Javított folyamok algoritmusok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Reziduális hálózat

Egy folyam reziduális hálózata: $\mathcal{R}$

Legyen $\mathcal{H}$ egy hálózat ($\overrightarrow{G}$ jelölje $\mathcal{H}$ gráfját, s a forrás, t a nyelő, c a kapacitásfüggvény) és benne egy f folyam.

$\mathcal{R}$ forrás és nyelője ugyanaz mint $\mathcal{H}$-ban. A $\mathcal{R}$ gráfja legyen $\overrightarrow{G}_r$. Ennek csúcshalmaza $V(\overrightarrow{G})$, a forrás/nyelő pár ugyanaz, s/t. $\overrightarrow{G}_r$ éleit és kapacitásait a követekezőképpen kapjuk: Minden olyan $e = \overrightarrow{uv} \in E(\overrightarrow{G})$ élre a következőt végezzük el:

(i) Ha $0 < f(e) < c(e)$, akkor felveszünk egy $e_r^+ = \overrightarrow{uv}$ élet $c(e) - f(e)$ kapacitással, továbbá felveszünk egy $e_r^- = \overrightarrow{vu}$ élet $f(e)$ kapacitással.

(ii) Ha $0 = f(e) < c(e)$, akkor felveszünk egy $e_r^+ = \overrightarrow{uv}$ élet $c(e) - f(e)$ kapacitással.

(iii) Ha $0 < f(e) = c(e)$, akkor felveszünk egy $e_r^- = \overrightarrow{vu}$ élet $f(e)$ kapacitással.

Reziduális gráf és javító út

- Az f folyam $\overrightarrow{G}$-beli javító útjai és a $\overrightarrow{G}_r$-beli irányított *st* utak között egy nyilvánvaló bijekció van.

- Valóban, egy $\overrightarrow{G}$-beli J javító út esetén az $e \in E_{\text{előre}}(J)$ élekre az e_r^+ éleket, míg a $e \in E_{\text{hátra}}(J)$ élekre az e_r^- éleket véve egy irányított utat kapunk $\overrightarrow{G}_r$-ben.

- Fordítva: Legyen $\overrightarrow{P}$ egy irányított *st* út $\overrightarrow{G}_r$-ben. Ekkor minden e_r^ε élére véve ($e \in E(\overrightarrow{G})$, $\varepsilon \in \{+, -\}$) élre véve az e „ős élt” egy javító út élhalmazát kapjuk.

Ford—Fulkerson-algoritmus egy kicsit másképp

A Ford—Fulkerson-algoritmus egy alternatív tárgyalása:

Ford—Fulkerson-algoritmusa javító út keresésére

(1) Építsük fel a reziduális hálózat $\overrightarrow{G}_r$ gráfját.
(2) Keressünk irányított st utat $\overrightarrow{G}_r$-ben.

Ford és Fulkerson keresése „naív” volt.

Naív irányított út keresés

- A

$$B_{\text{előre}} = \{x \in V \setminus S : \text{van olyan } y \in S, \text{ hogy } \overrightarrow{yx} \in E \text{ és } f(\overrightarrow{yx}) < c(\overrightarrow{yx})\},$$

illetve

$$B_{\text{hátra}} = \{x \in V \setminus S : \text{van olyan } y \in S, \text{ hogy } \overrightarrow{xy} \in E \text{ és } f(\overrightarrow{xy}) > 0\}$$

halmazok azon csúcsokat tartalmazzák, amelyekkel egy már megtalált javító út kezdemény tovább növelhető.

- Ezek most az S-ből kivezető reziduális élek.

- Ezen halmazok első megtalált eleménél az algoritmus update-elte az S halmazt és továbblépett.

Edmonds és Karp ötlete: Szélességi keresés

Edmonds—Karp javító út keresése

Adott egy $\mathcal{H}$ hálózat és benne egy f folyam.

(R) `Reziduális gráf felépítése:` Építsük fel a $\overrightarrow{G}_r$ reziduális gráfot.

(I) `Iniciálizálás:` Legyen $S_0 = \{s\}$, $i = 0$,
$// \ S = S_0 \cup \ldots \cup S_i$, azon csúcsok halmaza ahová találtunk javító út kezdeményt.

(B) `Bovítés:` Legyen S_{i+1} azon csúcsok halmaza, amelyekbe vezet irányított él S_i-ből.

- Ha $t \in S_{i+1}$, akkor találtunk egy irányított st utat a reziduális gráfban, azaz találtunk egy javító utat.
- Ha $S_{i+1} = \emptyset$, akkor a keresés sikertelen.
- Ha $t \notin S_{i+1} \neq \emptyset$, akkor $i \leftarrow i + 1$ és vissza (B)-hez.

A szélességi keresés tulajdonságai

- Ha sikertelen a keresés, akkor a kifulladáskori S halmazból nem lép ki él és $t \notin S$. Azaz nincs is $\overrightarrow{st}$ út.
- Az S_i halmazoknak a következő tulajdonság nagyon fontos lesz:

($\star$) Minden $\overrightarrow{xy} \in E(\overrightarrow{G})$, $x \in S_i$, $x \in S_j$ esetén $j \leq i + 1$.

- Ez a változat ($\star$) miatt garantálja, hogy a legrövidebb javító utat találjuk meg.

A szélességi keresés tulajdonságai

- A Ford—Fulkerson-algoritmus optimális folyamot keres. Azonban pontos valós aritmetika feltételezése mellett ciklizálhat.
- Edmonds és Karp hozzájárulása az volt, hogy észrevették, ha a legrövidebb javító úttal dolgoznak, akkor a javítások száma becsülhető a hálózat alapgráfjának paramétereivel. A becslésük a csúcs- és pontszám polinomiális függvénye lesz.
- A továbbiakban feltesszük, hogy Edmonds és Karp keresése sikeres. Ami miatt aggódunk az az, hogy sokszor lesz sikeres keresés és sok közbülső folyam vezet el az optimálishoz. Egyetlen egyszer lesz sikertelen a keresés. Ez az aktuális folyam optimális mivoltját igazolja. A sikertelen keresés „költsége” miatt nem kell aggódnunk.

A reziduális gráf kiritkítása

Definíció

Tegyük fel, hogy sikeres a keresés és $t \in S_\ell$. $\overrightarrow{G}_r^0$ legyen az a részgráf a reziduális gráfban, amely csúcsai $S_0^0 \cup S_1^0 \cup S_2^0 \cup \ldots \cup S_\ell^0$, ahol S_i^0 az S halmaz azon csúcsai, amelyen áthalad legrövidebb javító út, továbbá élei a legrövidebb javító utak élei. Így $S_0^0 = \{s\}$, $S_\ell^0 = \{t\}$, $\overrightarrow{G}_r^0$ összes éle valamelyik S_i^0-ből indul és S_{i+1}^0-be vezet és ℓ a legrövidebb javító út hossza.

- Az S_i^0 halmazokat szinteknek nevezzük. $\overrightarrow{G}_r^0$ egy szintezett gráf.
- Minden legrövidebb javító út csúcsai a $S_0^0 \to S_1^0 \to S_3^0 \to \ldots \to S_\ell^0$ szinteket követik.

$\overrightarrow{G}_r^0$ meghatározása

- Ha $t \in S_\ell$ bekövetkezik, akkor egy „visszahaladó" szélességi kereséssel ki tudjuk tisztítani az S_i halmazokat úgy, hogy csak azok a csúcsok maradjanak meg amin keresztül megy egy legrövidebb javító út.

- Legyen S_i^0 azon csúcsok halmaza S_i-ből amelybe vezető i hosszú javító út kezdemény t-be folytatható úgy, hogy egy legrövidebb javító út legyen.

- A meghatározás költsége $\mathcal{O}(|E| + |V|)$, ami $\mathcal{O}(|E|)$, ha G összefüggő (G az alapgráf irányítását elfelejtve kapott irányítatlan gráf).

Edmonds—Karp-algoritmus analízise

Definíció: fázisok

A futás első javítása megnyitja az első fázist.

Minden további javítás esetén megnézzük, hogy megtalált legrövidebb javító út hossza megegyezik-e az előző javítás során talált legrövidebb javító út hosszával.

Ha igen, akkor a fázist folytatjuk. Ha a hosszban változás áll be, akkor az aktuális fázis az előző javítással véget ért, az új javítás egy új fázist kezd.

Edmonds—Karp

(i) Az egymást követő fázisok folyamán a legrövidebb javító út hossza nő.

(ii) Egy fázison belül $\overrightarrow{G}_r^0$ élhalmaza csökken.

Következmény

Először kimondunk egy nyilvánvaló következményt.

Következmény

Az Emonds—Karp-algoritmus futása legfeljebb $|V|$ fázisból áll. Minden fázis legfeljebb $|E|$ javítást tartalmaz. Azaz az algoritmus legfeljebb $|V| \cdot |E|$ javítás után megtalál egy optimális folyamot.

Speciálisan az Edmonds—Karp-algoritmus futási ideje

$$|V||E|\mathcal{O}(|E| + |V|) = \mathcal{O}(|V||E|^2).$$

A következmény nyilvánvaló hiszen $|V| \cdot |E|$-szer kell megtalálni egy javító utat és javítani. Ez utóbbi feladat-pár $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|E|)$ lépésben elvégezhető (feltesszük, hogy alaphálózatunk összefüggő).

A tétel bizonyítása: (i)

Egy javítás alatt találunk egy javító utat. Ennek csúcssorozata $v_0 = s, v_1 \in S_i^0, \ldots, v_{\ell-1} \in S_{\ell-1}^0, v_\ell = t$.

Ez egy irányított út lesz $\overrightarrow{G_r^0}$-ban.

Kiszámoljuk δ-t és az út minden élén megváltoztatjuk az ott folyó anyagmennyiséget.

δ-t úgy választottuk meg, hogy valamelyik élen a folyó anyagmennyiség eléri a kapacitást, vagy lenullázódik.

Az ilyen él(ek) az új $\overrightarrow{G_r}$ reziduális gráfban már nem szerepelnek. Azaz az új $\overrightarrow{G}_r^0$ sem tartalmazhatja az ilyen éleket. Ez a veszteség az eredeti $\overrightarrow{G}_r^0$ egy éle.

A tétel bizonyítása: (i) (folytatás)

Más változás még az lehet, hogy egy a javító úton szerepelt él (amely $\overrightarrow{G_r^0}$-hez hozzájárult) mellé ellentétes irányban megjelenik egy új él. Ez történik, ha egy 0 anyagmennyiségű élen megjelenik valamennyi anyag. Vagy egy kapacitásnyi anyagmennyiséget szállító élen lecsökken az anyagmennyiség.

Egy él mellett egy ellentétes irányú él megjelenése után is teljesül a $(\star)$ tulajdonság az új $\overrightarrow{G}_r$ gráfra a régi $S_0, S_1, \ldots$ halmazokkal.

Így a legrövidebb $\overrightarrow{st}$ út hossza nem lehet ℓ-nél kisebb ($t \in S_\ell$, ℓ a korábbi legrövidebb javító út hossza), azaz nem csökkenhet.

A tétel bizonyítása: (ii)

A reziduális gráfban megjelenő ellentétes él a fentiek miatt egy S_{i+1}-ből S_i-be vezető él lehet csak, ahol $i+1 \leq \ell$ (ahol $t \in S_\ell$).

Ez garantálja, hogy az új $\overrightarrow{G_r^0}$ gráf nem tartalmazhat más élt mint a korábbi.

Sőt az élfogyás is szükségszerű δ választása miatt (lásd fenn).

Szünet

Edmonds—Karp gyengeségei

Láttuk, hogy a szélességi kereséssel ($\mathcal{O}(|E|+|V|)=\mathcal{O}(|E|)$ lépésben) kiszámolhatunk egy $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfot. Ebben ott van az összes legrövidebb $\overrightarrow{st}$ út, sőt egy csak $\mathcal{O}(|V|)$ lépéssel kiolvasható a $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfból.

Edmonds és Karp a széleségi keresés egy egyszerű változatát futtatta: címkézett, amíg t címkét nem kapott, és az okozati élek egy szélességi kereső fát adtak nekik.

Minden javításhoz egy új szélességi keresést indítottak.

Dinic ötlete

Tartsuk meg Edmonds—Karp algoritmusának alapstruktúráját.

Egy fázison kezdeténél azonban határozzuk meg a $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfot. (Ez egy egyszeri költség.)

Ha ismert a $\overrightarrow{G_r^0}$, akkor ebből egy legrövidebb javító út $\mathcal{O}(|V|)$ költséggel adódik.

Egy fázison belül egy javítás után ne építsük fel az új $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfot a semmiből.

Látjuk, hogy itt egy csökkenés történik.

A $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfot „update-eljük", azaz a csökkenést számoljuk ki.

Dinic tétele

Dinic tétele

Egy fázison belül a $\overrightarrow{G_r^0}$ gráf változása $\mathcal{O}(|E|)$ költséggel nyilvántartható.

Ezt a tételt egy későbbi témakörben fogjuk tárgyalni.

A haszon

$|V|$ fázisunk van.

Egy fázisban $|E|$ darab javítás lehetséges.

Azonban, minden fázisban csak egyszer építjük fel a $\overrightarrow{G}_r^0$ gráfot: ennek költsége $\mathcal{O}(|E|)$).

Minden javító út megtalálása $\mathcal{O}(|V|)$ költségű.

$\overrightarrow{G}_r^0$ az egész fázisra vonatkozó update költsége $\mathcal{O}(|E|)$.

A teljes folyam algoritmus költsége:

$$|V|\left(\mathcal{O}(|E|)+\mathcal{O}(|E|)\cdot\mathcal{O}(|V|)+\mathcal{O}(|E|)\right)=\mathcal{O}(|V|^2|E|).$$

Összegzés

Dinic tétele

Adott hálózatban a Dinic-algoritmus $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$ lépésben megtalálja az optimális folyamot.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!