Hálózatok, $\mathcal{P}$- és $\mathcal{NP}$-teljes problémák

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Normalizált TG-ek

Emlékeztető

$L \in_T \mathcal{TIME}(t(n))/\mathcal{NTIME}(t(n))$ esetén mindig feltesszük, hogy $t(n)$ szép idő függvény, azaz Turing-géppel megvalósítható egy óra, ami n hosszú inputra „$t(n)$ idő után üt”.
$\omega \in \Sigma^n$ inputon T futása a

$$\kappa_0(\omega) \to \kappa_1 \to \kappa_2 \to \ldots \to \kappa_\ell,$$

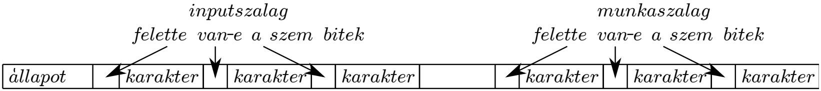
konfigurációsorozat, ahol $\kappa_0(\omega)$ az ω-hoz tartozó kiinduló konfiguráció, κ_{i+1} a κ_i konfiguráció rákövetkezője, és κ_ℓ az első olyan konfiguráció, ahol az állapot ELFOGAD vagy ELVET. Feltehető, hogy $\ell = t(n)$.

Az ω inputhoz tartozó konfigurációkról feltehető, hogy a munkaszalag(ok) első $t(n)$ mezőjnek tartalmát tartalmazza.

Konfigurációk kódolása bitekkel

Észrevétel

κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.



A fej pozícióját is kell kódolnunk. Ezt „szétszórtuk”, minden mező raktunk egy bitet. Így nem miden adott hosszúságú sorozat kódol konfigurációt.

S elemeinek kódolására $\lceil \log_2 |S| \rceil$ bit legendő.

Az állapotot és karaktereket kódoló blokkkok hossza függ $|S|$, $|\Sigma|$ és $|\Gamma|$ értékétől. Minden esetre konstans sok bit szükséges (ami a Turing-géptől függ).

Észrevételek

1. Észrevétel

A megállapodát úgy választhatjuk adott n hosszú ω input esetén $\lceil\omega\rceil$ hossza $\alpha_T \cdot n$ legyen.

Ha T időigénye legfeljebb $t(n)$, akkor konfigurációk kódjának hossza $\beta_T \cdot t(n)$ legyen.

A továbbiakban n és a kódolási megállapodás mindig rögzített (ennek megfelelően a megfelelő kódok hossza mindig ismert).

További észrevétel

Észrevétel

$\lceil \kappa_i \rceil \to \lceil \kappa_i^+ \rceil = \lceil \kappa_{i+1} \rceil$ egyszerű hozzárendelés/függvény.

Az észrevétel állítása matematikailag nem pontos, az „egyszerű” jelző értelmezése nem jól definiált.

Azt mutatjuk, hogy egyszerűen meghatározható/kiszámolható egy kicsi (polinomiális méretű) hálózat, amely egy konfiguráció kódjából kiszámolja a rákövetkező konfiguráció kódját.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka $0, 1$ vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza. A nem inputcsúcsokra mint kapuk hívatkozunk. A kapuk halmaza $K = V(\overrightarrow{G}) - I$. Speciális csúcsot, esetleg csúcsokat nevezünk ki, amelyekre mint output csúcsok hívatkozunk.

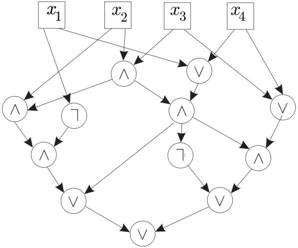
Legyen $\ell_I : I \to \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{0, 1\}$ egy címkézéese az output csúcsoknak. Legyen $\ell_K : K \to \{\neg, \vee, \wedge\}$ egy címkézése a kapuknak, amelyre teljesül, hogy egy kapunknak akkor és csak akkor $\neg$ a címkéje, ha befoka 1. Legyen $\ell = (\ell_I, \ell_K)$ az összes csúcsot címkéző függvény.

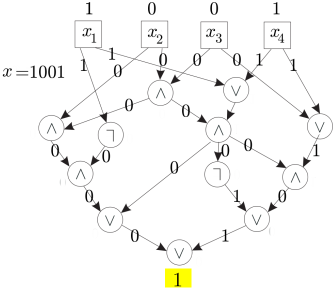
$(\overrightarrow{G}, \ell)$ címkézett irányított gráfot hálózatnak nevezzük.

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell

Egy hálózat kiszámol egy Boole-függvényt a következő módon: Az $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ változók egy kiértékelését kiterjesztjük a kapuk egy kiértékelésévé.

Feltesszük, hogy hálózatunkat úgy rajzoljuk le, hogy minden él lefelé haladjon. A kapuk kiértékelése fentről lefelé halad.





A hálózat mint egy dinamikus számítási modell (folytatás)

Ha egy kapuhoz jutunk, akkor azok a kapuk, ahonnan él vezet hozzá már kiértékeltek, azaz egy kiszámolt bitet rendeltünk hozzá.

Az aktuális kapu által kiszámolt bit az hozzá vezető éleken áramló bit és a kapu címkéje alapján természetesen értelmezhető. A hálózat által kiszámolt bitsorozat az otuput csúcs(ok) által kiszámolt bit(ek).

Definíció

Legyen $f_{\mathcal{C}}$ az a Boole-függvényt, amelyet a $\mathcal{C}$ hálózat a fenti módon kiszámol/megvalósít.

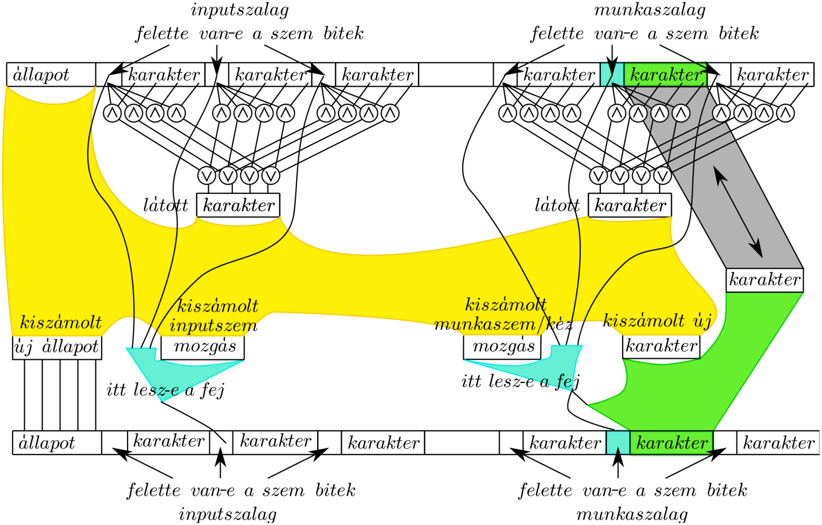
Az utolsó észrevétel „matematizálása”

2. Észrevétel

Egy konfigurációt kódoló bitsorozatból egy egyszerűen leírható, kicsi hálózat kiszámolja a rákövetkező konfiguráció kódját.

A konstrukciónk egyszerű, de sok esetlegességet, megállapodást követel. Egy formális leírás helyett egy példán szemléltetjük milyen ötletek vezethetnek el egy megoldáshoz.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” képen



Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Egy mezőnél a szem/kéz-ott-van-e bitet és a mező tartalmát kódoló bitek mindegyikét össze-és-eljük. A kapott bitsorozat vagy a csupa 0 (ha nincs ott a szem/kéz, mindent 0-val és-eltünk) vagy a látott karakter kódja (ha ott a szem/kéz).

Az inputszalag mezőinél így kapott bitsorozatok mindegyikének első, majd második és így tovább karakterét össze-vagy-olva kapjuk az inputszalagon látott karakter kódját. Hasonlóan számolhatunk a munkaszalagnál.

A sárga területben egy összetettebb számolás történik: konstans sok bitbből számolunk ki konstans sok bitet (a konstanok függnek a Turing-géptől). Konkrét kidolgozása az átmenetifüggvénytől függ. Ha nincs ötletünk az egyes bitek függését akár a nyilvánvaló DNF formula alapján írjuk fel. Ekkor is konstans sok kapuval dolgozva megoldjuk a feladatunkat.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van. Az átláthatóság kedvéért rajzoltuk fel csak egyszer az input- és egyszer A munkaszalaghoz.

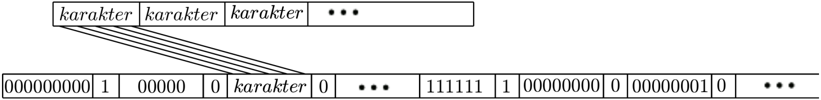
A zöld területen számoljuk ki a munkaszalag új tartalmát. Minden munkaszalag mezőhöz tartozik egy ilyen zöld blokk (egyszerűség kedvéért csak egyet tüntettünk fel). Az új karaktertől, a régitől és attól az információtól függ, hogy a fej ott áll-e. Ez a rész is könnyen megvalósítható lenne, ha tudnánk Γ elemeinek kódolásához használt bitek ℓ számát ismernénk. A zöld területen az $f(\epsilon, k_0, k_1) = k_\epsilon$ függvényt számoljuk ki, ami $1 + 2\ell$ bitből számol ki ℓ-et.

Észrevétel

3. Észrevétel

$\lceil\omega\rceil \to \lceil\kappa_0(\omega)\rceil$ egy egyszerű hozzárendelés/függvény.

Ez a korábbiaknál egyszerűbb észrevétel. Ismét egy ábrára utalunk.



Feltettük, hogy a START állapot kódja $00\ldots0$ (hossza $\lceil\log_2|S|\rceil$, példánkban 9).

Az inputszalagon $\triangleright$ kódja $00\ldots0$, a $\triangleleft$ kódja $11\ldots1$ (hosszaik $\lceil\log_2|\Sigma|\rceil$, példánkban 5).

Az munkaszalagon $\triangleright$ kódja $0\ldots00$, a szűzkarakter kódja $0\ldots01$, (hossza $\lceil\log_2|\Gamma|\rceil$, példánkban 8).

Eddigi eredményeink

Definíció

Legyen

$$\text{HÁLÓZAT-KIÉRTÉLÉS} = \{\lceil \mathcal{C}, \omega \rceil : \mathcal{C}(\omega) = 1\},$$

azaz az a döntési probléma, amely egy $\mathcal{C}$ hálózat és ω bitsorozat esetén eldönti, hogy az ω bitsorzatot adva az $x_1, x_2, \ldots$ inputkapuk értékeinek a hálózat az 1 bitet számolja-e ki (azaz kiértékeli $\mathcal{C}_n(\omega)$-t).

Tétel

HÁLÓZAT-KIÉRTÉLÉS $\mathcal{P}$-teljes (az $\mathcal{L}$ redukcióra nézve).

Bizonyítás

Legyen $L \in_T \mathcal{P}$. Legyen $t(n)$ egy polinom, T időkorlátja.

Feltehető, hogy T olyan, hogy ELFOGAD/ELVET állapot elérése után „tartja" állapotát. Így $\omega \in L$? kérdés megválaszolása ($\omega \in \Sigma^n$) ekvivalens annak megállapításával, hogy az ω- történő futás során a $\kappa_{t(n)}$ konfigurációban az állapot ELFOGAD-e.

Megállapodhatunk abban, hogy a konfigurációkat 0-1 sorozatokkal kódoljuk, hogy az állapotot kódoló blokkban az ELFOGAD állapot kódja a csupa 1 sorozat legyen.

A fentiek alapján bármi volt is $L \in_T \mathcal{P}$ $\omega \in \Sigma^n$ tetszőleges eleméhez felépíthető egy $\mathcal{T}_{T,\omega}$ hálózat, amely inputkapui ω-t kódolják (3. észrevétel) és bizonyos szintje a Turing-számítás konfiguráció-sorozatának elemeit kódolja (2. észrevétel).

Bizonyítás (folytatás)

$t(n)$ ilyen szint felépítése után az érdekel minket, hogy egy bizonyos blokkban csupa 1-es bit szerepel-e. Ezt ÉS kapuk segítségével könnyen kifejezhetjük.

Ezzel leírtuk a redukáló algoritmust. A redukció elméleti része a korábbiakból adódik. A konstrukció/redukció logtár-beli.

Hálózat kielégíthetőség és az első $\mathcal{N}P$-teljes tétel

Definíció

Legyen

$$\text{HÁLÓZAT-SAT} = \{\lceil \mathcal{C} \rceil : \text{ van olyan } \omega \text{ bitsorozat, amelyre } \mathcal{C}(\omega) = 1\},$$

azaz az a döntési probléma, amely egy $\mathcal{C}$ hálózat esetén el kell döntenünk, hogy kielégíthető-e.

Következmény

(i) Tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvre $L \prec_{\mathcal{L}} \text{HÁLÓZAT-SAT}$

(ii) HÁLÓZAT-SAT $\mathcal{NP}$-teljes

(iii) $\mathcal{P} = \mathcal{NP} \Leftrightarrow \text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{P}$

Bizonyítás (i)

$L \in_T \mathcal{NP}$, így egy tetszőleges $\omega \in L$ esetén létezik hozzá egy tanú: $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_{p(n)})$, amelyre $T(\omega, \tau)$ ELFOGAD állapotba jut. Azaz az előbb megkonstruált C hálózatra, $C(\lceil\omega\rceil, y_1, y_2, \ldots, y_{q(n)})$ az 1 értéket számolja ki, ha az y változók helyére a τ kódjának bitjeit írjuk.

Megfordítva is igaz. Ha $C(\lceil\omega\rceil, y_1, y_2, \ldots, y_{q(n)})$-nek találunk egy kielégítését, akkor egy tanú kódját találjuk.

Azaz $C(\lceil\omega\rceil, y_1, y_2, \ldots, y_{q(n)})$ kódjának legyártása (ami $\mathcal{L}$-ben megoldható) egy jó redukció.

Bizonyítás (ii)+(iii)

(ii) Az (i) részből és abból, hogy HÁLÓZAT-SAT$\in \mathcal{NP}$ (tanú egy kielégítő bemenet), következik, hogy HÁLÓZAT-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.

(iii) Mivel HÁLÓZAT-SAT $\in \mathcal{NP}$, így ha $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, akkor $\mathcal{P}$-beli is.

Viszafelé, ha HÁLÓZAT-SAT$\in \mathcal{P}$, akkor tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet redukáljunk HÁLÓZAT-SAT-ra, a redukált problémát $\mathcal{P}$-ben el tudjuk dönteni.

A két lépés együtt is polinomiális és az L nyelv eldöntési problémáját oldja meg. Ebből $L \in \mathcal{P}$ következik, így $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}$, tehát $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ adódik.

Szünet

Konjunktív normálforma (CNF)

Definíció

Legyen $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ egy változó halmaz. Legyen $L = V \dot{\cup} \overline{V}$ a literálok halmaza ($\overline{V}$ a negált változók halmaza, azaz $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$).

L egy részhalmazát klóznak nevezzük. Esetünkben a klózra úgy gondolunk, hogy a hozzá tartozó literálokat $\vee$ logikai művelettel, azaz diszjunkcióval kapcsoljuk össze.

Egy φ konjunktív normálformában lévő formula (CNF formula) klózok egy halmaza.

Erre a klózhalmazra úgy gondolunk, hogy a klózok $\wedge$ logikai művelettel, azaz konjukcióval kapcsoljuk össze.

Konjunktív normálforma (CNF)

Egy φ CNF formula kielégíthető, ha adható V egy kiértékelése (ami természetes módon kiterjeszthető L egy kiértékelésévé), amelyre minden klózban lesz igazzá kiértékelt literál.

$$\mathsf{SAT} = \{\lceil\varphi\rceil : \varphi \text{ kielégíthető CNF}\}$$

Azaz SAT az a probléma, ahol adott egy CNF formula és el kell döntenünk, hogy kielégíthető-e.

A Cook—Levin-tétel

Cook—Levin-tétel

SAT (CNF formula kielégíthetősége) $\mathcal{NP}$-teljes.

Egy $\mathcal{N}P$-teljes problémából egy másik

Könnyű látni, hogy SAT $\in \mathcal{NP}$.

Ha adnunk egy visszavezetést HÁLÓZAT-SAT-ról SAT-ra, akkor készen vagyunk: Az előző következmény (i) pontja és a polinomiális idejű redukció tranzitívitása alapján tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet vissza tudunk vezetni SAT-ra.

A fenti két lépés nagyon karakterisztikus miután megvan az első $\mathcal{N}P$-teljes problémánk.

Nem kell egész $\mathcal{N}P$ erejét megfogalmazni egy C nyelvvel. Elég egy $\mathcal{N}P$-teljes problémát megfogalmazni C segítségével.

A terv HÁLÓZAT-SAT $\preceq$ SAT bizonyítására

Belátjuk, hogy

HÁLÓZAT-SAT $\preceq$ BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT $\preceq$ SAT.

Definíció: Boole-egyenletrendszer

$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$ egyenletrendszert, Boole-egyenletrendszernek nevezzük, ha φ_i és ψ_i Boole-formulák. Az $\{x_i\}_{i=1}^n$ változók egy 0-1/igaz-hamis értékadás az egyenletrendszer megoldása, ha minden $i = 1, 2, \ldots, \ell$ esetén φ_i és ψ_i értéke ugyanaz.

Definíció

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT az a nyelv, ami a megoldható/kielégíthető Boole-egyenletrendszerek kódját tartalmazza.

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg.

Minden kapuhoz tartozik egy egyenlet

$x_g = \neg x_h$, ha a g kapu negáció kapu és a h kapuból kapja inputját ($\overrightarrow{hg}$ él a hálózatban).

$x_g = x_h \wedge x_{h'}$, ha a g kapu hálózatbeli címkéje konjunkció és inputjait h és h' kapukból kapja.

$x_g = x_h \vee x_{h'}$, ha a g kapu hálózatbeli címkéje diszjunkció és inputjait h és h' kapukból kapja.

$x_g = 1$, ha a g kapu a hálózat output kapuja.

HÁLÓZAT-SAT $\preceq$ BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT $\preceq$ bizonyítása

Ezzel megkaptuk egy Boole-egyenletrendszert a hálózatból.

Ha a hálózat 1-et számol ki egy értékadáson (az értékadás kielégíthetőséget bizonyít), akkor a kapuk által kiszámolt bitekkel együtt egy megoldását kapjuk az egyeneletrendszernek.

Fordítva is igaz, ha az egyenletrendszer megoldásából kiemeljük az eredeti input változók értékadásait, akkor ezen a hálózat 1-et számol ki (sőt minden kapu a hozzárendelt változó megoldásbeli értékét számolja ki).

Azaz a hálózatból legyártott egyenletrendszer megoldhatósága ekvivalens azzal, hogy a hálózat kielégíthető.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT $\preceq$ *SAT* bizonyítása

Az '$=$' jeleket '$\leftrightarrow$' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazzá teszi a hozzárendelt formulát.

A kapott logikai kifejezések mindegyike legfeljebb három változót tartalmaznak. Könnyű őket CNF formára hozni.

Ha az összes egyenletnek megfeleltetett CNF formulát 'és' logikai jellel összekapcsoljuk, szintén CNF formát kapunk.

Így az egyenletrendszerhez hozzárendeltünk egy φ CNF formulát.

A hozzárendelés $\mathcal{P}$-ben kiszámolható.

Az egyenletrendszer megoldhatósága ekvivalens a formula kielégíthetőségével.

Hol állunk, merre tartunk?

Eddig több bonyolultsági osztályra láttunk teljes problémákat ($\mathcal{NL}, \mathcal{P}, \mathcal{NP}$).

Az $\mathcal{NP}$ osztály esete azonban különbözik. Igen sok, első látásra teljesen különböző, fontosnak tartott problémákról derült ki, hogy $\mathcal{NP}$-teljesek.

Az osztály azért különösen fontos, mert a sejtett $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ összefüggés esetén ezek a problémákra nem létezik polinomiális idejű algoritmus. Azaz azt mondhatjuk rájuk, hogy elméleti sejtések miatt hatékonyan nem kezelhetőnek gondoljuk őket.

CNF 3 méretű klózokkal, legfeljebb három méretű klózokkal

Legyen $(=3)$-SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz. Legyen (≤ 3)-SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz legfeljebb 3 literált tartalmaz.

Lemma

$(=3)$-SAT $\preceq_{\mathcal{P}}$ (≤ 3)-SAT, továbbá (≤ 3)-SAT$\preceq_{\mathcal{P}}(=3)$-SAT.

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(=3)$-SAT probléma egy speciális esete (≤ 3)-SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3)-SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózok mérete három legyen.

Egy φ input 3 méretű klózait tartsuk meg, míg a kicsi klózaikkal az alábbi operációt végezzük el (párhuzamosan): Egy $C : \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ „kicsi" klózt helyettesítsünk a $\langle \ell_1, \ell_2, u \rangle$, $\langle \ell_1, \ell_2, \overline{u} \rangle$ klózpárral.

Természetesen formulánk kielegítése esetén C is igazzá válik, ami a C-t helyettesítő klózokat is igazzá teszi. Fordítva: A C-t helyettesítő klózpárt csak úgy tudjuk kielégíteni, ha az eredeti C-t is kielégítjük.

A fenti példában a kicsi klóz két literált tartalmazott. Ennél is kisebb klózokra is alkalmazható ötletünk. Eredménye: ekvivalens formula eggyel nagyobb klózokkal. Ötletünket iterálni kell.

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekkor a két probléma egyenértékű. A fenti tétel egy ekvivalenciát állít. Ez alapján a két probléma egyenértékű.

Ha a 3-SAT nyelvet említjük, akkor alatta a fenti két nyelv bármelyikét érthetjük. Természetesen, ha 3-SAT-ot redukáljuk, akor az input CNF-ről feltesszük, hogy minden klóza három literált tartalmaz. Ha 3-SAT-ra redukálunk, akkor nem zavar, ha a redukciós algoritmus háromnál kisebb klózokat is „gyárt”.

3-SAT

Tétel

3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.

3-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális (a SAT speciális esete).

SAT redukciója 3-SAT-ra

Emlékeztető: Mit is állítunk?

Egy SAT $\rightarrow$ 3-SAT: $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvény kell, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in$ SAT $\Leftrightarrow \mathcal{C}' \in$ 3-SAT.

A hozzárendelés a következő lesz: a $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klózra vezessünk be $u_1, \ldots, u_{k-1}$ új változókat és a következő klózokat vegyük fel $\mathcal{C}'$-be:

$$\langle \ell_1, \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \overline{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$$

Ezt minden $\mathcal{C}$-beli klózra végezzük el. Amit kapunk, az egy 3-CNF.

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

(i) $\mathcal{C}'$ meghatározható ($\mathcal{C}$ kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.

(ii) $\mathcal{C}$ pontosan akkor kielégíthető, ha $\mathcal{C}'$ az.

Ha $\mathcal{C}$ kielégíthető, akkor vegyük egy kielégíthető kiértékelését. $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén legyen ℓ_i a klózban az első igaz literál.

C a

$$\langle \ell_1, \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \overline{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$$

klózokat hozza be C'-be.

Ekkor ℓ_i értékeit megtartva, $u_1 = \ldots = u_{i-1} = h$ és $u_i = \ldots = u_{k-1} = i$ kiértékelés kielégíti a C-nek megfelelő klózokat.

Bizonyítás, a másik irány

$\mathcal{C}'$-nek nincs olyan kielégítő kiértékelése, amelyben valamely $\mathcal{C}$-beli $C = \langle \ell_1, \ldots, \ell_k \rangle$ klóz esetén $\ell_1 = \ldots = \ell_k = h$ lenne, mivel az

$$\langle \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \overline{u}_{k-1} \rangle \langle u_{k-1} \rangle$$

klózokat tartalmazó formula kielégíthetetlen.

k-SAT

Definíció: k-SAT

Legyen k-SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz legfeljebb k literált tartalmaz (k-CNF). Kielégíthető-e?

Megjegyzés

Nyilván igaz a következő redukciólánc:

$$2\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} 3\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} 4\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} \ldots \preceq_{\mathcal{P}} k\text{-}SAT \preceq_{\mathcal{P}} \ldots \preceq_{\mathcal{P}} SAT.$$

Megjegyzés

Egyszerűen látható, hogy 2-SAT $\in \mathcal{P}$. Sőt 2-SAT $\in co\mathcal{NL}$.

NEM-MIND-IGAZ-SAT

Definíció

V egy kiértékelése egy klózt homogénné tesz, ha a klóz minden literálja ugyanazt a logikai értéket kapja. Azaz a klóz akkor nem lesz honogén, ha igazzá értékelődik ki (lesz benne igaz értékű literál), de nem minden literál igaz értékű (lesz benne hamis literál is)

Legyen

$$\text{NEM-MIND-IGAZ-SAT} = \{\lceil\varphi\rceil : \varphi \text{ CNF, amely kielégíthető úgy, hogy ne legyen olyan klóz, amelyben minden literál igaz}\}$$

A tétel

Tétel

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális.

A bizonyítás befejezéséhez kell egy másik $\mathcal{NP}$-teljes problema és egy redukció. Ezt később ismertetjük.

Azonban ennek a tételnek egy következményét most ismertetjük.

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Legyen NEM-MIND-IGAZ-3-SAT azon CNF-ek halmaza, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz és van olyan kiértékelése a változóknak, hogy φ összes klóza nem homogén.

Következmény

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.

A bizonyítás NEM-MIND-IGAZ-SAT $\preceq$ NEM-MIND-IGAZ-3-SAT reduckió lesz.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\preceq$ NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Lemásoljuk a SAT $\preceq$ 3-SAT visszavezetést.

Ha egy NEM-MIND-IGAZ-SAT φ inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan $R(\varphi)$ CNF formulát kapunk, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz.

Tegyük fel, hogy $\varphi \in$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, azaz a változók alkalmas kiértékelésénél minden klózban lesz igaz és hamis literál is.

Tegyük fel, hogy C egy klóz és egy benne lévő ℓ_i literál igaz, míg ℓ_j literál hamis. Feltehetjük, hogy $i < j$.

Nézzük meg a redukció mit konstruál C-ből:

$$\langle \ell_1, \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \overline{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle.$$

A régi változók értékeit tartsuk meg, az alábbiakban leírjuk, hogy az új változók hogyan kapják értékeiket.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\preceq$ NEM-MIND-IGAZ-3-SAT (folytatás)

ℓ_i után jön egy új változó negáltja. Az új változónak igaz értéket adva az ℓ_i literál „kis” klózában lesz hamis és igaz érték is. Jobbra haladva a további új változóknak igaz értéket adva eljutunk ℓ_j „kis” klózához. Közben minden klózba kerül igaz és hamis érték is.

A szélső klózokban ugyanez elérhető, ha szélről középfelé haladunk és így osztjuk ki az új változók értékeit a hiányzó logikai értéket pótolva.

Összegezve kaptuk, hogy

$$R(\varphi) \in \text{NEM-MIND-IGAZ-3-SAT}.$$

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\preceq$ NEM-MIND-IGAZ-3-SAT (folytatás)

Fordítva tegyük fel, hogy $R(\varphi) \in$NEM-MIND-IGAZ-3-SAT. Láttuk, hogy egy kiértékelés, amely minden $R(\varphi)$ klózt kielégít (ilyen egy nem-mind-igaz kiértékelés) akkor elképzelhetetlen, hogy az eredeti klózok ne tartalmazzanak igaz értéket.

Azt kell csak kizárnunk, hogy $R(\varphi)$ egy nem-mind-igaz kiértékelése az eredeti változókra megszorítva egy eredeti klóz mindegyik literálját igazzá tegye.

Ez azt jelentené, hogy a

$$\langle \overline{u}_1 \rangle, \langle u_1, \overline{u}_2 \rangle, \ldots, \langle u_{i-1}, \overline{u}_i \rangle, \ldots, \langle u_{k-2}, \overline{u}_{k-1} \rangle \langle u_{k-1} \rangle$$

klózok mindegyikébe lenniek kell hamis értéknek. Ez (mint korábban) lehetetlen.

Szünet

Színezési problémák

Definíció

k-SZÍNEZHETŐSÉG a következő probléma: adott egy gráf, kiszínezhető-e k színnel?

Tétel

3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-teljes.

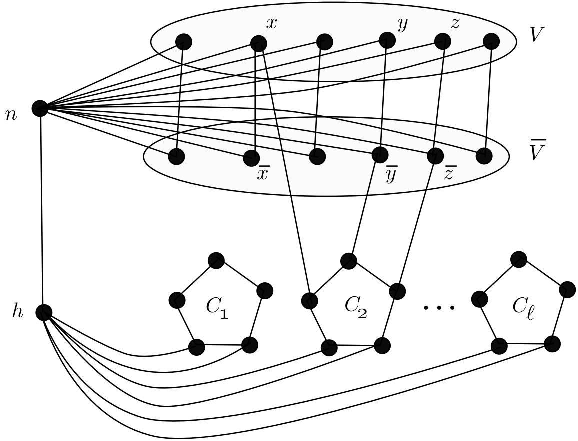
3-SZÍNEZHETŐSÉG $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

3-SAT $\preceq$ 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció

$\mathcal{C}$ 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai n, h, $\mathcal{C}$ változói, azok negáltjai, és minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 csúcsötös. Ha $\mathcal{C}$ változói száma n és m darab 3 literált tartalmazó klózból áll, akkor a G gráf csúcsainak száma $2 + 2n + 5m$.

$G_{\mathcal{C}}$ élei a következők lesznek: nh, minden x_i változóra $x_i\overline{x_i}$, nx_i és $n\overline{x_i}$, illetve minden $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ klózra C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_1, C_1z_1, C_2z_2, C_3z_3, C_4h, C_5h.

3-SAT $\preceq$ 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció képen



3-SAT $\preceq$ 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció szóban

Könnyű ellenőrizni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható, és pontosan akkor 3-színezhető, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető (felhasználva azt az észrevételt, hogy z_1, z_2, z_3, h 3-színezése pontosan akkor terjeszthető ki $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ klózhoz tartozó ötszögre jó színezésként, ha a 4 csúcs színe nem azonos).

További színezési problémák

Megjegyzés

Könnyen ellenőrizhető, hogy 2-SZÍNEZHETŐSÉG $\in co\mathcal{N}\mathcal{L}$.

Tétel

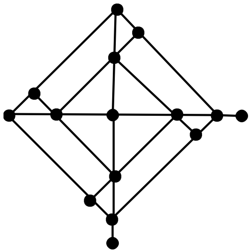
SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{N}\mathcal{P}$-teljes.

$\mathcal{N}\mathcal{P}$-beliség triviális.

A bizonyítás

SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG $\mathcal{NP}$-nehéz:
3-SZÍNEZHETŐSÉG-et vezetjük rá vissza.

Lerajzolás után a kereszteződő éleket kell helyettesíteni az alábbi kis gráffal:



Azt kell meggondolni, hogy megtehetők a helyettesítések úgy, hogy nem hoznak be új metszéseket, és a keletkezett gráf pontosan akkor 3-színezhető, ha az eredeti is.

Még további színezési problémák

Észrevétel

A 2-színezhetőség $co\mathcal{NL}$-beli.

Észrevétel (Appel, Haken 1977)

SÍKGRÁF-4-SZÍNEZHETŐSÉG triviális.

Definíció

SZÍNEZÉSI-PROBLÉMA: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-nek jó k-színezése?

Tétel

SZÍNEZÉSI-PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-teljes.

Bizonyítás

SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

A SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\mathcal{NP}$-nehéz, mivel a 3-SZÍNEZHETŐSÉG általánosítása.

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ

Definíció

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k-elemű független csúcshalmaz?

Tétel

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljes.

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\in \mathcal{NP}$: tanú egy független csúcshalmaz.

Bizonyítás I

SAT visszavezetése:
$\mathcal{C} = (C_1 = \langle z_{1,1}, \ldots, z_{1,r_1} \rangle, \ldots, C_k = \langle z_{k,1}, \ldots, z_{k,r_k} \rangle) \mapsto (G_{\mathcal{C}}, k)$
((i, j) jelentése: i-edik klóz j-edik literálja),
$V(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j) : i \leq k, j \leq r_i\}$,
$E(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j), (i', j') : i = i' \text{ vagy } z_{i,j} = \overline{z}_{i',j'}\}$.

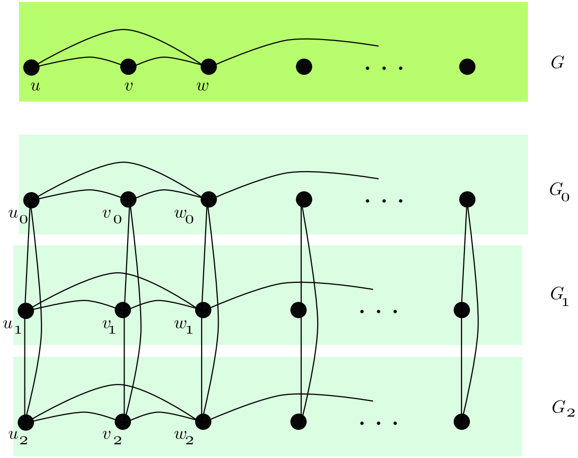
Könnyű meggondolni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható és pontosan akkor van benne k elemű független halmaz, ha $\mathcal{C}$ kielégíthető.

Egy kiértékelés akkor kielégítő, ha minden klózból ki tudunk választani egy igaz literált (az élek garantálják, hogy változó és negáltja egyszerre ne szerepeljenek, illetve minden klózból legfeljebb egy literált válasszunk).

Bizonyítás II

SZÍNEZÉSI PROBLÉMA visszavezetése: $G \mapsto (G', |V(G)|)$, ahol $V(G') = \{(v, i) : v \in V(G), i \in [3]\}$ (itt (v, i) jelentése az, hogy v az i színt kapja),
$E(G') = \{(v, i)(v', i') : v = v', i \neq i' \text{ vagy } vv' \in E(G), i = i'\}$ (vagyis: élek a tiltások, tiltott, hogy egy csúcs több színt kapjon vagy összekötött csúcsok azonos színt kapjanak).

Bizonyítás II képen



Bizonyítás II szóban

Könnyű meggondolni, hogy G' és $|V(G)|$ is polinom időben meghatározható, és pontosan akkor van G'-ben $|V(G)|$ elemű független halmaz, ha G gráf 3-színezhető.

Megjegyzés

Megjegyzés

Szemben a SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁval, ha k nem az input része, hanem konstans, akkor az így kapott k-FÜGGETLEN HALMAZ probléma már polinom időben megoldható (egy n csúcsú gráfnak n-ben polinomiális sok k-elemű részhalmaza van, ha k fix).

KLIKK, LEFOGÓ-PONTHALMAZ

Definíció

KLIKK probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k méretű klikk?

Definíció

LEFOGÓ-PONTHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben k-elemű lefogó ponthalmaz?

Következmény

KLIKK és LEFOGÓ-PONTHALMAZ $\mathcal{NP}$-teljesek.

Ekvivalensek a FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ problémával.

HAMILTON

Definíció

HAMILTON, azon gráfok kódjait tartalmazó nyelv, amelyek Hamilton-körrel rendelkeznek.

A HAMILTON nyelv döntési feladat azt jelenti, hogy adott gráfról el kell döntenünk, hogy rendelkezik-e Hamilton körrel.

Tétel

HAMILTON $\mathcal{NP}$-teljes.

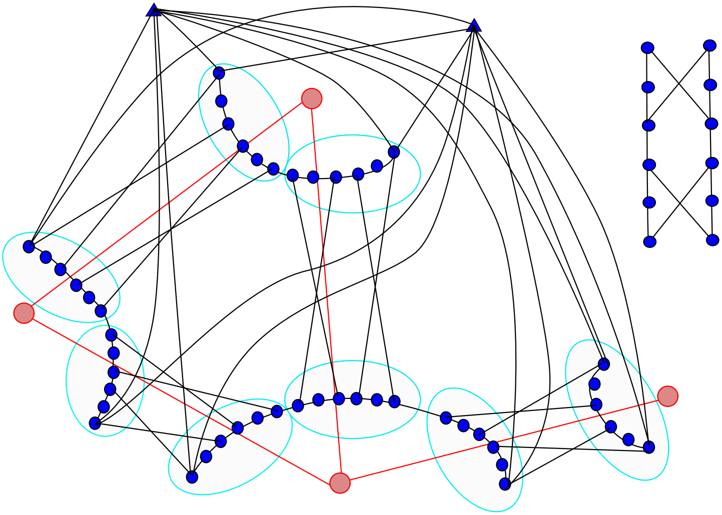
HAMILTON$\in \mathcal{NP}$ nyilvánvaló.

Az állítás kibontva

Belátjuk, hogy LEFOGÓ-PONTHALMAZ visszavezethető HAMILTON-ra. Azaz, ha adott egy G gráf és $k \in \mathbb{N}$, akkor hatékonyan definiálhatunk egy R gráfot, amely pontosan akkor rendelkezik Hamilton-körrel, ha G lefogható k csúccsal.

A redukciót egy példával/ábrával demonstráljuk. Az általános, formális leírás könnyen kiolvasható az ábrából, ezt az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Bizonyítás képen: G piros, $k = 2$, R kék



A kép szóban

Minden G-beli csúcsnak megfelel egy-egy út, amelyekben hatos blokkokban (világos kék ellipszisekkel bekerítettek) szerepelnek csúcsok (kék, kerek csúcsok).

Egy csúcsnak megfelelő úton annyi blokk van, ahány él illeszkedik a csúcsra. A blokkok és a csúcs-él illeszkedések azonosítottak.

Így minden élnek megfelel két hatos csúcs-blokk, amely a jobb oldalon szemléltetett módon összekötöttünk.

$k = 2$ érték alapján $k = 2$ új csúcsot is felvettünk (kék, háromszög alakú csúcsok).

Ezeket pontosan az összes csúcshoz rendelt utak két-két végpontjával kötjük össze.

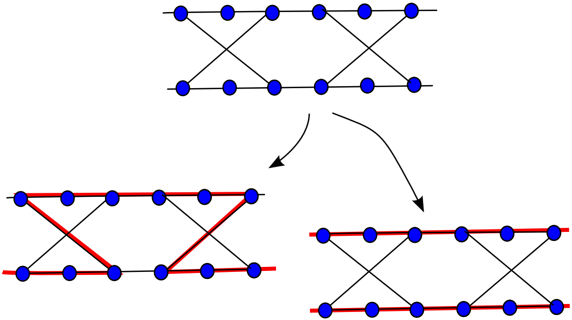
A bizonyítás

Tegyük fel, hogy ebben a gráfban van Hamilton-kör. Ekkor ezt a k háromszög alakú csúcs k darab ívre szakítja szét.

Az ívek egy-egy út végpontjában kezdődnek, végződnek.

Könnyű ellenőrizni, hogy egy élnek megfelelő két hatos blokkot ezek az ívek csak kétféleképpen szelhetik át.

Az átszelés képem



(Bal) Az átszelés egy íven történik. Egy csúcs útján haladunk, de egy kitérővel az él másik blokkját is bejárjuk. (Jobb) Az átszelés két külön részben történik és mindegyik egy-egy csúcs útján történik.

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Így a k háromszög alakú csúcs kiválaszt k csúcsot. Az erre a csúcsra illeszkedő élek mindegyik egy-egy lehetséges kitérőt engedélyez.

Ezeket a kitérőket úgy kell megszerveznünk, hogy az összes többi csúcs útja, illetve ezek blokkjai is be legyenek kjárva.

Könnyen látható, hogy ez csak akkor szervezhető meg, ha a kijelölt k csúcs lefogó csúcshalmazt alkot. Tehát Hamilton-kör létezése bizonyítja a k csúccsal lefoghatóságot.

Gondolatmenetünk könnyen megfordítható.

Ez bizonyítja a redukció elméleti részét. A technikai apróságok (implementáció polinomialis időben) részletezését elhagyjuk.

MAX-CUT

Egy gráf vágása csúcsainak két diszjunkt részre bontása. A vágás élhalmaza azon éleket tartalmazza, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részbe esik.

Definíció

MAX-CUT probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G-ben olyan vágás, amely legalább k élű?

Tétel

MAX-CUT $\mathcal{NP}$-teljes.

MAX-CUT $\in \mathcal{NP}$: tanú egy piros/kék színezés, polinom időben kiszámolható az élszáma, amit k-val összehasonlíthatunk.

Bizonyítás

MAX-CUT $\mathcal{NP}$-nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza.

$\mathcal{C}$ 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai $\mathcal{C}$ változói és azok negáltjai (a literálok).

Minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a benne szereplő három literált páronként összekötjük. (Ezekre az élekre mint klóz-élekre hivatkozunk.) Minden klózchoz három klóz-él tartozik. Ha két literál több klózban is együtt szerepel, akkor többszörös élek lesznek a redukció által megkonstruált gráfban.

Minden x változóra x és $\overline{x}$ közé is behúzunk egy élt. (Ezekre az élekre mint változó-élekre hivatkozunk.) Ezzel leírtuk a $G_{\mathcal{C}}$ gráf összes élét.

Bizonyítás (folytatás)

Könnyű ellenőrizni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható,

Továbbá pontosan akkor van benne $|V| + 2|\mathcal{C}|$ élű vágás, ha van olyan kiértékelése a változóinknak, hogy $\mathcal{C}$ minden klóza nem-homogén.

Valóban, $G_{\mathcal{C}}$ minden vágása lefeljebb (az összes) $|V|$ literál-élet és minden klóz három klózéléből legfeljebb 2-t tartalmaz. Azaz $|V| + 2|\mathcal{C}|$ egy felső becslés $G_{\mathcal{C}}$ tetszőleges vágásának élszámára.

Ha egy (I, H) vágás eléri ezt a felső becslést, akkor minden literálélet tartalmaz, azaz minden x változóra x és $\overline{x}$ közül egyik I-be, másik H-ba esik. Azaz a vágás definiál egy kiértékelését a változóinknak.

Továbbá minden klóz három klózéléből kettőt tartalmaz a vágás, azaz a leírt kiértékelés nem-mind-igaz módon ielégíti (a tetszőlegesen választott) klózt $\mathcal{C}$-ből.

CUT megjegyzések

Megjegyzés

A MIN-CUT probléma annak tesztelését kéri, hogy van-e olyan vágás, amely élszáma k-nál nem nagyobb. Ez a probléma polinom időben megoldható. A folyamok elmélete alapján a legkisebb vágás élhalmaza meghatározható.

Szintén megjegyezzük, hogy a redukciónk olyan gráfot készített, amely optimális vágása két egyenlő osztályra történt/felezés volt. Így a MAX-FELEZÉS problémáról is adódott, hogy $\mathcal{NP}$-teljes. Az egyszerű komplementálás mutatja, hogy a MAX-FELEZÉS és MIN-FELEZÉS problémák (polinomiális időre nézve) ekvivalensek. Speciálisan a MIN-FELEZÉS problémáról is kapjuk, hogy $\mathcal{NP}$-teljes.

Szünet

Halmazrendszerek

Definíció: Egyszerű halmazrendszer

$\mathcal{H}$ egyszerű halmazrendszer a V halmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. $\mathcal{H}$ elemei a halmazrendszer élei.

k-uniform halmazrendszer olyan halmazrendszer, amely összes éle k elemű. Tehát az egyszerű gráfok pontosan a 2-uninform halmazrendszerek.

Definíció: Halmazrendszer

$(V, \mathcal{E}, I)$ egy halmazrendszer, ha $I \subset V \times \mathcal{E}$ egy illeszkedési reláció a V csúcshalmaz és $\mathcal{E}$ élhalmaz között.

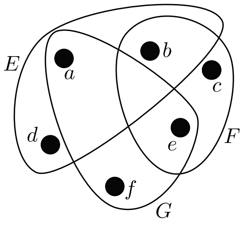
Minden $E \in \mathcal{E}$-hez tartozik egy $\{v \in V : vIE\}$ részhalmaza V-nek

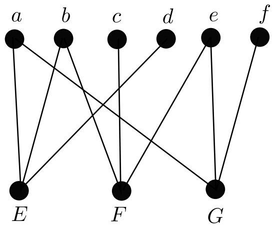
Halmazrendszerek alternatív leírásai

Észrevétel

V feletti $\mathcal{H}$ halmazrendszer könnyen leírható B páros gráffal. A két színosztály V (felső pontok) és $\mathcal{H}$ (alsó pontok). Az alaphalmaz egy v eleme/csúcs akkor és csak akkor van összekötve $\mathcal{H}$ egy E elemével/éllel, ha $v \in E$.

A halmazrendszert lehet kódolni pont-él illeszkedési mátrixszal. Ez egy $n \times m$ méretű 0-1 mátrix, ahol $n = |V|$ és $m = |\mathcal{H}|$.





$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN

Definíció

A gráfelmélet független csúcshalmazának fogalmát kétféleképpen terjeszthetjük ki halmazrendszerekre:

I független, ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $E \not\subseteq I$.

I független*: ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $|E \cap I| \leq 1$.

Definíció

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$\{\lceil V, \mathcal{H}, k \rceil$: van olyan I független csúcshalmaz, hogy $|I| = k\}$.

FGTLEN*-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$\{\lceil V, \mathcal{H}, k \rceil$: van olyan I független* csúcshalmaz, hogy $|I| = k\}$.

Halmazrendszerek nehezebbek mint a gráfok

Tétel

(i) FGTLEN-CSÚCSOK $\preceq$ FGTLEN-CSÚCSOK-HRSZBEN,

(ii) FGTLEN-CSÚCSOK $\preceq$ FGTLEN*-CSÚCSOK-HRSZBEN.

Valóban, a gráfelméleti probléma gráfja a halmazrendszerek egy speciális esete. A gráfelméleti függetlenség mindkét halmazrendszeres függetlenség fogalom speciális esete.

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

Definíció

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN =

$$\{\lceil V, \mathcal{H}, k\rceil : \mathcal{H}\text{-ban van } k \text{ él, amelyek páronként diszjuntak}\}.$$

Megjegyzés: FGTLEN-ÉLEK-GRÁFOKBAN probléma, másképpen PÁROSÍTÁS $= \{\lceil G, k\rceil : \nu(G) \geq k\}$. Az Edmonds-algoritmus alapján ez egy $\mathcal{P}$-beli probléma. Azaz a gráfokra vonatkozó eset könnyen kezelhető.

Tétel

FGTLEN*-CSÚCSOK-HRSZBEN $\preceq$ FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

Halmazrendszerek: dualitás

A páros gráf kódoláson alapulva könnyű leírni a független* halmazokat. Ezeknek B-ben felső pontok egy olyan I halmaza tartozik, amelyekre nem illeszkedik V-alak, azaz olyan $a \in A, f, f' \in I \subset F$ ponthármas, ahol a összekötött f és f'-vel.

Definíció

Legyen B egy halmazrendszert leíró páros gráf. Az alsó/felső szerepek felcserélésével a B^* páros gráfot kapunk. Ez a B^* „elolvasható halmazrendszerként" visszaalakítva halmazrendszerré a $V^* = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}^* = V$ duális halmazrendszert kapunk.

Bizonyítás

$V, \mathcal{H}, k$-ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartsuk meg: $V^*, \mathcal{H}^*, k$.

Azt kell eldöntenünk, hogy az erdeti halmazrendszert leíró B páros gráfban van-e k felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá $\vee$ alak.

$V^*, \mathcal{H}^*$ páros gráfja éppen a fejetetejére állított B. Azaz az eredeti döntési feladat ekvivalens azzal, hogy fejrefordított B gráfban van-e k alsó csúcs (k darab él), hogy ne támaszkodjon rá $\wedge$, azaz páronként diszjunktak legyenek. Azaz FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN problémát kell megoldani $V^*, \mathcal{H}^*, k$ esetén.

Azaz a kiinduló transzformáció a tételt igazoló redukció.

PARKETTÁZÁS

Definíció

$$\text{PARKETTÁZÁS} = \{\lceil V, \mathcal{H} \rceil : \text{ léteznek } E_1, \ldots, E_k \text{ páronként diszjunkt élek, hogy } \dot\cup E_i = V\}$$

Tétel

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN$\preceq$PARKETTÁZÁS.

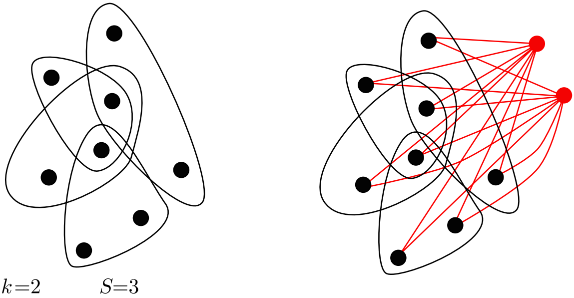
A redukció

Legyen $V, \mathcal{H}, k$ az input. Legyen S a maximális élméret paraméter. El kell dönteni, hogy van-e k db diszjunkt él.

A konstrukciót több lépésben végezzük el. Először $\mathcal{H}$-t úgy transzformáljuk, hogy uniform legyen: Minden E élhez $S - |E|$ sok új pontot veszünk fel (különböző élekhez különböző új pontokat használunk). A módosított halmazrendszerre vonatkozó probléma nyilván ekvivalens a kiinduló problémával.

A konstrukció második lépésében már feltesszük, hogy $\mathcal{H}$ egy S-uniform halmazrendszer. Ebben a lépésben $V(H)$-hoz hozzáveszünk $|V(H)| - k \cdot S$ darab új csúcsot (legyen $\widetilde{V}$ a kapott ponthalmaz), $\widetilde{\mathcal{H}}$ elemei pedig $\mathcal{H}$ elemei és minden régi-új csúcspárra egy-egy őket tartalmazó kételemű halmaz.

A redukció képen



A második lépés redukciója: $|V| - kS = 8 - 2 \cdot 3 = 2$. A két új pont és a hozzájuk tartozó gráfélek a jobb oldalon szerepelnek pirosban.

A redukció szóban

Észrevétel

$(\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{H}})$ parkettázásához le kell fedni a $|V| - kS$ darab új csúcsot, ami csak a $|V| - kS$ darab új csúcskettőssel lehet. A maradék parkettázó élek csak régi élek lehetnek, amelyek kS csúcsot fednek le. Azaz a parkettázás ad k független élt $\mathcal{H}$-ban.

Az észrevétel gondolatmenetének megfordítása teszi teljessé a bizonyítás elméleti részét.

Párosítások: A 3-uniform halmazrendszerek esete

Definíció: 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Adott egy 3-uniform halmazrendszer. Van-e olyan részhalmaza, ami az alaphalmaz partíciója?

Definíció: TELJES-HÁRMASÍTÁS

Adott három k méretű A, B, C halmaz és ezek transzverzálisaiból álló $\mathcal{H}$ 3-uniform halmazrendszer ($\mathcal{H} \subset A \times B \times C$). Van-e a halmazrendszerben k páronként diszjunkt él?

Tétel

3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ és TELJES-HÁRMASÍTÁS is $\mathcal{NP}$-teljes.

3-SAT $\preceq$ TELJES-HÁRMASÍTÁS $\preceq$ 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n-szer szerepel benne. $A \cup B$-ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x-hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \ldots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\overline{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\overline{x}}\}, \ldots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\overline{x}}\}\},$$

Ígéret: *Az a_i, b_i csúcsok csak a hármasokban lesznek benne.* Így ha van teljes hármasítás, akkor az vagy X vagy $\overline{X}$ a hármasítás része. Speciálisan vagy az összes c_i^x vagy az összes $c_i^{\overline{x}}$ marad hármasítatlanul. A párosítatlanul hagyott c_i-k felső indexét igaznak értékelt literálnak tekinthetjük. Minden változóra diszjunkt csúcshalmazokkal definiáljuk a fenti hármasrendszert. Ha van hármasítás, akkor egy értékelését írja le a változóknak.

3-SAT $\preceq$ TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ, 3-SAT input egy klóza.

Vezessünk be egy a_C, b_C csúcsot és válasszunk egy eddig más klózhoz nem választott c_i csúcsot z_1 felső indexszel. A C-beli másik két literálra is tegyük meg ezt.

Ezzel a C klózhoz bevezettünk két új csúcsot és három új hármast. Ezt minden klózra megismételjük.

Ha az eddig definiált hármasokban találunk egy hármasítást, amely minden a-csúcsot és b-csúcsot lefed, akkor φ kielégíthető A gondolatmenet megfordítható.

3-SAT $\preceq$ TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasrendszerben az a-csúcsok és b-csúcsok száma ugyanaz. Ha a c-csúcsok száma több, akkor adjunk új a-csúcsokat és b-csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c-csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c-csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

Ha új a-csúcsokat és b-csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor ezeket az összes lehetséges módon egészítsúk ki hármasokká a c-csúcsokkal.

Ha új c-csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor fomrulánk biztos nem kielégíthatő. Az új csúcsokat hagyjuk izoláltnak.

A kapott 3-uniform kiegyensúlyozott háromrészes halmazrendszer a redukció végeredménye. A redukció bizonyítja a tételt. Az ehhez szükséges állítások könnyen ellenőrizhetők.

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE

Definíció

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei k színnel, hogy semelyik H-beli halmaz ne legyen monokromatikus?

Tétel

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE $\mathcal{NP}$-teljes.

A gráfelméleti színezési probléma általánosítása.

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE

Emlékeztető: Gráfok esetén a 2-színezhetőség esete könnyen kezelhető volt.

Definíció

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE: Adott egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer. Döntsük el: kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei 2 színnel úgy, hogy semelyik H-beli halmaz ne legyen monokromatikus.

Tétel

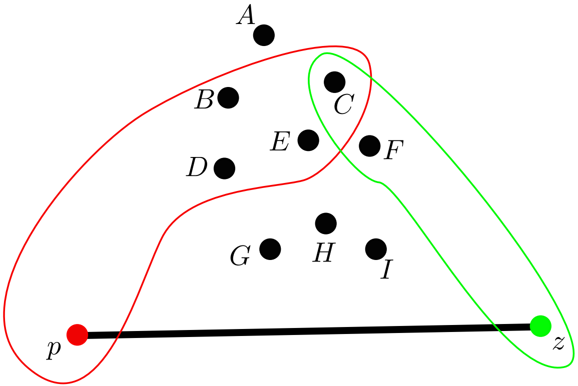
PARKETTÁZÁS $\preceq$ HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE.

A redukció

Adott egy $V, \mathcal{H}$ input a parkettázás problémához.

Konstrukció: $\widetilde{V} = \mathcal{H} \cup \{p, z\}$. $\widetilde{H}$-hoz minden E, F metsző $\mathcal{H}$-beli élpárra legyen $Z_{E,F} = \{E, F, z\}$ egy él. Minden $v \in V$ esetén legyen $R_v = \{E : v \in E \in \mathcal{H}\} \cup \{p\}$ egy $\widetilde{\mathcal{H}}$-beli él. Továbbá legyen $\{p, z\}$ is egy $\widetilde{\mathcal{H}}$-beli él.

A redukció képen



$A, B, C, \ldots, H, I$ pontosan a halmazrendszerünk élei. B, C, D, E pontosan az a elemet tartalamzó élek. C és F élek metszőek. A fenti információkból kiolvasható éleket rajzoltuk be az ábrába, amely a redukció megfelelő töredékét tartalmazza.

A redukció szóban

Észrevétel

$\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{H}}$ egy 2-színezése esetén legyen p színe piros, z színe zöld (a $\{p, z\}$ él kényszerít a teljes paletta használatára). Az eredeti éleknek megfelelő csúcsok közül a zöld szín kijelöl egy élhalmazt. Ezek parkettázzák az eredti halmazrendszert.

Valóban, köztük két metsző él egy $Z_{E,F}$ típusú zöld-homogén élhez vezetne a redukció eredményében. Míg egy lefedetlen v csúcs (az eredeti halmazrendszerben) adna egy R_v piros-homogén élt.

A gondolatmenet megfordítható, a bizonyítás teljes.

Vissza a NEM-MIND-IGAZ-SAT problémához

Most jegyezzük meg, hogy a HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE$\preceq_{\mathcal{P}}$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, így kapjuk a hiányzó $\mathcal{NP}$-teljességet: NEM-MIND-IGAZ-SAT is $\mathcal{NP}$-teljes.

A halmazrendszer alaphalmazát azonosítsuk egy V változó halmazzal.

Minden él a benne szereplő változók halmazaként klózként, az egeász halmazrendszer egy CNF-ként értelmezhető.

Egy értékadás a változóknak egy piros/kék színezésként is leírható.

Ez pontosan akkor lesz NEM-MIND-IGAZ-SAT értékadás ha színezésként értelmezve jól 2-színezi a definiált halmazrendszert.

Szünet

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

Definíció: DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

Adott egy $Ax \leq b$ egész együtthatós lineáris egyenlőtlenségrenszer. Van-e megoldása egész számokban?

Tétel

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER $\mathcal{NP}$-teljes.

$\mathcal{NP}$-beliségre tanú egy megoldás.

SAT $\preceq$ DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

Adott egy konjunktív normálforma.

Minden x_i változóra bevezetjük a $0 \leq x_i \leq 1$ egyenlőtlenséget.

Minden $\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$ klózra a $t_1 + \ldots + t_k \geq 1$ egyenlőtlenséget, ahol $t_i = x_j$, ha $z_i = x_j$ és $t_i = 1 - x_j$, ha $z_i = \overline{x}_j$.

Könnyű látni, hogy az így kapott egyenlőtlenségrendszer polinom időben megkonstruálható.

Könnyű látni, hogy az így kapott egyenlőtlenségrendszer pontosan akkor megoldható, ha a konjunktív normálforma kielégíthető.

RÉSZLETÖSSZEG

Definíció

RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{\lceil A, b \rceil : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A,$$
$$\text{hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

A feladat egy egyszerű értelmezése: A a pénztárcánkban lévő érmék értékeit összegyűjtő halmaz . A, b kódja akkor tartozik az elfogadandó nyelvhez, ha b összeget pontosan ki tudunk fizetni a pénztárcánkból.

Tétel

RÉSZLETÖSSZEG $\mathcal{NP}$-teljes.

RÉSZLETÖSSZEG nyilván $\mathcal{NP}$-beli.

PARKETTÁZÁS $\preceq$ RÉSZLETÖSSZEG

Legyen $V, \mathcal{H}$ a PARKETTÁZÁS egy inputja. Ki lehet-e választani olyan parkettahalmazt/élhalmazt, amivel ki lehet parkettázni a V-t/padlót?

Konstrukció: Legyen $w : V \to \{1, a, a^2, \ldots, a^{|V|-1}\}$ tetszőleges bijekció. Az értékkészletre gondoljunk mint az a alapú számrendszer helyiértékei.

Legyen $E \in \mathcal{H}$ esetén $a_E = \sum_{v:v\in E} w(v)$. Legyen $A = \{a_E : E \in \mathcal{H}\}$ és $b = 11\ldots1_a = \sum_{v:v\in V} w(v)$. Ezzel leírtuk a részletösszeg probléma egy inputját.

Bizonyítás

Észrevétel

Ha a értékét $|\mathcal{H}| + 1$-nek választjuk, akkor $a_i \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az a alapú számrendszerben maradék továbbvitele nékül kiszámolható.

Az észrevétel egyből adja, hogy a csupa 1-es számjegyből álló szám előállítása mint részletösszeg ekvivalens az eredeti halmazrendszerre vonatkozó PARKETTÁZÁS feladattal (alkalmasan nagy a esetén).

A redukció során előforduló legnagyobb szám $S = \sum_{i=0}^{|V|-1} a^i = \frac{a^{|V|}-1}{a-1} < a^{|V|}$. Kódjának hossza $|V| \log a = |V| \log(|\mathcal{H}| + 1)$. Redukciónk polinomiális.

HÁTIZSÁK

Definíció

HÁTIZSÁK: Adott tárgyak T halmaza. Minden $t \in T$ tárgyhoz tartozik egy V_t térfogat és egy v_t érték ($v_t, V_t \in \mathbb{N}$). Adott egy hátizsák, amelybe legfeljebb H össztérfogatú tárgyakat pakolhatunk. Továbbá adott egy L értékhatár. ($H, L \in \mathbb{N}$.) Kiválasztható-e T egy részhalmaza úgy, hogy elférjen a hátizsákban és összértéke legalább L legyen?

Tétel

HÁTIZSÁK $\mathcal{N}P$-teljes.

A probléma $\mathcal{N}P$-belisége nyilvánvaló.

RÉSZLETÖSSZEG $\preceq$ HÁTIZSÁK

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Minden $a \in A$ számhoz vegyünk egy tárgyat amely térfogata és értéke is a.

Hátizsákunk térfogata legyen b.

Az értékhatár is legyen b.

Nyilván tárgyaink/számaink egy részhalmaza akkor fér a hátizsákba és egyben éri el az értékhatárt, ha az összegük éppen b.

FELEZÉS

Definíció: FELEZÉS

Adott egész számok A halmaza. Ketté lehet-e osztani számainkat, hogy a két rész összege ugyanaz legyen? El lehet-e felezni A-t?

Tétel

FELEZÉS $\mathcal{N}P$-teljes.

FELEZÉS nyilván $\mathcal{N}P$-beli.

RÉSZLETÖSSZEG $\preceq$ FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A-beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.
Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A-beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.
Legyen $\widehat{A}$ a kibővített számhalmaz.

Ha $\widehat{A}$ elfelezhető, akkor mindkét félben az összeg $S - b$. Az egyik fél csak A-beli számokat tartalmaz. Ezen fél A-ra vonatkozó komplementerében az összeg b, a célszám.

Fordítva: Ha b előáll részletösszegként, akkor a tagokhoz $S - 2b$-t hozzáadva megfeleztük $\widehat{A}$-t.

LÁDAPAKOLÁS

Definíció

LÁDAPAKOLÁS: adott egész számok A halmaza, egy b és egy c egész szám. Meg lehet-e adni A egy legfeljebb b osztályú partícióját, amelyben minden osztály összege legfeljebb c?

A probléma értelmezése: Az A halmaz tárgyakat térfogatát írja le. Adott b darab láda, amelyek mindegyikébe c össztérfogat fér el. El tudjuk-e pakolni tárgyainkat a ládákba?

Tétel

LÁDAPAKOLÁS $\mathcal{NP}$-teljes.

LÁDAPAKOLÁS nyilván $\mathcal{NP}$-beli.

FELEZÉS $\preceq$ LÁDAPAKOLÁS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$ a FELEZÉS probléma egy inputja.

Legyen S az A-beli számok összege.

Vizsgáljuk az A, $b = 2$, $c = S/2$ LÁDAPAKOLÁSI problémát.

A pakolás akkor és csak akkor oldható meg, ha A elfelezhető.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!