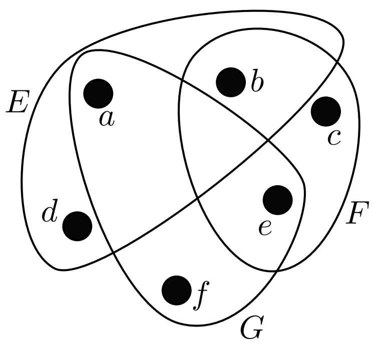
$$\{\lceil V, \mathcal{H}, k \rceil : \text{van olyan } I \text{ független csúcshalmaz, hogy } |I| = k\}.$$

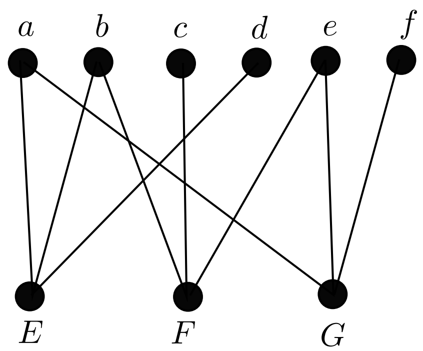
FGTLEN*-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$$\{\lceil V, \mathcal{H}, k \rceil : \text{van olyan } I \text{ független}^* \text{ csúcshalmaz, hogy } |I| = k\}.$$

Észrevétel. $V, \mathcal{H}$ halmazrendszer könnyen leírható B páros gráffal. A két színosztály V (felső pontok) és $\mathcal{H}$ (alsó pontok). Az alaphalmaz egy v eleme/csúcs akkor és csak akkor van összekötve $\mathcal{H}$ egy E elemével/él, ha $v \in E$.

A halmazrendszert lehet kódolni pont-él illeszkedési mátrixszal. Ez egy $n \times m$ méretű 0-1 mátrix, ahol $n = |V|$ és $m = |\mathcal{H}|$





$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. ábra. Egy halmazrendszer a középiskoali Venn-diagrammal lerajzolva, a hozzá tartozó, őt kódoló B páros gráf és a pont-él-illeszkedési mátrix

A fenti észrevétel segítségével könnyű leírni a független* halmazokat. Ezeknek B-ben felső pontok egy olyan I halmaza tartozik, amleyekre nem illeszkedik V-alak, azaz olyan $a \in A$, $f, f' \in I \subset F$ ponthármas, ahol a összekötött f és f'-vel.

Definíció. Legyen B egy halmazrendszert leíró páros gráf. Az alsó/felső szerepek felcserélésével a B^* páros gráfot kapunk. Ez a B^* „elolvasható halmazrendszerként” visszaalakítva halmazrendszerré a $V^* = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}^* = V$ duális halmazrendszert kapunk.

A redukciók sorozatát egy trivialitással kezdjük.

3. Tétel. *(i) FGTLEN-CSÚCSOK* $\preceq$ *FGTLEN-CSÚCSOK-HRSZBEN*
(ii) FGTLEN-CSÚCSOK $\preceq$ *FGTLEN*-CSÚCSOK-HRSZBEN*

Valóban, a gráfelméleti problémá gráfja a halmazrendszerek egy speciális esete. A gráfelméleti függetlenség mindkét halmazrendszeres függetlenség fogalom speciális esete.

Definíció. FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN =

$$\{\lceil V, \mathcal{H}, k \rceil : \mathcal{H}\text{-ban } J\ k \text{ db olyan él, amelyek páronként diszjuntak}\}.$$

A következő tétel már kevésbé nyilvánvaló.

4. Tétel. *FGTLEN*-CSÚCSOK-HRSZBEN* $\preceq$ *FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN*

Bizonyítás. $V, \mathcal{H}, k$-ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartsuk meg: $V^*, \mathcal{H}^*, k$.

Azt kell eldöntenünk, hogy az erdeti halmazrendszert leíró B páros gráfban van-e k felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá $\vee$ alak. $V^*, \mathcal{H}^*$ páros gráfja éppen a fejetetejére állított B. Azaz az eredeti döntési feladat ekvivalens azzal, hogy fejrefordított B gráfban van-e k alsó csúcs (k darab él), hogy ne támaszkodjon rá $\wedge$, azaz páronként diszjunktak legyenek. Azaz FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN problémát kell megoldani $V^*, \mathcal{H}^*, k$ esetén.

Azaz a kiinduló transzformáció a tételt igazoló redukció. ■

Megjegyzés. FGTLEN-ÉLEK-GRÁFOKBAN probléma, másképpen PÁROSÍTÁS $= \{\lceil G, k \rceil : \nu(G) \geq k\}$. Az Edmonds-algoritmus alapján ez egy $\mathcal{P}$-beli probléma. Azaz a gráfokra vonatkozó eset könnyen kezelhető.

Definíció. PARKETTÁZÁS =

$$\{\lceil V, \mathcal{H} \rceil : \text{ léteznek } E_1, \ldots, E_k \text{ páronként diszjunkt élek, hogy } \dot{\cup} E_i = V\}$$

5. Tétel. *FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN*$\preceq$*PARKETTÁZÁS.*

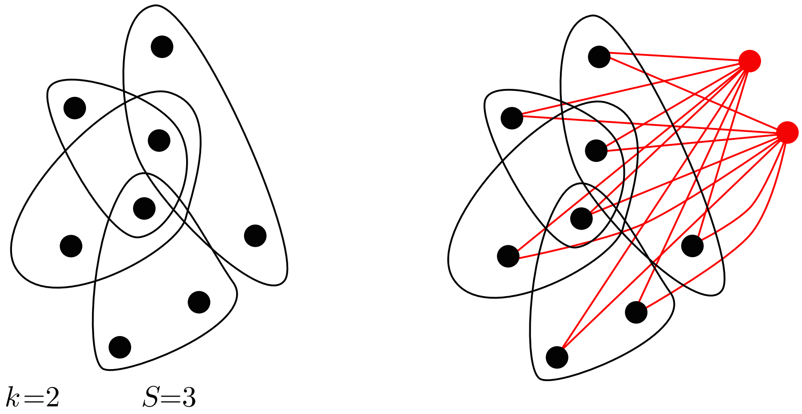
Bizonyítás. Legyen $V, \mathcal{H}, k$ az input. Legyen S a maximális élméret paraméter. El kell dönteni, hogy van-e k db diszjunkt él.

A konstrukciót több lépésben végezzük el. Először $\mathcal{H}$-t úgy transzformáljuk, hogy uniform legyen: Minden E élhez $S - |E|$ sok új pontot veszünk fel (különböző élekhez különböző új pontokat használunk). A módosított halmazrendszerre vonatkozó probléma nyilván ekvivalens a kiinduló problémával.

A konstrukció második lépésében már feltesszük, hogy $\mathcal{H}$ egy S-uniform halmazrendszer. Ebben a lépésben $V(H)$-hoz hozzáveszünk $|V(H)| - k \cdot S$ darab új csúcsot (legyen $\widetilde{V}$ a kapott ponthalmaz), $\widetilde{\mathcal{H}}$ elemei pedig $\mathcal{H}$ elemei és minden régi-új csúcspárra egy-egy őket tartalmazó kételemű halmaz.

Észrevétel. $(\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{H}})$ parkettázásához le kell fedni a $|V| - kS$ darab új csúcsot, ami csak a $|V| - kS$ darab új csúcskettőssel lehet. A maradék parkettázó élek csak régi élek lehetnek, amleyek kS csúcsot fednek le. Azaz a parkettázás ad k független elt $\mathcal{H}$-ban.

Az észrevétel gondolatmenetének megfordításá teszi teljessé a bizonyítás elméleti részét. ■

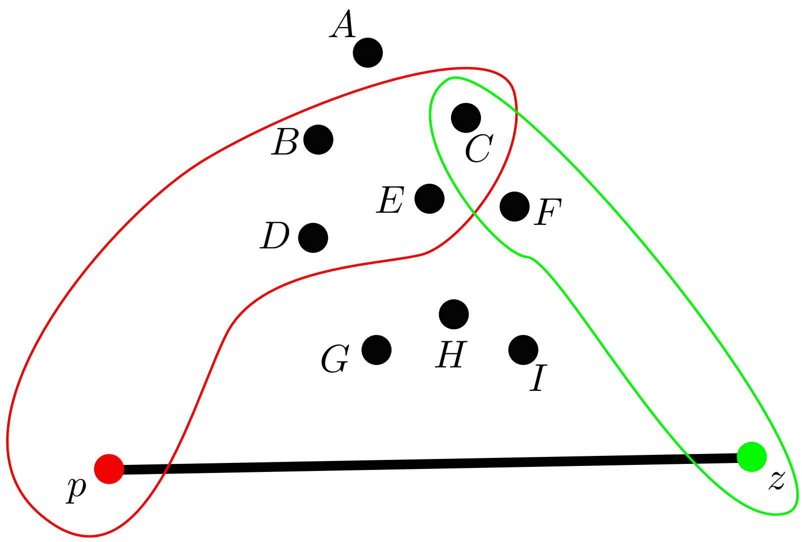


4. ábra. Az 5. Tétel redukciója. $|V| - kS = 8 - 2 \cdot 3 = 2$. A két új pont és a hozzájuk tartozó gráfélek a jobb oldalon szerepelnek pirosban.

Definíció. HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE: Adott egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer. Döntsük el: kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei 2 színnel úgy, hogy semelyik H-beli halmaz ne legyen monokromatikus.

6. Tétel. *PARKETTÁZÁS $\preceq$ HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE.*

Bizonyítás. Adott egy $V, \mathcal{H}$ input a parkettázás problémához.
Konstrukció: $\widetilde{V} = \mathcal{H} \cup \{p, z\}$. $\widetilde{H}$-hoz minden E, F metsző $\mathcal{H}$-beli élpárra legyen $Z_{E,F} = \{E, F, z\}$ egy él. Minden $v \in V$ esetén legyen $R_v = \{E : v \in E \in \mathcal{H}\} \cup \{p\}$ egy $\widetilde{\mathcal{H}}$-beli él. Továbbá legyen $\{p, z\}$ is egy $\widetilde{\mathcal{H}}$-beli él.



5. ábra. $A, B, C, \dots, H, I$ pontosan a halmazrendszerünk élei. B, C, D, E pontosan az a elemet tartalamzó élek. C és F élek metszőek. A fenti információkból kiolvasható éleket rajzoltuk be az ábrába, amely a redukció megfelelő töredékét tartalmazza.

Észrevétel. $\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{H}}$ egy 2-színezése esetén legyen p színe piros, z színe zöld (a $\{p, z\}$ él kényszerít a teljes paletta használatára). Az eredeti éleknek megfelelő csúcsok közül a zöld szín kijelöl egy élhalmazt. Ezek parkettázzák az eredti halmazrendszert.

Valóban, köztük két metsző él egy $Z_{E,F}$ típusú zöld-homogén élhez vezetne a redukció eredményében. Míg egy lefedetlen v csúcs (az eredeti halmazrendszerben) adna egy R_v piros-homogén élt.

A gondolatmenet megfordítható, a bizonyítás teljes. ∎

Definíció. RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{\lceil A, b\rceil : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A, \text{ hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

A feladat egy egyszerű értelmezése: A a pénztárcánkban lévő érmék értékeit összegyűjtő halmaz . A, b kódja akkor tartozik az elfogadandó nyelvhez, ha b összeget pontosan ki tudunk fizetni a pénztárcánkból.

7. Tétel. *PARKETTÁZÁS $\preceq$ RÉSZLETÖSSZEG*

Bizonyítás. Legyen $V, \mathcal{H}$ a PARKETTÁZÁS egy inputja. Ki lehet-e választani olyan parkettahalmazt/élhalmazt, amivel ki lehet parkettázni a V-t/padlót?
Konstrukció: Legyen $w : V \to \{1, a, a^2, \dots, a^{|V|-1}\}$ tetszőleges bijekció. Az értékkészletre gondoljunk mint az a alapú számrendszer helyiértékei.

Legyen $E \in \mathcal{H}$ esetén $a_E = \sum_{v:v\in E} w(v)$. Legyen $A = \{a_E : E \in \mathcal{H}\}$ és $b = 11\dots1_a = \sum_{v:v\in V} w(v)$. Ezzel leírtuk a részletösszeg probléma egy inputját.

Észrevétel. Ha a értékét $|\mathcal{H}| + 1$-nek választjuk, akkor $a_i \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az a alapú számrendszerben maradék továbbvitele nékül kiszámolható.

Az észrevétel egyből adja, hogy a csupa 1-es számjegyből álló szám előállítása mint részletösszeg ekvivalens az eredeti halmazrendszerre vonatkozó PARKETTÁZÁS feladattal (alkalmasan nagy a esetén).

A redukció során előforduló legnagyobb szám $S = \sum_{i=0}^{|V|-1} a^i = \frac{a^{|V|}-1}{a-1} < a^{|V|}$. Kódjának hossza $|V| \log a = |V| \log(|\mathcal{H}| + 1)$. Redukciónk polinomiális. ∎

Az összes mai redukcióban szereplő probléma $\mathcal{NP}$-beli. A redukciók tranzitivitása alapján mindegyikre redukálható a 3-SAT. Azaz mindegyik probléma $\mathcal{NP}$-teljes.

Ha $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ (ahogy általában sejtik), akkor egyik probléma sem lehet $\mathcal{P}$-ben. Azaz nem oldhatók meg hatékonyan.