ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

Matematika MSc hallgatók számára

7. Előadás

Előadó: Nagy-György Judit

Jegyzetelő: Nagy-György Judit 2010. március 22.

$\mathcal{NP}$-teljes problémák

k-SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz legfeljebb k literált tartalmaz (k-CNF). Kielégíthető-e?

1. Tétel. *3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. 3-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális (a SAT speciális esete).

3-SAT $\mathcal{NP}$-nehéz: SAT visszavezetése 3-SAT-ra (emlékeztetőül: egy SAT $\to$ 3-SAT: $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinom időben kiszámítható függvény kell, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in$ SAT $\Leftrightarrow \mathcal{C}' \in$ 3-SAT). A hozzárendelés a következő lesz: a $C = \langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ klózra vezessünk be $y_1, \ldots, y_k$ új változókat és a következő klózokat vegyük fel $\mathcal{C}'$-be:

$\langle \overline{y}_1, z_1 \rangle, \langle y_{i-1}, \overline{y}_i, z_i \rangle, \langle y_k \rangle$ $(i = 2, \ldots, k)$. Ezt minden $\mathcal{C}$-beli klózra végezzük el. Amit kapunk, az egy 3-CNF. A következőket kell belátni:

(i) $\mathcal{C}'$ meghatározható ($\mathcal{C}$ kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.

(ii) $\mathcal{C}$ pontosan akkor kielégíthető, ha $\mathcal{C}'$ az:
Ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, akkor vegyük egy kielégíthető kiértékelését. $C = \langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ klóz esetén legyen z_i a klózban az első igaz literál. Ekkor z_i értékeit megtartva, $y_1 = \ldots = y_{i-1} = h$ és $y_i = \ldots = y_k = i$ kiértékelés jó lesz. Másik irány: $\mathcal{C}'$-nek nincs olyan kielégítő kiértékelése, amelyben valamely $\mathcal{C}$-beli $C = \langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ klóz esetén $z_1 = \ldots = z_k = h$ lenne, mivel az $(\langle \overline{y}_1 \rangle, \langle y_{i-1}, \overline{y}_i \rangle, \langle y_k \rangle : (i = 2, \ldots, k))$ formula kielégíthetetlen.

∎

Megjegyzés. Gyakorlaton láttuk, hogy 2-SAT $\in co\mathcal{NL}$.

Gráfelméleti problémák

Definíció. k-SZÍNEZHETŐSÉG a következő probléma: adott egy gráf, kiszínezhető-e k színnel?

2. Tétel. *3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. 3-SZÍNEZHETŐSÉG $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

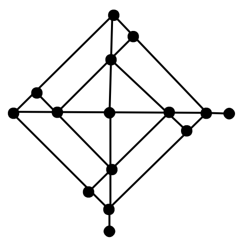
3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-nehéz: 3-SAT-ot vezetjük rá vissza. $\mathcal{C}$ 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai $u, v, \mathcal{C}$ változói és azok negáltjai, és minden $C \in \mathcal{C}$ klózra C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. $G_{\mathcal{C}}$ élei a következők lesznek: uv, minden x_i változóra $x_i\overline{x}_i$, ux_i és $u\overline{x}_i$, illetve minden $C = \langle z_1, z_2, z_3\rangle$ klózra $C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_1$, $C_1z_1, C_2z_2, C_3z_3, C_4v, C_5v$. Könnyű ellenőrizni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható, és pontosan akkor 3-színezhető, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető (felhasználva azt az észrevételt, hogy z_1, z_2, z_3, v 3-színezése pontosan akkor terjeszthető ki $C = \langle z_1, z_2, z_3\rangle$ klózhoz tartozó ötszögre jó színezésként, ha a 4 csúcs színe nem azonos). ■

Megjegyzés. Gyakorlaton láttuk, hogy 2-SZÍNEZHETŐSÉG $\in co\mathcal{NL}$.

3. Tétel. *SÍKGRÁF 3-SZÍNEZHETŐSÉGE $\mathcal{NP}$-teljes.*

Vázlat. $\mathcal{NP}$-beliség triviális.

SÍKGRÁF 3-SZÍNEZHETŐSÉGE $\mathcal{NP}$-nehéz: 3-SZÍNEZHETŐSÉG-et vezetjük rá vissza. Lerajzolás után a kereszteződő éleket kell helyettesíteni az alábbi kis gráffal:



Azt kell meggondolni, hogy megtehetők a helyettesítések úgy, hogy nem hoznak be új metszéseket, és a keletkezett gráf pontosan akkor 3-színezhető, ha az eredeti is. ■

Megjegyzés. A 2-színezhetőség $co\mathcal{NL}$-beli, síkgráfokra a 4-színezhetőség triviális a négyszíntétel (Appel, Haken 1977) alapján.

Definíció. SZÍNEZÉSI PROBLÉMA: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-nek jó k-színezése?

4. Tétel. *SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

A SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-nehéz, mivel a 3-SZÍNEZHETŐSÉG általánosítása. ■

Definíció. FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k-elemű független csúcshalmaz?

5. Tétel. *FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\in \mathcal{NP}$: tanú egy független csúcshalmaz.

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\mathcal{NP}$-nehézségére két bizonyítást adunk.

I. SAT visszavezetése: $\mathcal{C} = (C_1 = \langle z_{1,1}, \ldots, z_{1,r_1}\rangle, \ldots, C_k = \langle z_{k,1}, \ldots, z_{k,r_k}\rangle) \mapsto (G_{\mathcal{C}}, k)$ ((i,j) jelentése: i-edik klóz j-edik literálja), $V(G_{\mathcal{C}}) = \{(i,j) : i \leq k, j \leq r_i\}$, $E(G_{\mathcal{C}}) = \{(i,j),(i',j') : i = i' \text{ vagy } z_{i,j} = \overline{z}_{i',j'}\}$. Könnyű meggondolni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható és pontosan akkor van benne k elemű független halmaz, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, mivel kiértékelés akkor kielégítő, ha minden klózból ki tudunk választani egy igaz literált (az élek garantálják, hogy változó és negáltja egyszerre ne szerepeljenek, illetve minden klózból legfeljebb egy literált válasszunk).

II. SZÍNEZÉSI PROBLÉMA visszavezetése: $(G,k) \mapsto (G', |V(G)|)$, ahol $V(G') = \{(v,i) : v \in V(G), i \in [k]\}$ (itt (v,i) jelentése az, hogy v az i színt kapja), $E(G') = \{(v,i)(v',i') : v = v', i \neq i' \text{ vagy } vv' \in E(G), i = i'\}$ (vagyis: élek a tiltások, tiltott, hogy egy csúcs több színt kap vagy összekötött csúcsok azonos színt kapnak). Könnyű meggondolni, hogy G' és $|V(G)|$ is polinom időben meghatározható, és pontosan akkor van G'-ben $|V(G)|$ elemű független halmaz, ha G gráf k-színezhető. ■

Megjegyzés. Szemben a SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁval, ha k nem az input része, hanem konstans, akkor az így kapott k-FÜGGETLEN HALMAZ probléma már polinom időben megoldható.

Definíció. KLIKK probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k méretű klikk?

Definíció. LEFOGÓ PONTHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k-elemű lefogó ponthalmaz?

6. Következmény. *KLIKK és LEFOGÓ PONTHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljesek.*

Bizonyítás. Ekvivalensek a FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ problémával. ■

Halmazrendszerekkel kapcsolatos problémák

Definíció. LEFOGÁSI FELADAT: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Van-e H alaphalmazának k-elemű részhalmaza, amely minden H-beli halmazt metsz?

7. Tétel. *LEFOGÁSI FELADAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. $\mathcal{NP}$-beliségre tanú egy ponthalmaz. A probléma $\mathcal{NP}$-nehéz, mivel a gráfelméleti LEFOGÓ PONTHALMAZ általánosítása. ■

Definíció. LEFEDÉSI FELADAT: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Lefedhető-e H alaphalmaza, $V(H)$ k darab H-beli halmazzal?

8. Tétel. *LEFEDÉSI FELADAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. Ekvivalens a LEFOGÁSI FELADATtal (duális feladatok). ■

Definíció. FÜGGETLEN PONTHALMAZ: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Van-e $V(H)$-nak k-elemű részhalmaza, amelynek nem része H-beli halmaz?

Definíció. ERŐSEN FÜGGETLEN PONTHALMAZ: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Van-e $V(H)$-nak k-elemű részhalmaza, amelyben semelyik kettő nincs egy H-beli halmazban?

9. Tétel. *FÜGGETLEN PONTHALMAZ és ERŐSEN FÜGGETLEN PONTHALMAZ problémák $\mathcal{NP}$-teljesek.*

Bizonyítás. $\mathcal{NP}$-beliségre tanú egy ponthalmaz. $\mathcal{NP}$-nehéz mindkét probléma, mivel a gráfelméleti FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ probléma általánosításai. ∎

Definíció. FÜGGETLEN ÉLHALMAZ: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Van-e H-ban k olyan halmaz, amelyek páronként diszjunktak?

10. Tétel. *FÜGGETLEN ÉLHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. Ekvivalens a ERŐSEN FÜGGETLEN PONTHALMAZzal (duális problémák). ∎

Definíció. PONTOS PARTÍCIÓ (PARKETTÁZÁS): adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Van-e H-ban k olyan halmaz, amelyek $V(H)$ partícióját adják?

11. Tétel. *PONTOS PARTÍCIÓ $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás (Gyakorlaton szerepelt). $\mathcal{NP}$-beliségre tanúk a megfelelő halmazok.

Az $\mathcal{NP}$-nehézség belátásához a FÜGGETLEN ÉLHALMAZ problémát vezetjük rá vissza. Feltehető, hogy a FÜGGETLEN ÉLHALMAZ probléma inputja s-uniform, különben legfeljebb polinom sok pont hozzávételével (úgy, hogy a különböző halmazok bővítései diszjunktak legyenek) uniformmá tehetjük a halmazrendszert. A visszavezetés: $(H,k) \mapsto (H',k')$, ahol $V(H')$-t úgy kapjuk, hogy $V(H)$-hoz hozzáveszünk $|V(H)|-ks$ új csúcsot, H' elemei pedig H elemei és minden régi-új csúcspárra egy-egy őket tartalmazó kételemű halmaz. $k' := |V(H)| - (s-1)k$. Könnyű meggondolni, hogy H' polinom időben megkonstruálható, és pontosan akkor van benne k' halmaz, amelyek $V(H')$ partícióját adják, ha H-ban van k páronként diszjunkt halmaz. ∎

Definíció. PARTÍCIÓ: adott egy H halmazrendszer. Van-e H-nak olyan részhalmaza, amely $V(H)$ partícióját adja?

12. Tétel. *PARTÍCIÓ $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. $\mathcal{NP}$-beliségre tanúk a megfelelő halmazok.

Az $\mathcal{NP}$-nehézség igazolásához a PONTOS PARTÍCIÓt vezetjük vissza a problémára. $(H,k) \mapsto H'$, ahol $V(H') = V(H) \cup [k]$, $H' = \{h \cup \{i\} : h \in H, i \in [k]\}$. Könnyű látni, H' polinom időben megkonstruálható és pontosan akkor van benne partíció, ha H-ban van k elemű partíció. ∎

Definíció. HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE: adott egy H halmazrendszer. Kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei két színnel, hogy semelyik H-beli halmaz ne legyen monokromatikus?

13. Tétel. *HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. $\mathcal{NP}$-beliségre tanúk a megfelelő halmazok.

Az $\mathcal{NP}$-nehézség bizonyításához a PONTOS PARTÍCIÓt vezetjük vissza a problémára:

$(H,k) \mapsto H'$, ahol $V(H') = H \cup \{p,z\}$ (p színe piros, z színe zöld, a zöld csúcsokat választjuk a partícióba), $H' = \{\{p\} \cup \{h : v \in h \in E\} : v \in V(H)\} \cup \{\{z, h_i, h_j\} : h_i \cap h_j \neq \emptyset\} \cup \{pz\}$. Az unió első tagja fogja biztosítani, hogy minden csúcs le legyen fedve a partícióban, a második tagja eredményezi, hogy metsző halmazok egyszerre nem kerülnek a partícióba. Ez alapján könnyű látni, hogy H' polinom időben megkonstruálható, és pontosan akkor 2-színezhető, ha H-ban van k páronként diszjunkt halmaz, amelyek $V(H)$ partícióját adják. ■

Definíció. HALMAZRENDSZEREK SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁJA: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei k színnel, hogy semelyik H-beli halmaz ne legyen monokromatikus?

14. Tétel. *HALMAZRENDSZEREK SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁJA $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. A HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGÉ-nek általánosítása. ■

Egyéb problémák

Definíció. DIOPHANTOSZI EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER: adott egy $Ax \leq b$ egész együtthatós lineáris egyenlőtlenségrenszer. Van-e megoldása egész számokban?

15. Tétel. *DIOPHANTOSZI EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. $\mathcal{NP}$-beliségre tanú egy megoldás.

Az $\mathcal{NP}$-nehézség bizonyításához a SAT-ot vezetjük vissza a problémára: adott egy konjunktív normálforma. Minden x_i változóra bevezetjük a $0 \leq x_i \leq 1$, és minden $\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ klózra a $t_1 + \ldots + t_k$ egyenlőtlenséget, ahol $t_i = x_j$, ha $t_i = x_j$ és $t_i = 1 - x_j$, ha $t_i = \overline{x}_j$. Könnyű látni, hogy az egyenlőtlenségrendszer polinom időben megkonstruálható, és pontosan akkor megoldható, ha a konjunktív normálforma kielégíthető. ■

Definíció. RÉSZLETÖSSZEG PROBLÉMA: adott egész számok A halmaza és egy b egész szám. Van-e A-nak olyan részhalmaza, amely összege b?

16. Tétel. *RÉSZLETÖSSZEG PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás. $\mathcal{NP}$-beliségre tanú A egy részhalmaza.

Az $\mathcal{NP}$-nehézség bizonyításához a PARTÍCIÓt vezetjük vissza a problémára. Legyen $V(H) = \{0, \ldots, n-1\}$. A visszavezetés $H \mapsto (A, b)$, ahol $A = \{a_1, \ldots, a_{|H|}\}$, $q = |H| + 1$ és minden $A_i \in H$-ra $a_i = \sum_{j \in A_i} q^j$, továbbá $b = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$. Könnyen látható, hogy A és b polinom időben megadható, és pontosan akkor van A-nak olyan részhalmaza, amely összege b, ha H-nak olyan részhalmaza, amely $V(H)$ partícióját adja, mivel b felírása q-as számrendszerben egyértelmű. ■

További $\mathcal{NP}$-teljes problémák

Az alábbi problémák mindegyike $\mathcal{NP}$-teljes. Ezek nem szerepeltek előadáson. Csak megemlítjük az érdklődő olvasóknak és ötletet adunk az igazoláshoz.

Definíció. HAMILTON-ÚT: adott egy gráf. Van-e benne Hamilton-út?

Ötlet. Szokásos visszavezetés: 3-SAT.

Definíció. HAMILTON-KÖR: adott egy gráf. Van-e benne Hamilton-kör?

Ötlet. Szokásos visszavezetés: SAT, LEFOGÓ PONTHALMAZ.

Definíció. HÁRMASÍTÁS: adott három azonos méretű halmaz és ennek transzverzálisaiból álló 3-uniform halmazrendszer. Van-e a halmazrendszernek olyan részhalmaza, amely a három halmaz uniójának partícióját adja?

Ötlet. Szokásos visszavezetés: 3-SAT.

Definíció. 3-UNIFORM HALMAZRENDSZER PARTÍCIÓ: adott egy 3-uniform halmazrendszer. Van-e olyan részhalmaza, ami az alaphalmaz partíciója?

Ötlet. HÁRMASÍTÁS általánosítása.

Definíció. HÁTIZSÁK: Adott tárgyak T halmaza. Minden $t \in T$ tárgyhoz tartozik egy V_t térfogat és egy v_t érték ($v_t, V_t \in \mathbb{N}$). Adott egy hátizsák, amelybe legfeljebb H össztérfogatú tárgyakat pakolhatunk. Továbbá adott egy L értékhatár. ($H, L \in \mathbb{N}$.) Kiválasztható-e T egy részhalmaza úgy, hogy elférjen a hárizsákban és összértéke legalább L legyen?

Ötlet. Szokásos visszavezetés: 3-UNIFORM HALMAZRENDSZER PARTÍCIÓ.

Definíció. LÁDAPAKOLÁS: adott egész számok A halmaza, egy b és egy c egész szám. Meg lehet-e adni A egy legfeljebb b osztályú partícióját, amelyben minden osztály összege legfeljebb c?

Ötlet. Szokásos visszavezetés: HÁRMASÍTÁS.