

Hálózatok, \mathcal{P} - és \mathcal{NP} -teljes problémák

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Normalizált TG-ek

Emlékeztető

$L \in_T \mathcal{TIME}(t(n)) / \mathcal{NTIME}(t(n))$ esetén mindig feltesszük, hogy $t(n)$ szép idő függvény, azaz Turing-géppel megvalósítható egy óra, ami n hosszú inputra „ $t(n)$ idő után üt”.

$\omega \in \Sigma^n$ inputon T futása a

$$\kappa_0(\omega) \rightarrow \kappa_1 \rightarrow \kappa_2 \rightarrow \dots \rightarrow \kappa_\ell,$$

konfigurációsorozat, ahol $\kappa_0(\omega)$ az ω -hoz tartozó kiinduló konfiguráció, κ_{i+1} a κ_i konfiguráció rákövetkezője, és κ_ℓ az első olyan konfiguráció, ahol az állapot ELFOGAD vagy ELVET. Feltehető, hogy $\ell = t(n)$.

Normalizált TG-ek

Emlékeztető

$L \in_T \mathcal{TIME}(t(n)) / \mathcal{NTIME}(t(n))$ esetén mindig feltesszük, hogy $t(n)$ szép idő függvény, azaz Turing-géppel megvalósítható egy óra, ami n hosszú inputra „ $t(n)$ idő után üt”.

$\omega \in \Sigma^n$ inputon T futása a

$$\kappa_0(\omega) \rightarrow \kappa_1 \rightarrow \kappa_2 \rightarrow \dots \rightarrow \kappa_\ell,$$

konfigurációsorozat, ahol $\kappa_0(\omega)$ az ω -hoz tartozó kiinduló konfiguráció, κ_{i+1} a κ_i konfiguráció rákövetkezője, és κ_ℓ az első olyan konfiguráció, ahol az állapot ELFOGAD vagy ELVET. Feltehető, hogy $\ell = t(n)$.

Az ω inputhoz tartozó konfigurációkról feltehető, hogy a munkaszalag(ok) első $t(n)$ mezőjnek tartalmát tartalmazza.

Konfigurációk kódolása bitekkel

Konfigurációk kódolása bitekkel

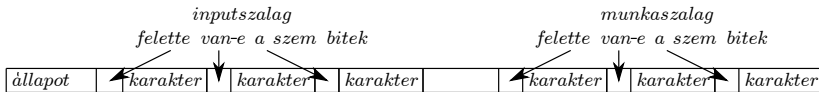
Észrevétel

κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.

Konfigurációk kódolása bitekkel

Észrevétel

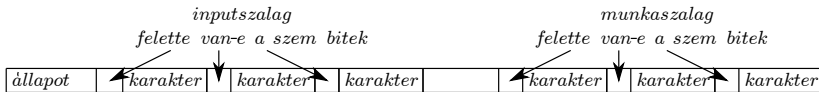
κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.



Konfigurációk kódolása bitekkel

Észrevétel

κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.

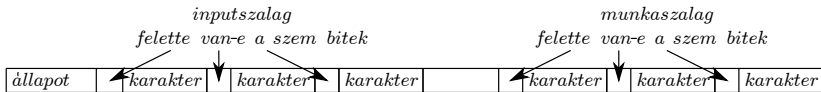


A fej pozícióját is kell kódolnunk.

Konfigurációk kódolása bitekkel

Észrevétel

κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.

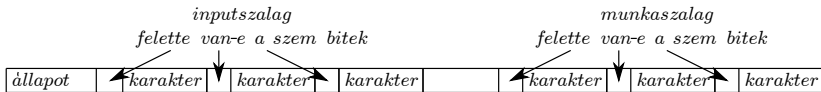


A fej pozícióját is kell kódolnunk. Ezt „szétszórtuk”, minden mező raktunk egy bitet.

Konfigurációk kódolása bitekkel

Észrevétel

κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.

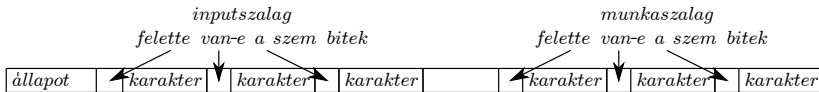


A fej pozícióját is kell kódolnunk. Ezt „szétszórtuk”, minden mező raktunk egy bitet. Így nem minden adott hosszúságú sorozat kódol konfigurációt.

Konfigurációk kódolása bitekkel

Észrevétel

κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.



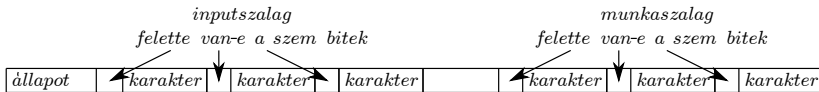
A fej pozícióját is kell kódolnunk. Ezt „szétszórtuk”, minden mező raktunk egy bitet. Így nem minden adott hosszúságú sorozat kódol konfigurációt.

S elemeinek kódolására $\lceil \log_2 |S| \rceil$ bit legendő.

Konfigurációk kódolása bitekkel

Észrevétel

κ konfigurációk kódolhatók bitsorozatokkal.



A fej pozícióját is kell kódolnunk. Ezt „szétszórtuk”, minden mező raktunk egy bitet. Így nem minden adott hosszúságú sorozat kódol konfigurációt.

S elemeinek kódolására $\lceil \log_2 |S| \rceil$ bit legendő.

Az állapotot és karaktereket kódoló blokkok hossza függ $|S|$, $|\Sigma|$ és $|\Gamma|$ értékétől. Minden esetre konstans sok bit szükséges (ami a Turing-géptől függ).

Észrevételek

Észrevételek

1. Észrevétel

A megállapodát úgy választhatjuk adott n hosszú ω input esetén $[\omega]$ hossza $\alpha_T \cdot n$ legyen.

Észrevételek

1. Észrevétel

A megállapodát úgy választhatjuk adott n hosszú ω input esetén $[\omega]$ hossza $\alpha_T \cdot n$ legyen.

Ha T időigénye legfeljebb $t(n)$, akkor konfigurációk kódjának hossza $\beta_T \cdot t(n)$ legyen.

Észrevételek

1. Észrevétel

A megállapodát úgy választhatjuk adott n hosszú ω input esetén $[\omega]$ hossza $\alpha_T \cdot n$ legyen.

Ha T időigénye legfeljebb $t(n)$, akkor konfigurációk kódjának hossza $\beta_T \cdot t(n)$ legyen.

A továbbiakban n és a kódolási megállapodás mindig rögzített (ennek megfelelően a megfelelő kódok hossza mindig ismert).

További észrevétel

További észrevétel

Észrevétel

$[\kappa_i] \rightarrow [\kappa_i^+] = [\kappa_{i+1}]$ egyszerű hozzárendelés/függvény.

További észrevétel

Észrevétel

$[\kappa_i] \rightarrow [\kappa_i^+] = [\kappa_{i+1}]$ egyszerű hozzárendelés/függvény.

Az észrevétel állítása matematikailag nem pontos, az „egyszerű” jelző értelmezése nem jól definiált.

További észrevétel

Észrevétel

$[\kappa_i] \rightarrow [\kappa_i^+] = [\kappa_{i+1}]$ egyszerű hozzárendelés/függvény.

Az észrevétel állítása matematikailag nem pontos, az „egyszerű” jelző értelmezése nem jól definiált.

Azt mutatjuk, hogy egyszerűen meghatározható/kiszámolható egy kicsi (polinomiális méretű) hálózat, amely egy konfiguráció kódjából kiszámolja a rákövetkező konfiguráció kódját.

Hálózatok

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza. A nem inputcsúcsokra mint kapuk hivatkozunk. A kapuk halmaza $K = V(\vec{G}) - I$.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza. A nem inputcsúcsokra mint kapuk hívkozunk. A kapuk halmaza $K = V(\vec{G}) - I$. Speciális csúcsot, esetleg csúcsokat nevezünk ki, amelyekre mint output csúcsok hívkozunk.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza. A nem inputcsúcsokra mint kapuk hívkozunk. A kapuk halmaza $K = V(\vec{G}) - I$. Speciális csúcsot, esetleg csúcsokat nevezünk ki, amelyekre mint output csúcsok hívkozunk.

Legyen $\ell_I : I \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{0, 1\}$ egy címkézése az output csúcsoknak.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza. A nem inputcsúcsokra mint kapuk hivatkozunk. A kapuk halmaza $K = V(\vec{G}) - I$. Speciális csúcsot, esetleg csúcsokat nevezünk ki, amelyekre mint output csúcsok hivatkozunk.

Legyen $l_I : I \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{0, 1\}$ egy címkézése az output csúcsoknak. Legyen $l_K : K \rightarrow \{\neg, \vee, \wedge\}$ egy címkézése a kapuknak, amelyre teljesül, hogy egy kapunknak akkor és csak akkor \neg a címkéje, ha befoka 1.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza. A nem inputcsúcsokra mint kapuk hivatkozunk. A kapuk halmaza $K = V(\vec{G}) - I$. Speciális csúcsot, esetleg csúcsokat nevezünk ki, amelyekre mint output csúcsok hivatkozunk.

Legyen $\ell_I : I \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{0, 1\}$ egy címkézése az output csúcsoknak. Legyen $\ell_K : K \rightarrow \{\neg, \vee, \wedge\}$ egy címkézése a kapuknak, amelyre teljesül, hogy egy kapunknak akkor és csak akkor \neg a címkéje, ha befoka 1. Legyen $\ell = (\ell_I, \ell_K)$ az összes csúcsot címkéző függvény.

Hálózatok

Definíció: Hálózat

Egy hálózat egy \vec{G} irányított gráf, amely nem tartalmaz irányított kört (azaz lerajzolható úgy, hogy minden él „lefelé haladjon”).

Minden csúcs befoka 0, 1 vagy 2. A 0 befokú csúcsok neve inputcsúcs. Legyen I az input csúcsok halmaza. A nem inputcsúcsokra mint kapuk hivatkozunk. A kapuk halmaza $K = V(\vec{G}) - I$. Speciális csúcsot, esetleg csúcsokat nevezünk ki, amelyekre mint output csúcsok hivatkozunk.

Legyen $\ell_I : I \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{0, 1\}$ egy címkézése az output csúcsoknak. Legyen $\ell_K : K \rightarrow \{\neg, \vee, \wedge\}$ egy címkézése a kapuknak, amelyre teljesül, hogy egy kapunknak akkor és csak akkor \neg a címkéje, ha befoka 1. Legyen $\ell = (\ell_I, \ell_K)$ az összes csúcsot címkéző függvény.

(\vec{G}, ℓ) címkézett irányított gráfot hálózatnak nevezük.

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell

Egy hálózat kiszámol egy Boole-függvényt a következő módon:

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell

Egy hálózat kiszámol egy Boole-függvényt a következő módon: Az $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ változók egy kiértékelését kiterjesztjük a kapuk egy kiértékelésévé.

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell

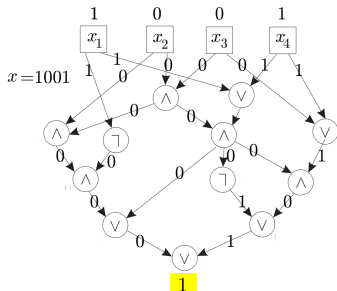
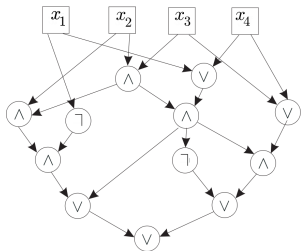
Egy hálózat kiszámol egy Boole-függvényt a következő módon: Az $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ változók egy kiértékelését kiterjesztjük a kapuk egy kiértékelésévé.

Feltesszük, hogy hálózatunkat úgy rajzoljuk le, hogy minden él lefelé haladjon. A kapuk kiértékelése fentről lefelé halad.

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell

Egy hálózat kiszámol egy Boole-függvényt a következő módon: Az $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ változók egy kiértékelését kiterjesztjük a kapuk egy kiértékelésévé.

Feltesszük, hogy hálózatunkat úgy rajzoljuk le, hogy minden él lefelé haladjon. A kapuk kiértékelése fentről lefelé halad.



A hálózat mint egy dinamikus számítási modell (folytatás)

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell (folytatás)

Ha egy kapuhoz jutunk, akkor azok a kapuk, ahonnan él vezet hozzá már kiértékeltek, azaz egy kiszámolt bitet rendeltünk hozzá.

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell (folytatás)

Ha egy kapuhoz jutunk, akkor azok a kapuk, ahonnan él vezet hozzá már kiértékeltek, azaz egy kiszámolt bitet rendeltünk hozzá.

Az aktuális kapu által kiszámolt bit az hozzá vezető éleken áramló bit és a kapu címkéje alapján természetesen értelmezhető. A hálózat által kiszámolt bitsorozat az otuput csúcs(ok) által kiszámolt bit(ek).

A hálózat mint egy dinamikus számítási modell (folytatás)

Ha egy kapuhoz jutunk, akkor azok a kapuk, ahonnan él vezet hozzá már kiértékeltek, azaz egy kiszámolt bitet rendeltünk hozzá.

Az aktuális kapu által kiszámolt bit az hozzá vezető éleken áramló bit és a kapu címkéje alapján természetesen értelmezhető. A hálózat által kiszámolt bitsorozat az otuput csúcs(ok) által kiszámolt bit(ek).

Definíció

Legyen f_C az a Boole-függvényt, amelyet a C hálózat a fenti módon kiszámol/megvalósít.

Az utolsó észrevétel „matematizálása”

Az utolsó észrevétel „matematizálása”

2. Észrevétel

Egy konfigurációt kódoló bitsorozatból egy egyszerűen leírható, kicsi hálózat kiszámolja a rákövetkező konfiguráció kódját.

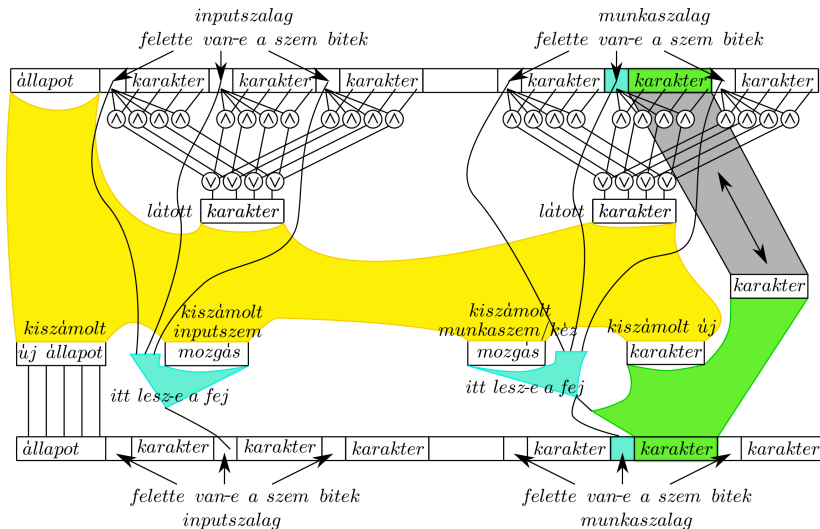
Az utolsó észrevétel „matematizálása”

2. Észrevétel

Egy konfigurációt kódoló bitsorozatból egy egyszerűen leírható, kicsi hálózat kiszámolja a rákövetkező konfiguráció kódját.

A konstrukciónk egyszerű, de sok esetlegességet, megállapodást követel. Egy formális leírás helyett egy példán szemléltetjük milyen ötletek vezethetnek el egy megoldáshoz.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” képen



Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Egy mezőnél a szem/kéz-ott-van-e bitet és a mező tartalmát kódoló bitek mindegyikét össze-és-eljük. A kapott bitsorozat vagy a csupa 0 (ha nincs ott a szem/kéz, mindent 0-val és-eltünk) vagy a látott karakter kódja (ha ott a szem/kéz).

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Egy mezőnél a szem/kéz-ott-van-e bitet és a mező tartalmát kódoló bitek mindegyikét össze-és-eljük. A kapott bitsorozat vagy a csupa 0 (ha nincs ott a szem/kéz, mindent 0-val és-eltünk) vagy a látott karakter kódja (ha ott a szem/kéz).

Az inputszalag mezőinél így kapott bitsorozatok mindegyikének első, majd második és így tovább karakterét össze-vagy-olva kapjuk az inputszalagon látott karakter kódját.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Egy mezőnél a szem/kéz-ott-van-e bitet és a mező tartalmát kódoló bitek mindegyikét össze-és-eljük. A kapott bitsorozat vagy a csupa 0 (ha nincs ott a szem/kéz, mindent 0-val és-eltünk) vagy a látott karakter kódja (ha ott a szem/kéz).

Az inputszalag mezőinél így kapott bitsorozatok mindegyikének első, majd második és így tovább karakterét össze-vagy-olva kapjuk az inputszalagon látott karakter kódját. Hasonlóan számolhatunk a munkaszalagnál.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Egy mezőnél a szem/kéz-ott-van-e bitet és a mező tartalmát kódoló bitek mindegyikét össze-és-eljük. A kapott bitsorozat vagy a csupa 0 (ha nincs ott a szem/kéz, mindent 0-val és-eltünk) vagy a látott karakter kódja (ha ott a szem/kéz).

Az inputszalag mezőinél így kapott bitsorozatok mindegyikének első, majd második és így tovább karakterét össze-vagy-olva kapjuk az inputszalagon látott karakter kódját. Hasonlóan számolhatunk a munkaszalagnál.

A sárga területben egy összetettebb számolás történik: konstans sok bitből számolunk ki konstans sok bitet (a konstanok függenek a Turing-géptől). Konkrét kidolgozása az átmenetifüggvénytől függ.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Egy mezőnél a szem/kéz-ott-van-e bitet és a mező tartalmát kódoló bitek mindegyikét össze-és-eljük. A kapott bitsorozat vagy a csupa 0 (ha nincs ott a szem/kéz, mindent 0-val és-eltünk) vagy a látott karakter kódja (ha ott a szem/kéz).

Az inputszalag mezőinél így kapott bitsorozatok mindegyikének első, majd második és így tovább karakterét össze-vagy-olva kapjuk az inputszalagon látott karakter kódját. Hasonlóan számolhatunk a munkaszalagnál.

A sárga területben egy összetettebb számolás történik: konstans sok bitből számolunk ki konstans sok bitet (a konstanok függenek a Turing-géptől). Konkrét kidolgozása az átmenetifüggvénytől függ. Ha nincs ötletünk az egyes bitek függését akár a nyilvánvaló DNF formula alapján írjuk fel.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Egy mezőnél a szem/kéz-ott-van-e bitet és a mező tartalmát kódoló bitek mindegyikét össze-és-eljük. A kapott bitsorozat vagy a csupa 0 (ha nincs ott a szem/kéz, mindent 0-val és-eltünk) vagy a látott karakter kódja (ha ott a szem/kéz).

Az inputszalag mezőinél így kapott bitsorozatok mindegyikének első, majd második és így tovább karakterét össze-vagy-olva kapjuk az inputszalagon látott karakter kódját. Hasonlóan számolhatunk a munkaszalagnál.

A sárga területben egy összetettebb számolás történik: konstans sok bitből számolunk ki konstans sok bitet (a konstanok függenek a Turing-géptől). Konkrét kidolgozása az átmenetifüggvénytől függ. Ha nincs ötletünk az egyes bitek függését akár a nyilvánvaló DNF formula alapján írjuk fel. Ekkor is konstans sok kapuval dolgozva megoldjuk a feladatunkat.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van. Az átláthatóság kedvéért rajzoltuk fel csak egyszer az input- és egyszer A munkaszalaghoz.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van. Az átláthatóság kedvéért rajzoltuk fel csak egyszer az input- és egyszer A munkaszalaghoz.

A zöld területen számoljuk ki a munkaszalag új tartalmát.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van. Az átláthatóság kedvéért rajzoltuk fel csak egyszer az input- és egyszer A munkaszalaghoz.

A zöld területen számoljuk ki a munkaszalag új tartalmát. Minden munkaszalag mezőhöz tartozik egy ilyen zöld blokk (egyszerűség kedvéért csak egyet tüntettünk fel).

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van. Az átláthatóság kedvéért rajzoltuk fel csak egyszer az input- és egyszer A munkaszalaghoz.

A zöld területen számoljuk ki a munkaszalag új tartalmát. Minden munkaszalag mezőhöz tartozik egy ilyen zöld blokk (egyszerűség kedvéért csak egyet tüntettünk fel). Az új karaktertől, a régitől és attól az információtól függ, hogy a fej ott áll-e.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van. Az átláthatóság kedvéért rajzoltuk fel csak egyszer az input- és egyszer A munkaszalaghoz.

A zöld területen számoljuk ki a munkaszalag új tartalmát. Minden munkaszalag mezőhöz tartozik egy ilyen zöld blokk (egyszerűség kedvéért csak egyet tüntettünk fel). Az új karaktertől, a régitől és attól az információtól függ, hogy a fej ott áll-e. Ez a rész is könnyen megvalósítható lenne, ha tudnánk Γ elemeinek kódolásához használt bitek ℓ számát ismernénk.

Az utolsó észrevétel „matematizálása” szavakkal

A világos kék területen számolódik kis a fej pozícióját leíró egyik bit. Ez attól függ, hogy a fej ott volt-e vagy valamelyik szomszéd felett állt, illetve merre írja elő mozgását az átmeneti függvény. A hálózatunk ezen részét konkrétan felírhatnánk, de ez a munka felesleges az előző megjegyzésünk alapján. Ez a kék rész minden fej-pozíció-bithez ott van. Az átláthatóság kedvéért rajzoltuk fel csak egyszer az input- és egyszer A munkaszalaghoz.

A zöld területen számoljuk ki a munkaszalag új tartalmát. Minden munkaszalag mezőhöz tartozik egy ilyen zöld blokk (egyszerűség kedvéért csak egyet tüntettünk fel). Az új karaktertől, a régítől és attól az információtól függ, hogy a fej ott áll-e. Ez a rész is könnyen megvalósítható lenne, ha tudnánk Γ elemeinek kódolásához használt bitek ℓ számát ismernénk. A zöld területen az $f(\epsilon, k_0, k_1) = k_\epsilon$ függvényt számoljuk ki, ami $1 + 2\ell$ bitből számol ki ℓ -et.

Észrevétel

Észrevétel

3. Észrevétel

$[\omega] \rightarrow [\kappa_0(\omega)]$ egy egyszerű hozzárendelés/függvény.

Észrevétel

3. Észrevétel

$[\omega] \rightarrow [\kappa_0(\omega)]$ egy egyszerű hozzárendelés/függvény.

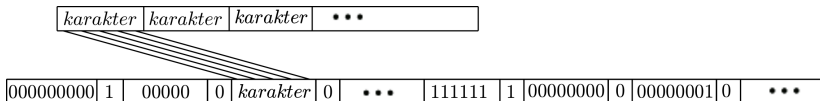
Ez a korábbiaknál egyszerűbb észrevétel. Ismét egy ábrára utalunk.

Észrevétel

3. Észrevétel

$[\omega] \rightarrow [\kappa_0(\omega)]$ egy egyszerű hozzárendelés/függvény.

Ez a korábbiaknál egyszerűbb észrevétel. Ismét egy ábrára utalunk.

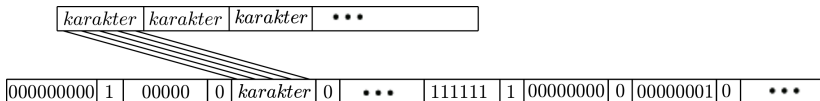


Észrevétel

3. Észrevétel

$\lceil \omega \rceil \rightarrow \lceil \kappa_0(\omega) \rceil$ egy egyszerű hozzárendelés/függvény.

Ez a korábbiaknál egyszerűbb észrevétel. Ismét egy ábrára utalunk.



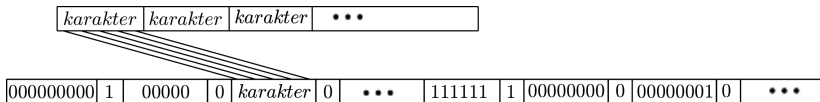
Feltettük, hogy a START állapot kódja $00 \dots 0$ (hossza $\lceil \log_2 |S| \rceil$, példánkban 9).

Észrevétel

3. Észrevétel

$[\omega] \rightarrow [\kappa_0(\omega)]$ egy egyszerű hozzárendelés/függvény.

Ez a korábbiaknál egyszerűbb észrevétel. Ismét egy ábrára utalunk.



Feltettük, hogy a START állapot kódja $00 \dots 0$ (hossza $\lceil \log_2 |S| \rceil$, példánkban 9).

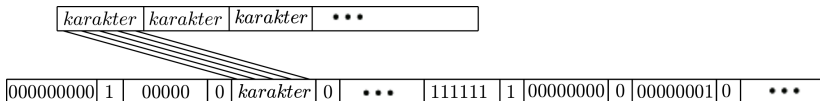
Az inputszalagon \triangleright kódja $00 \dots 0$, a \triangleleft kódja $11 \dots 1$ (hosszaik $\lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$, példánkban 5).

Észrevétel

3. Észrevétel

$[\omega] \rightarrow [\kappa_0(\omega)]$ egy egyszerű hozzárendelés/függvény.

Ez a korábbiaknál egyszerűbb észrevétel. Ismét egy ábrára utalunk.



Feltettük, hogy a START állapot kódja $00 \dots 0$ (hossza $\lceil \log_2 |S| \rceil$, példánkban 9).

Az inputszalagon \triangleright kódja $00 \dots 0$, a \triangleleft kódja $11 \dots 1$ (hosszaik $\lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$, példánkban 5).

Az munkaszalagon \triangleright kódja $0 \dots 00$, a szűzkarakter kódja $0 \dots 01$, (hossza $\lceil \log_2 |\Gamma| \rceil$, példánkban 8).

Eddigi eredményeink

Eddigi eredményeink

Definíció

Legyen

$$\text{HÁLÓZAT-KIÉRTÉELÉS} = \{[\mathcal{C}, \omega] : \mathcal{C}(\omega) = 1\},$$

azaz az a döntési probléma, amely egy \mathcal{C} hálózat és ω bitsorozat esetén eldönti, hogy az ω bitsorozatot adva az x_1, x_2, \dots inputkapuk értékeinek a hálózat az 1 bitet számolja-e ki (azaz kiértékeli $\mathcal{C}_n(\omega)$ -t).

Eddigi eredményeink

Definíció

Legyen

$$\text{HÁLÓZAT-KIÉRTÉLÉS} = \{[\mathcal{C}, \omega] : \mathcal{C}(\omega) = 1\},$$

azaz az a döntési probléma, amely egy \mathcal{C} hálózat és ω bitsorozat esetén eldönti, hogy az ω bitsorozatot adva az x_1, x_2, \dots inputkapuk értékeinek a hálózat az 1 bitet számolja-e ki (azaz kiértékeli $\mathcal{C}_n(\omega)$ -t).

Tétel

HÁLÓZAT-KIÉRTÉLÉS \mathcal{P} -teljes (az \mathcal{L} redukcióra nézve).

Bizonyítás

Bizonyítás

Legyen $L \in_T \mathcal{P}$.

Bizonyítás

Legyen $L \in_T \mathcal{P}$. Legyen $t(n)$ egy polinom, T időkorlátja.

Bizonyítás

Legyen $L \in_T \mathcal{P}$. Legyen $t(n)$ egy polinom, T időkorlátja.

Feltehető, hogy T olyan, hogy ELFOGAD/ELVET állapot elérése után „tartja” állapotát. Így $\omega \in L$? kérdés megválaszolása ($\omega \in \Sigma^n$) ekvivalens annak megállapításával, hogy az ω - történő futás során a $\kappa_{t(n)}$ konfigurációban az állapot ELFOGAD-e.

Bizonyítás

Legyen $L \in_T \mathcal{P}$. Legyen $t(n)$ egy polinom, T időkorlátja.

Feltehető, hogy T olyan, hogy ELFOGAD/ELVET állapot elérése után „tartja” állapotát. Így $\omega \in L?$ kérdés megválaszolása ($\omega \in \Sigma^n$) ekvivalens annak megállapításával, hogy az ω - történő futás során a $\kappa_{t(n)}$ konfigurációban az állapot ELFOGAD-e.

Megállapodhatunk abban, hogy a konfigurációkat 0-1 sorozatokkal kódoljuk, hogy az állapotot kódoló blokkban az ELFOGAD állapot kódja a csupa 1 sorozat legyen.

Bizonyítás

Legyen $L \in_T \mathcal{P}$. Legyen $t(n)$ egy polinom, T időkorlátja.

Feltehető, hogy T olyan, hogy ELFOGAD/ELVET állapot elérése után „tartja” állapotát. Így $\omega \in L$? kérdés megválaszolása ($\omega \in \Sigma^n$) ekvivalens annak megállapításával, hogy az ω - történő futás során a $\kappa_{t(n)}$ konfigurációban az állapot ELFOGAD-e.

Megállapodhatunk abban, hogy a konfigurációkat 0-1 sorozatokkal kódoljuk, hogy az állapotot kódoló blokkban az ELFOGAD állapot kódja a csupa 1 sorozat legyen.

A fentiek alapján bármi volt is $L \in_T \mathcal{P}$ $\omega \in \Sigma^n$ tetszőleges eleméhez felépíthető egy $\mathcal{T}_{T,\omega}$ hálózat, amely inputkapui ω -t kódolják (3. észrevétel) és bizonyos szintje a Turing-számítás konfiguráció-sorozatának elemeit kódolja (2. észrevétel).

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

$t(n)$ ilyen szint felépítése után az érdekel minket, hogy egy bizonyos blokkban csupa 1-es bit szerepel-e. Ezt ÉS kapuk segítségével könnyen kifejezhetjük.

Bizonyítás (folytatás)

$t(n)$ ilyen szint felépítése után az érdekel minket, hogy egy bizonyos blokkban csupa 1-es bit szerepel-e. Ezt ÉS kapuk segítségével könnyen kifejezhetjük.

Ezzel leírtuk a redukáló algoritmust. A redukció elméleti része a korábbiakból adódik. A konstrukció/redukció logtár-beli.

Hálózat kielégíthetőség és az első \mathcal{NP} -teljes tétel

Hálózat kielégíthetőség és az első \mathcal{NP} -teljes tétel

Definíció

Legyen

$\text{HÁLÓZAT-SAT} = \{[\mathcal{C}] : \text{van olyan } \omega \text{ bitsorozat, amelyre } \mathcal{C}(\omega) = 1\},$

azaz az a döntési probléma, amely egy \mathcal{C} hálózat esetén el kell döntenünk, hogy kielégíthető-e.

Hálózat kielégíthetőség és az első \mathcal{NP} -teljes tétel

Definíció

Legyen

$\text{HÁLÓZAT-SAT} = \{[C] : \text{van olyan } \omega \text{ bitsorozat, amelyre } C(\omega) = 1\},$

azaz az a döntési probléma, amely egy C hálózat esetén el kell döntenünk, hogy kielégíthető-e.

Következmény

- (i) Tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvre $L \prec_{\mathcal{L}} \text{HÁLÓZAT-SAT}$
- (ii) HÁLÓZAT-SAT \mathcal{NP} -teljes
- (iii) $\mathcal{P} = \mathcal{NP} \Leftrightarrow \text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{P}$

Bizonyítás (i)

Bizonyítás (i)

$L \in_T \mathcal{NP}$, így egy tetszőleges $\omega \in L$ esetén létezik hozzá egy tanú:
 $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_{p(n)})$, amelyre $T(\omega, \tau)$ ELFOGAD állapotba jut.

Bizonyítás (i)

$L \in_T \mathcal{NP}$, így egy tetszőleges $\omega \in L$ esetén létezik hozzá egy tanú:
 $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_{p(n)})$, amelyre $T(\omega, \tau)$ ELFOGAD állapotba jut.
Azaz az előbb megkonstruált C hálózatra, $C(\lceil \omega \rceil, y_1, y_2, \dots, y_{q(n)})$
az 1 értéket számolja ki, ha az y változók helyére a τ kódjának
bitjeit írjuk.

Bizonyítás (i)

$L \in_T \mathcal{NP}$, így egy tetszőleges $\omega \in L$ esetén létezik hozzá egy tanú: $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_{p(n)})$, amelyre $T(\omega, \tau)$ ELFOGAD állapotba jut. Azaz az előbb megkonstruált C hálózatra, $C(\lceil \omega \rceil, y_1, y_2, \dots, y_{q(n)})$ az 1 értéket számolja ki, ha az y változók helyére a τ kódjának bitjeit írjuk.

Megfordítva is igaz. Ha $C(\lceil \omega \rceil, y_1, y_2, \dots, y_{q(n)})$ -nek találunk egy kielégítését, akkor egy tanú kódját találjuk.

Bizonyítás (i)

$L \in_T \mathcal{NP}$, így egy tetszőleges $\omega \in L$ esetén létezik hozzá egy tanú: $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_{p(n)})$, amelyre $T(\omega, \tau)$ ELFOGAD állapotba jut. Azaz az előbb megkonstruált C hálózatra, $C(\lceil \omega \rceil, y_1, y_2, \dots, y_{q(n)})$ az 1 értéket számolja ki, ha az y változók helyére a τ kódjának bitjeit írjuk.

Megfordítva is igaz. Ha $C(\lceil \omega \rceil, y_1, y_2, \dots, y_{q(n)})$ -nek találunk egy kielégítését, akkor egy tanú kódját találjuk.

Azaz $C(\lceil \omega \rceil, y_1, y_2, \dots, y_{q(n)})$ kódjának legyártása (ami \mathcal{L} -ben megoldható) egy jó redukció.

Bizonyítás (ii)+(iii)

Bizonyítás (ii)+(iii)

(ii) Az (i) részből és abból, hogy $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{NP}$ (tanú egy kielégítő bemenet), következik, hogy HÁLÓZAT-SAT \mathcal{NP} -teljes.

Bizonyítás (ii)+(iii)

(ii) Az (i) részből és abból, hogy $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{NP}$ (tanú egy kielégítő bemenet), következik, hogy HÁLÓZAT-SAT \mathcal{NP} -teljes.

(iii) Mivel $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{NP}$, így ha $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, akkor \mathcal{P} -beli is.

Bizonyítás (ii)+(iii)

(ii) Az (i) részből és abból, hogy $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{NP}$ (tanú egy kielégítő bemenet), következik, hogy HÁLÓZAT-SAT \mathcal{NP} -teljes.

(iii) Mivel $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{NP}$, így ha $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, akkor \mathcal{P} -beli is.

Viszafelé, ha $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{P}$, akkor tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet redukáljunk HÁLÓZAT-SAT -ra, a redukált problémát \mathcal{P} -ben el tudjuk dönteni.

Bizonyítás (ii)+(iii)

(ii) Az (i) részből és abból, hogy $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{NP}$ (tanú egy kielégítő bemenet), következik, hogy HÁLÓZAT-SAT \mathcal{NP} -teljes.

(iii) Mivel $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{NP}$, így ha $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, akkor \mathcal{P} -beli is.

Viszafelé, ha $\text{HÁLÓZAT-SAT} \in \mathcal{P}$, akkor tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet redukáljunk HÁLÓZAT-SAT -ra, a redukált problémát \mathcal{P} -ben el tudjuk dönteni.

A két lépés együtt is polinomiális és az L nyelv eldöntési problémáját oldja meg. Ebből $L \in \mathcal{P}$ következik, így $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}$, tehát $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ adódik.

Szünet



Konjunktív normálforma (CNF)

Konjunktív normálforma (CNF)

Definíció

Legyen $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ egy változó halmaz.

Konjunktív normálforma (CNF)

Definíció

Legyen $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ egy változó halmaz. Legyen $L = V \dot{\cup} \bar{V}$ a literálok halmaza (\bar{V} a negált változók halmaza, azaz $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$).

Konjunktív normálforma (CNF)

Definíció

Legyen $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ egy változó halmaz. Legyen $L = V \cup \overline{V}$ a literálok halmaza (\overline{V} a negált változók halmaza, azaz $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n\}$).

L egy részhalmazát klóznak nevezzük. Esetünkben a klózra úgy gondolunk, hogy a hozzá tartozó literálokat \vee logikai művelettel, azaz diszjunkcióval kapcsoljuk össze.

Konjunktív normálforma (CNF)

Definíció

Legyen $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ egy változó halmaz. Legyen $L = V \cup \bar{V}$ a literálok halmaza (\bar{V} a negált változók halmaza, azaz $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$).

L egy részhalmazát klóznak nevezzük. Esetünkben a klózra úgy gondolunk, hogy a hozzá tartozó literálokat \vee logikai művelettel, azaz diszjunkcióval kapcsoljuk össze.

Egy φ konjunktív normálformában lévő formula (CNF formula) klózok egy halmaza.

Konjunktív normálforma (CNF)

Definíció

Legyen $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ egy változó halmaz. Legyen $L = V \cup \bar{V}$ a literálok halmaza (\bar{V} a negált változók halmaza, azaz $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$).

L egy részhalmazát klóznak nevezzük. Esetünkben a klózra úgy gondolunk, hogy a hozzá tartozó literálokat \vee logikai művelettel, azaz diszjunkcióval kapcsoljuk össze.

Egy φ konjunktív normálformában lévő formula (CNF formula) klózok egy halmaza.

Erre a klózhalmazra úgy gondolunk, hogy a klózok \wedge logikai művelettel, azaz konjunkcióval kapcsoljuk össze.

Konjunktív normálforma (CNF)

Konjunktív normálforma (CNF)

Egy φ CNF formula kielégíthető, ha adható V egy kiértékelése (ami természetes módon kiterjeszhető L egy kiértékelésévé), amelyre minden klózban lesz igazzá kiértékelt literál.

Konjunktív normálforma (CNF)

Egy φ CNF formula kielégíthető, ha adható V egy kiértékelése (ami természetes módon kiterjeszhető L egy kiértékelésévé), amelyre minden klózban lesz igazzá kiértékelt literál.

$$\text{SAT} = \{[\varphi] : \varphi \text{ kielégíthető CNF}\}$$

Konjunktív normálforma (CNF)

Egy φ CNF formula kielégíthető, ha adható V egy kiértékelése (ami természetes módon kiterjeszhető L egy kiértékelésévé), amelyre minden klózban lesz igazzá kiértékelt literál.

$$\text{SAT} = \{[\varphi] : \varphi \text{ kielégíthető CNF}\}$$

Azaz SAT az a probléma, ahol adott egy CNF formula és el kell döntenünk, hogy kielégíthető-e.

A Cook—Levin-tétel

A Cook—Levin-tétel

Cook—Levin-tétel

SAT (CNF formula kielégíthetősége) \mathcal{NP} -teljes.

Egy \mathcal{NP} -teljes problémából egy másik

Egy \mathcal{NP} -teljes problémából egy másik

Könnyű látni, hogy $\text{SAT} \in \mathcal{NP}$.

Egy \mathcal{NP} -teljes problémából egy másik

Könnyű látni, hogy $\text{SAT} \in \mathcal{NP}$.

Ha adnunk egy visszavezetést HÁLÓZAT-SAT-ról SAT-ra, akkor készen vagyunk:

Egy \mathcal{NP} -teljes problémából egy másik

Könnyű látni, hogy $\text{SAT} \in \mathcal{NP}$.

Ha adnunk egy visszavezetést HÁLÓZAT-SAT-ról SAT-ra, akkor készen vagyunk: Az előző következmény (i) pontja és a polinomiális idejű redukció tranzitívítása alapján tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet vissza tudunk vezetni SAT-ra.

Egy \mathcal{NP} -teljes problémából egy másik

Könnyű látni, hogy $\text{SAT} \in \mathcal{NP}$.

Ha adnunk egy visszavezetést HÁLÓZAT-SAT-ról SAT-ra, akkor készen vagyunk: Az előző következmény (i) pontja és a polinomiális idejű redukció tranzitívítása alapján tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet vissza tudunk vezetni SAT-ra.

A fenti két lépés nagyon karakterisztikus miután megvan az első \mathcal{NP} -teljes problémánk.

Egy \mathcal{NP} -teljes problémából egy másik

Könnyű látni, hogy $\text{SAT} \in \mathcal{NP}$.

Ha adunk egy visszavezetést HÁLÓZAT-SAT-ról SAT-ra, akkor készen vagyunk: Az előző következmény (i) pontja és a polinomiális idejű redukció tranzitívítása alapján tetszőleges $L \in \mathcal{NP}$ nyelvet vissza tudunk vezetni SAT-ra.

A fenti két lépés nagyon karakterisztikus miután megvan az első \mathcal{NP} -teljes problémánk.

Nem kell egész \mathcal{NP} erejét megfogalmazni egy C nyelvvel. Elég egy \mathcal{NP} -teljes problémát megfogalmazni C segítségével.

A terv HÁLÓZAT-SAT \preceq SAT bizonyítására

A terv HÁLÓZAT-SAT \preceq SAT bizonyítására

Belátjuk, hogy

HÁLÓZAT-SAT \preceq BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT.

A terv HÁLÓZAT-SAT \preceq SAT bizonyítására

Belátjuk, hogy

HÁLÓZAT-SAT \preceq BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT.

Definíció: Boole-egyenletrendszer

$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, \ell$
egyenletrendszert, Boole-egyenletrendszernek nevezünk, ha φ_i és ψ_i Boole-formulák. Az $\{x_i\}_{i=1}^n$ változók egy 0-1/igaz-hamis értékadás az egyenletrendszer megoldása, ha minden $i = 1, 2, \dots, \ell$ esetén φ_i és ψ_i értéke ugyanaz.

A terv HÁLÓZAT-SAT \preceq SAT bizonyítására

Belátjuk, hogy

HÁLÓZAT-SAT \preceq BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT.

Definíció: Boole-egyenletrendszer

$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, \ell$
 egyenletrendszert, Boole-egyenletrendszernek nevezünk, ha φ_i és ψ_i Boole-formulák. Az $\{x_i\}_{i=1}^n$ változók egy 0-1/igaz-hamis értékadás az egyenletrendszer megoldása, ha minden $i = 1, 2, \dots, \ell$ esetén φ_i és ψ_i értéke ugyanaz.

Definíció

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT az a nyelv, ami a megoldható/kielégíthető Boole-egyenletrendszerek kódját tartalmazza.

Hálózatból egyenletrendszer

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat.

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót.

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót.
Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje.

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg.

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg.

Minden kapuhoz tartozik egy egyenlet

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg.

Minden kapuhoz tartozik egy egyenlet

$x_g = \neg x_h$, ha a g kapu negáció kapu és a h kapuból kapja inputját (\overrightarrow{hg} él a hálózatban).

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg.

Minden kapuhoz tartozik egy egyenlet

$x_g = \neg x_h$, ha a g kapu negáció kapu és a h kapuból kapja inputját (\overrightarrow{hg} él a hálózatban).

$x_g = x_h \wedge x_{h'}$, ha a g kapu hálózatbeli címkéje konjunkció és inputjait h és h' kapukból kapja.

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg.

Minden kapuhoz tartozik egy egyenlet

$x_g = \neg x_h$, ha a g kapu negáció kapu és a h kapuból kapja inputját (\overrightarrow{hg} él a hálózatban).

$x_g = x_h \wedge x_{h'}$, ha a g kapu hálózatbeli címkéje konjunkció és inputjait h és h' kapukból kapja.

$x_g = x_h \vee x_{h'}$, ha a g kapu hálózatbeli címkéje diszjunkció és inputjait h és h' kapukból kapja.

Hálózatból egyenletrendszer

Legyen H egy hálózat. Minden csúcsával azonosítunk egy változót. Ez input-csúcsok esetén a csúcs címkéje. A többi csúcsra (kapukra) mind különváltozókat feleltetünk meg.

Minden kapuhoz tartozik egy egyenlet

$x_g = \neg x_h$, ha a g kapu negáció kapu és a h kapuból kapja inputját (\overrightarrow{hg} él a hálózatban).

$x_g = x_h \wedge x_{h'}$, ha a g kapu hálózatbeli címkéje konjunkció és inputjait h és h' kapukból kapja.

$x_g = x_h \vee x_{h'}$, ha a g kapu hálózatbeli címkéje diszjunkció és inputjait h és h' kapukból kapja.

$x_g = 1$, ha a g kapu a hálózat output kapuja.

HÁLÓZAT-SAT \preceq

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq bizonyítása

HÁLÓZAT-SAT \preceq

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq bizonyítása

Ezzel megkaptuk egy Boole-egyenletrendszert a hálózatból.

HÁLÓZAT-SAT \preceq

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq bizonyítása

Ezzel megkaptuk egy Boole-egyenletrendszert a hálózathoz.

Ha a hálózat 1-et számol ki egy értékadáson (az értékadás kielégíthetőséget bizonyít), akkor a kapuk által kiszámolt bitekkel együtt egy megoldását kapjuk az egyenletrendszernek.

HÁLÓZAT-SAT \preceq BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq bizonyítása

Ezzel megkaptuk egy Boole-egyenletrendszert a hálózatból.

Ha a hálózat 1-et számol ki egy értékadáson (az értékadás kielégíthetőséget bizonyít), akkor a kapuk által kiszámolt bitekkel együtt egy megoldását kapjuk az egyenletrendszernek.

Fordítva is igaz, ha az egyenletrendszer megoldásából kiemeljük az eredeti input változók értékadásait, akkor ezen a hálózat 1-et számol ki (sőt minden kapu a hozzárendelt változó megoldásbeli értékét számolja ki).

HÁLÓZAT-SAT \preceq BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq bizonyítása

Ezzel megkaptuk egy Boole-egyenletrendszert a hálózatból.

Ha a hálózat 1-et számol ki egy értékadáson (az értékadás kielégíthetőséget bizonyít), akkor a kapuk által kiszámolt bitekkel együtt egy megoldását kapjuk az egyenletrendszernek.

Fordítva is igaz, ha az egyenletrendszer megoldásából kiemeljük az eredeti input változók értékadásait, akkor ezen a hálózat 1-et számol ki (sőt minden kapu a hozzárendelt változó megoldásbeli értékét számolja ki).

Azaz a hálózatból legyártott egyenletrendszer megoldhatósága ekvivalens azzal, hogy a hálózat kielégíthető.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

Az '=' jeleket ' \leftrightarrow ' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

Az '=' jeleket ' \leftrightarrow ' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazá teszi a hozzárendelt formulát.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

Az '=' jeleket ' \leftrightarrow ' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazá teszi a hozzárendelt formulát.

A kapott logikai kifejezések mindegyike legfeljebb három változót tartalmaznak. Könnyű őket CNF formára hozni.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

Az '=' jeleket ' \leftrightarrow ' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazá teszi a hozzárendelt formulát.

A kapott logikai kifejezések mindegyike legfeljebb három változót tartalmaznak. Könnyű őket CNF formára hozni.

Ha az összes egyenletnek megfeleltetett CNF formulát 'és' logikai jellel összekapcsoljuk, szintén CNF formát kapunk.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

Az '=' jeleket ' \leftrightarrow ' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazá teszi a hozzárendelt formulát.

A kapott logikai kifejezések mindegyike legfeljebb három változót tartalmaznak. Könnyű őket CNF formára hozni.

Ha az összes egyenletnek megfeleltetett CNF formulát 'és' logikai jellel összekapcsoljuk, szintén CNF formát kapunk.

Így az egyenletrendszerhez hozzárendeltünk egy φ CNF formulát.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

Az '=' jeleket ' \leftrightarrow ' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazá teszi a hozzárendelt formulát.

A kapott logikai kifejezések mindegyike legfeljebb három változót tartalmaznak. Könnyű őket CNF formára hozni.

Ha az összes egyenletnek megfeleltetett CNF formulát 'és' logikai jellel összekapcsoljuk, szintén CNF formát kapunk.

Így az egyenletrendszerhez hozzárendeltünk egy φ CNF formulát.

A hozzárendelés \mathcal{P} -ben kiszámolható.

BOOLE-EGYENLETRENDSZER-SAT \preceq SAT bizonyítása

Az '=' jeleket ' \leftrightarrow ' logikai jelekre cserélve az egyes egyenleteknek megfelelő formulákat kapunk.

Egy értékadás akkor és csak akkor teljesíti az egyenletet, ha igazgá teszi a hozzárendelt formulát.

A kapott logikai kifejezések mindegyike legfeljebb három változót tartalmaznak. Könnyű őket CNF formára hozni.

Ha az összes egyenletnek megfeleltetett CNF formulát 'és' logikai jellel összekapcsoljuk, szintén CNF formát kapunk.

Így az egyenletrendszerhez hozzárendeltünk egy φ CNF formulát.

A hozzárendelés \mathcal{P} -ben kiszámolható.

Az egyenletrendszer megoldhatósága ekvivalens a formula kielégíthetőségével.

Hol állunk, merre tartunk?

Hol állunk, merre tartunk?

Eddig több bonyolultsági osztályra láttunk teljes problémákat
($\mathcal{NL}, \mathcal{P}, \mathcal{NP}$).

Hol állunk, merre tartunk?

Eddig több bonyolultsági osztályra láttunk teljes problémákat ($\mathcal{NL}, \mathcal{P}, \mathcal{NP}$).

Az \mathcal{NP} osztály esete azonban különbözik.

Hol állunk, merre tartunk?

Eddig több bonyolultsági osztályra láttunk teljes problémákat ($\mathcal{NL}, \mathcal{P}, \mathcal{NP}$).

Az \mathcal{NP} osztály esete azonban különbözik. Igen sok, első látásra teljesen különböző, fontosnak tartott problémákról derült ki, hogy \mathcal{NP} -teljesek.

Hol állunk, merre tartunk?

Eddig több bonyolultsági osztályra láttunk teljes problémákat ($\mathcal{NL}, \mathcal{P}, \mathcal{NP}$).

Az \mathcal{NP} osztály esete azonban különbözik. Igen sok, első látásra teljesen különböző, fontosnak tartott problémákról derült ki, hogy \mathcal{NP} -teljesek.

Az osztály azért különösen fontos, mert a sejtett $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ összefüggés esetén ezek a problémákra nem létezik polinomiális idejű algoritmus.

Hol állunk, merre tartunk?

Eddig több bonyolultsági osztályra láttunk teljes problémákat ($\mathcal{NL}, \mathcal{P}, \mathcal{NP}$).

Az \mathcal{NP} osztály esete azonban különbözik. Igen sok, első látásra teljesen különböző, fontosnak tartott problémákról derült ki, hogy \mathcal{NP} -teljesek.

Az osztály azért különösen fontos, mert a sejtett $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ összefüggés esetén ezek a problémákra nem létezik polinomiális idejű algoritmus. Azaz azt mondhatjuk rájuk, hogy elméleti sejtések miatt hatékonyan nem kezelhetőnek gondoljuk őket.

CNF 3 méretű klózokkal, legfeljebb három méretű klózokkal

CNF 3 méretű klózokkal, legfeljebb három méretű klózokkal

Legyen $(= 3)$ -SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz. Legyen (≤ 3) -SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz legfeljebb 3 literált tartalmaz.

CNF 3 méretű klózokkal, legfeljebb három méretű klózokkal

Legyen $(= 3)$ -SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz. Legyen (≤ 3) -SAT azon kielégíthető CNF formulák kódja, melyekben minden klóz legfeljebb 3 literált tartalmaz.

Lemma

$(= 3)$ -SAT $\preceq_{\mathcal{P}}$ (≤ 3) -SAT, továbbá (≤ 3) -SAT $\preceq_{\mathcal{P}}$ $(= 3)$ -SAT.

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(= 3)$ -SAT probléma egy speciális esete (≤ 3) -SAT-nek.

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(= 3)$ -SAT probléma egy speciális esete (≤ 3) -SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3) -SAT egy inputja.

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(= 3)$ -SAT probléma egy speciális esete (≤ 3) -SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3) -SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózik mérete három legyen.

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(= 3)$ -SAT probléma egy speciális esete (≤ 3) -SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3) -SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózik mérete három legyen.

Egy φ input 3 méretű klózeit tartjuk meg, míg a kicsi klózaikkal az alábbi operációt végezzük el (párhuzamosan):

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(= 3)$ -SAT probléma egy speciális esete (≤ 3) -SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3) -SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózik mérete három legyen.

Egy φ input 3 méretű klózeit tartjuk meg, míg a kicsi klózaikkal az alábbi operációt végezzük el (párhuzamosan): Egy $C : \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ „kicsi” klózt helyettesítsünk a $\langle \ell_1, \ell_2, u \rangle$, $\langle \ell_1, \ell_2, \bar{u} \rangle$ klózpárral.

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(= 3)$ -SAT probléma egy speciális esete (≤ 3) -SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3) -SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózik mérete három legyen.

Egy φ input 3 méretű klózeit tartjuk meg, míg a kicsi klózaikkal az alábbi operációt végezzük el (párhuzamosan): Egy $C : \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ „kicsi” klózt helyettesítsünk a $\langle \ell_1, \ell_2, u \rangle$, $\langle \ell_1, \ell_2, \bar{u} \rangle$ klózpárral.

Természetesen formulánk kielégítése esetén C is igazzá válik, ami a C -t helyettesítő klózokat is igazzá teszi. Fordítva: A C -t helyettesítő klózpárt csak úgy tudjuk kielégíteni, ha az eredeti C -t is kielégítjük.

Lemma bizonyítása

Az első redukció nyilvánvaló, hisz a $(= 3)$ -SAT probléma egy speciális esete (≤ 3) -SAT-nek.

Fordítva legyen φ a (≤ 3) -SAT egy inputja. Egy a kielégíthetőség szempontjából ekvivalens formulává alakítjuk, úgy, hogy a klózik mérete három legyen.

Egy φ input 3 méretű klózeit tartjuk meg, míg a kicsi klózaikkal az alábbi operációt végezzük el (párhuzamosan): Egy $C : \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ „kicsi” klózt helyettesítsünk a $\langle \ell_1, \ell_2, u \rangle$, $\langle \ell_1, \ell_2, \bar{u} \rangle$ klózpárral.

Természetesen formulánk kielegítése esetén C is igazzá válik, ami a C -t helyettesítő klózokat is igazzá teszi. Fordítva: A C -t helyettesítő klózpárt csak úgy tudjuk kielégíteni, ha az eredeti C -t is kielégítjük.

A fenti példában a kicsi klóz két literált tartalmazott. Ennél is kisebb klózokra is alkalmazható ötletünk. Eredménye: ekvivalens formula eggyel nagyobb klózokkal. Ötletünket \square iterálni kell.

Ekvivalencia

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekkor a két probléma egyenértékű.

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekkor a két probléma egyenértékű. A fenti tétel egy ekvivalenciát állít.

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekkor a két probléma egyenértékű. A fenti tétel egy ekvivalenciát állít. Ez alapján a két probléma egyenértékű.

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekkor a két probléma egyenértékű. A fenti tétel egy ekvivalenciát állít. Ez alapján a két probléma egyenértékű.

Ha a 3-SAT nyelvet említjük, akkor alatta a fenti két nyelv bármelyikét érthetjük.

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekkor a két probléma egyenértékű. A fenti tétel egy ekvivalenciát állít. Ez alapján a két probléma egyenértékű.

Ha a 3-SAT nyelvet említjük, akkor alatta a fenti két nyelv bármelyikét érthetjük. Természetesen, ha 3-SAT-ot redukáljuk, akkor az input CNF-ről feltesszük, hogy minden klóza három literált tartalmaz.

Ekvivalencia

Definíció

Ha két nyelv „oda-vissza” redukálható, akkor ekvivalensnek (polinomiális redukcióra) mondjuk.

Ekkor a két probléma egyenértékű. A fenti tétel egy ekvivalenciát állít. Ez alapján a két probléma egyenértékű.

Ha a 3-SAT nyelvet említjük, akkor alatta a fenti két nyelv bármelyikét érthetjük. Természetesen, ha 3-SAT-ot redukáljuk, akkor az input CNF-ről feltesszük, hogy minden klóza három literált tartalmaz. Ha 3-SAT-ra redukálunk, akkor nem zavar, ha a redukációs algoritmus háromnál kisebb klózokat is „gyárt”.

3-SAT

3-SAT

Tétel

3-SAT \mathcal{NP} -teljes.

3-SAT

Tétel

3-SAT \mathcal{NP} -teljes.

3-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális (a SAT speciális esete).

SAT redukciója 3-SAT-ra

SAT redukciója 3-SAT-ra

Emlékeztető: Mit is állítunk?

Egy SAT \rightarrow 3-SAT: $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvény kell, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in \text{SAT} \Leftrightarrow \mathcal{C}' \in \text{3-SAT}$.

SAT redukciója 3-SAT-ra

Emlékeztető: Mit is állítunk?

Egy SAT \rightarrow 3-SAT: $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvény kell, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in \text{SAT} \Leftrightarrow \mathcal{C}' \in \text{3-SAT}$.

A hozzárendelés a következő lesz: a $\mathcal{C} = \langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$ klózra vezessünk be u_1, \dots, u_{k-1} új változókat és a következő klózokat vegyük fel \mathcal{C}' -be:

$$\langle \ell_1, \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \bar{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$$

SAT redukciója 3-SAT-ra

Emlékeztető: Mit is állítunk?

Egy SAT \rightarrow 3-SAT: $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ polinomidőben kiszámítható függvény kell, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{C} \in \text{SAT} \Leftrightarrow \mathcal{C}' \in \text{3-SAT}$.

A hozzárendelés a következő lesz: a $\mathcal{C} = \langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$ klózra vezessünk be u_1, \dots, u_{k-1} új változókat és a következő klózokat vegyük fel \mathcal{C}' -be:

$$\langle \ell_1, \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \bar{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$$

Ezt minden \mathcal{C} -beli klózra végezzük el. Amit kapunk, az egy 3-CNF.

Bizonyítás

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

- (i) \mathcal{C}' meghatározható (\mathcal{C} kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

- (i) \mathcal{C}' meghatározható (\mathcal{C} kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.
- (ii) \mathcal{C} pontosan akkor kielégíthető, ha \mathcal{C}' az.

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

- (i) \mathcal{C}' meghatározható (\mathcal{C} kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.
- (ii) \mathcal{C} pontosan akkor kielégíthető, ha \mathcal{C}' az.

Ha \mathcal{C} kielégíthető, akkor vegyünk egy kielégíthető kiértékelését.

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

- (i) \mathcal{C}' meghatározható (\mathcal{C} kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.
- (ii) \mathcal{C} pontosan akkor kielégíthető, ha \mathcal{C}' az.

Ha \mathcal{C} kielégíthető, akkor vegyünk egy kielégíthető kiértékelését.

$\mathcal{C} = \langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$ klóz esetén legyen ℓ_i a klózban az első igaz literál.

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

- (i) C' meghatározható (C kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.
- (ii) C pontosan akkor kielégíthető, ha C' az.

Ha C kielégíthető, akkor vegyünk egy kielégíthető kiértékelését.

$C = \langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$ klóz esetén legyen ℓ_i a klózban az első igaz literál.

C a

$\langle \ell_1, \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \bar{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$

klózokat hozza be C' -be.

Bizonyítás

A következőket kell belátni:

- (i) C' meghatározható (C kódjának hosszában) polinomiális időben. Ez nyilvánvaló.
- (ii) C pontosan akkor kielégíthető, ha C' az.

Ha C kielégíthető, akkor vegyünk egy kielégíthető kiértékelését.

$C = \langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$ klóz esetén legyen ℓ_i a klózban az első igaz literál.

C a

$$\langle \ell_1, \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \bar{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle$$

klózokat hozza be C' -be.

Ekkor ℓ_i értékeit megtartva, $u_1 = \dots = u_{i-1} = h$ és

$u_i = \dots = u_{k-1} = i$ kiértékelés kielégíti a C -nek megfelelő

klózokat.

Bizonyítás, a másik irány

Bizonyítás, a másik irány

\mathcal{C}' -nek nincs olyan kielégítő kiértékelése, amelyben valamely \mathcal{C} -beli $\mathcal{C} = \langle \ell_1, \dots, \ell_k \rangle$ klóz esetén $\ell_1 = \dots = \ell_k = h$ lenne, mivel az

$$\langle \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \bar{u}_{k-1} \rangle \langle u_{k-1} \rangle$$

klózokat tartalmazó formula kielégíthetetlen.

k -SAT

k -SAT

Definíció: k -SAT

Legyen k -SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz legfeljebb k literált tartalmaz (k -CNF). Kielégíthető-e?

k -SAT

Definíció: k -SAT

Legyen k -SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz legfeljebb k literált tartalmaz (k -CNF). Kielégíthető-e?

Megjegyzés

Nyilván igaz a következő redukciólánc:

$$2\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} 3\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} 4\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} \dots \preceq_{\mathcal{P}} k\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} \dots \preceq_{\mathcal{P}} \text{SAT}.$$

k-SAT

Definíció: k-SAT

Legyen k-SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz legfeljebb k literált tartalmaz (k-CNF). Kielégíthető-e?

Megjegyzés

Nyilván igaz a következő redukciólánc:

$$2\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} 3\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} 4\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} \dots \preceq_{\mathcal{P}} k\text{-SAT} \preceq_{\mathcal{P}} \dots \preceq_{\mathcal{P}} \text{SAT}.$$

Megjegyzés

Egyszerűen látható, hogy $2\text{-SAT} \in \mathcal{P}$. Sőt $2\text{-SAT} \in \text{co}\mathcal{NL}$.

NEM-MIND-IGAZ-SAT

NEM-MIND-IGAZ-SAT

Definíció

\forall egy kiértékelése egy klózt homogénné tesz, ha a klóz minden literálja ugyanazt a logikai értéket kapja. Azaz a klóz akkor nem lesz homogén, ha igazzá értékelődik ki (lesz benne igaz értékű literál), de nem minden literál igaz értékű (lesz benne hamis literál is)

Legyen

$$\text{NEM-MIND-IGAZ-SAT} = \{[\varphi] : \varphi \text{ CNF, amely kielégíthető úgy,} \\ \text{hogy ne legyen olyan klóz,} \\ \text{amelyben minden literál igaz}\}$$

A tétel

A tétel

Tétel

NEM-MIND-IGAZ-SAT \mathcal{NP} -teljes.

A tétel

Tétel

NEM-MIND-IGAZ-SAT \mathcal{NP} -teljes.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális.

A tétel

Tétel

NEM-MIND-IGAZ-SAT \mathcal{NP} -teljes.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális.

A bizonyítás befejezéséhez kell egy másik \mathcal{NP} -teljes probléma és egy redukció.

A tétel

Tétel

NEM-MIND-IGAZ-SAT \mathcal{NP} -teljes.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális.

A bizonyítás befejezéséhez kell egy másik \mathcal{NP} -teljes probléma és egy redukció. Ezt később ismertetjük.

A tétel

Tétel

NEM-MIND-IGAZ-SAT \mathcal{NP} -teljes.

NEM-MIND-IGAZ-SAT $\in \mathcal{NP}$ triviális.

A bizonyítás befejezéséhez kell egy másik \mathcal{NP} -teljes probléma és egy redukció. Ezt később ismertetjük.

Azonban ennek a tételnek egy következményét most ismertetjük.

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Legyen NEM-MIND-IGAZ-3-SAT azon CNF-ek halmaza, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz és van olyan kiértékelése a változóknak, hogy φ összes klóza nem homogén.

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Legyen NEM-MIND-IGAZ-3-SAT azon CNF-ek halmaza, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz és van olyan kiértékelése a változóknak, hogy φ összes klóza nem homogén.

Következmény

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT \mathcal{NP} -teljes.

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Legyen NEM-MIND-IGAZ-3-SAT azon CNF-ek halmaza, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz és van olyan kiértékelése a változóknak, hogy φ összes klóza nem homogén.

Következmény

NEM-MIND-IGAZ-3-SAT \mathcal{NP} -teljes.

A bizonyítás NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT redukció lesz.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Lemásoljuk a SAT \preceq 3-SAT visszavezetést.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Lemásoljuk a SAT \preceq 3-SAT visszavezetést.

Ha egy NEM-MIND-IGAZ-SAT φ inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan $R(\varphi)$ CNF formulát kapunk, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Lemásoljuk a SAT \preceq 3-SAT visszavezetést.

Ha egy NEM-MIND-IGAZ-SAT φ inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan $R(\varphi)$ CNF formulát kapunk, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz.

Tegyük fel, hogy $\varphi \in$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, azaz a változók alkalmas kiértékelésénél minden klózban lesz igaz és hamis literál is.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Lemásoljuk a SAT \preceq 3-SAT visszavezetést.

Ha egy NEM-MIND-IGAZ-SAT φ inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan $R(\varphi)$ CNF formulát kapunk, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz.

Tegyük fel, hogy $\varphi \in$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, azaz a változók alkalmas kiértékelésénél minden klózban lesz igaz és hamis literál is.

Tegyük fel, hogy C egy klóz és egy benne lévő ℓ_i literál igaz, míg ℓ_j literál hamis. Feltehetjük, hogy $i < j$.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Lemásoljuk a SAT \preceq 3-SAT visszavezetést.

Ha egy NEM-MIND-IGAZ-SAT φ inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan $R(\varphi)$ CNF formulát kapunk, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz.

Tegyük fel, hogy $\varphi \in$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, azaz a változók alkalmas kiértékelésénél minden klózban lesz igaz és hamis literál is.

Tegyük fel, hogy C egy klóz és egy benne lévő ℓ_i literál igaz, míg ℓ_j literál hamis. Feltehetjük, hogy $i < j$.

Nézzük meg a redukció mit konstruál C -ből:

$$\langle \ell_1, \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \bar{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle.$$

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

Lemásoljuk a SAT \preceq 3-SAT visszavezetést.

Ha egy NEM-MIND-IGAZ-SAT φ inputra alkalmazzuk az előző visszavezetést, akkor egy olyan $R(\varphi)$ CNF formulát kapunk, amelyben minden klóz legfeljebb három literált tartalmaz.

Tegyük fel, hogy $\varphi \in$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, azaz a változók alkalmas kiértékelésénél minden klózban lesz igaz és hamis literál is.

Tegyük fel, hogy C egy klóz és egy benne lévő ℓ_i literál igaz, míg ℓ_j literál hamis. Feltehetjük, hogy $i < j$.

Nézzük meg a redukció mit konstruál C -ből:

$$\langle \ell_1, \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \ell_2, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \ell_i, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \ell_{k-1}, \bar{u}_{k-1} \rangle, \langle u_{k-1}, \ell_k \rangle.$$

A régi változók értékeit tartsuk meg, az alábbiakban leírjuk, hogy az új változók hogyan kapják értékeiket.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

(folytatás)

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT (folytatás)

ℓ_i után jön egy új változó negáltja. Az új változónak igaz értéket adva az ℓ_i literál „kis” klózában lesz hamis és igaz érték is. Jobbra haladva a további új változóknak igaz értéket adva eljutunk ℓ_j „kis” klózához. Közben minden klózba kerül igaz és hamis érték is.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT (folytatás)

ℓ_i után jön egy új változó negáltja. Az új változónak igaz értéket adva az ℓ_i literál „kis” klózában lesz hamis és igaz érték is. Jobbra haladva a további új változóknak igaz értéket adva eljutunk ℓ_j „kis” klózához. Közben minden klózba kerül igaz és hamis érték is.

A szélső klózokban ugyanez elérhető, ha szélről középfelé haladunk és így osztjuk ki az új változók értékeit a hiányzó logikai értéket pótolva.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT (folytatás)

ℓ_j után jön egy új változó negáltja. Az új változónak igaz értéket adva az ℓ_j literál „kis” klózában lesz hamis és igaz érték is. Jobbra haladva a további új változóknak igaz értéket adva eljutunk ℓ_j „kis” klózához. Közben minden klózba kerül igaz és hamis érték is.

A szélső klózekban ugyanez elérhető, ha szélről középfelé haladunk és így osztjuk ki az új változók értékeit a hiányzó logikai értéket pótolva.

Összegezve kaptuk, hogy

$$R(\varphi) \in \text{NEM-MIND-IGAZ-3-SAT}.$$

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

(folytatás)

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT (folytatás)

Fordítva tegyük fel, hogy $R(\varphi) \in \text{NEM-MIND-IGAZ-3-SAT}$. Láttuk, hogy egy kiértékelés, amely minden $R(\varphi)$ klózt kielégít (ilyen egy nem-mind-igaz kiértékelés) akkor elképzelhetetlen, hogy az eredeti klózok ne tartalmazzanak igaz értéket.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT

(folytatás)

Fordítva tegyük fel, hogy $R(\varphi) \in \text{NEM-MIND-IGAZ-3-SAT}$. Láttuk, hogy egy kiértékelés, amely minden $R(\varphi)$ klózt kielégít (ilyen egy nem-mind-igaz kiértékelés) akkor elképzelhetetlen, hogy az eredeti klózok ne tartalmazzanak igaz értéket.

Azt kell csak kizárnunk, hogy $R(\varphi)$ egy nem-mind-igaz kiértékelése az eredeti változókra megszorítva egy eredeti klóz mindegyik literálját igazá tegye.

NEM-MIND-IGAZ-SAT \preceq NEM-MIND-IGAZ-3-SAT (folytatás)

Fordítva tegyük fel, hogy $R(\varphi) \in \text{NEM-MIND-IGAZ-3-SAT}$. Láttuk, hogy egy kiértékelés, amely minden $R(\varphi)$ klózt kielégít (ilyen egy nem-mind-igaz kiértékelés) akkor elképzelhetetlen, hogy az eredeti klózok ne tartalmazzanak igaz értéket.

Azt kell csak kizárnunk, hogy $R(\varphi)$ egy nem-mind-igaz kiértékelése az eredeti változókra megszorítva egy eredeti klóz mindegyik literálját igazzá tegye.

Ez azt jelentené, hogy a

$$\langle \bar{u}_1 \rangle, \langle u_1, \bar{u}_2 \rangle, \dots, \langle u_{i-1}, \bar{u}_i \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, \bar{u}_{k-1} \rangle \langle u_{k-1} \rangle$$

klózok mindegyikébe lenniük kell hamis értéknek. Ez (mint korábban) lehetetlen.

Szünet



Színezési problémák

Színezési problémák

Definíció

k -SZÍNEZHETŐSÉG a következő probléma: adott egy gráf, kiszínezhető-e k színnel?

Színezési problémák

Definíció

k -SZÍNEZHETŐSÉG a következő probléma: adott egy gráf, kiszínezhető-e k színnel?

Tétel

3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -teljes.

Színezési problémák

Definíció

k -SZÍNEZHETŐSÉG a következő probléma: adott egy gráf, kiszínezhető-e k színnel?

Tétel

3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -teljes.

3-SZÍNEZHETŐSÉG $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció

3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai n , h , \mathcal{C} változói, azok negáltjai, és minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 csúcsötös.

3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai n , h , \mathcal{C} változói, azok negáltjai, és minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 csúcsötös. Ha \mathcal{C} változói száma n és m darab 3 literált tartalmazó klózból áll, akkor a G gráf csúcsainak száma

3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai n , h , \mathcal{C} változói, azok negáltjai, és minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 csúcsötös. Ha \mathcal{C} változói száma n és m darab 3 literált tartalmazó klózból áll, akkor a G gráf csúcsainak száma $2 + 2n + 5m$.

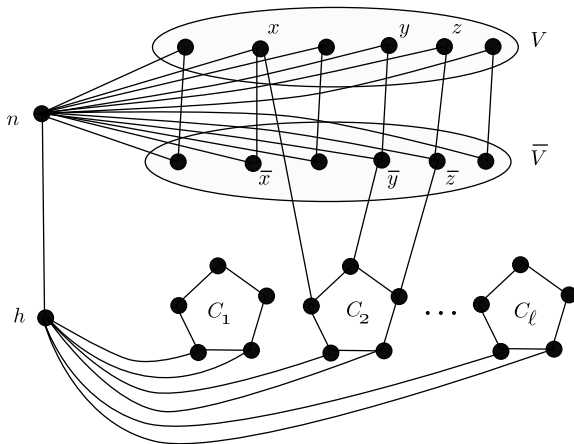
3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai n , h , \mathcal{C} változói, azok negáltjai, és minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 csúcsötös. Ha \mathcal{C} változói száma n és m darab 3 literált tartalmazó klózból áll, akkor a G gráf csúcsainak száma $2 + 2n + 5m$.

$G_{\mathcal{C}}$ élei a következők lesznek: nh , minden x_i változóra $x_i\bar{x}_i$, nx_i és $n\bar{x}_i$, illetve minden $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ klózra C_1C_2 , C_2C_3 , C_3C_4 , C_4C_5 , C_5C_1 , C_1z_1 , C_2z_2 , C_3z_3 , C_4h , C_5h .

3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció képen

3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció képen



3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció szóban

3-SAT \preceq 3-SZÍNEZHETŐSÉG redukció szóban

Könnyű ellenőrizni, hogy G_C polinom időben meghatározható, és pontosan akkor 3-színezhető, ha C kielégíthető (felhasználva azt az észrevételt, hogy z_1, z_2, z_3, h 3-színezése pontosan akkor terjeszthető ki $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ klózhoz tartozó ötszögre jó színezésként, ha a 4 csúcs színe nem azonos).

További színezési problémák

További színezési problémák

Megjegyzés

Könnyen ellenőrizhető, hogy 2 -SZÍNEZHETŐSÉG $\in co\mathcal{NL}$.

További színezési problémák

Megjegyzés

Könnyen ellenőrizhető, hogy 2-SZÍNEZHETŐSÉG $\in co\mathcal{NL}$.

Tétel

SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -teljes.

További színezési problémák

Megjegyzés

Könnyen ellenőrizhető, hogy 2-SZÍNEZHETŐSÉG $\in co\mathcal{NL}$.

Tétel

SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -teljes.

\mathcal{NP} -beliség triviális.

A bizonyítás

A bizonyítás

SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -nehéz:
3-SZÍNEZHETŐSÉGET vezetjük rá vissza.

A bizonyítás

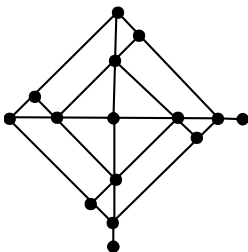
SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -nehéz:
3-SZÍNEZHETŐSÉGET vezetjük rá vissza.

Lerajzolás után a kereszteződő éleket kell helyettesíteni az alábbi kis gráffal:

A bizonyítás

SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -nehéz:
 3-SZÍNEZHETŐSÉGET vezetjük rá vissza.

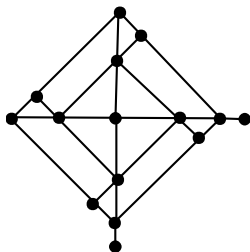
Lerajzolás után a kereszteződő éleket kell helyettesíteni az alábbi kis gráffal:



A bizonyítás

SÍKGRÁF-3-SZÍNEZHETŐSÉG \mathcal{NP} -nehéz:
 3-SZÍNEZHETŐSÉGET vezetjük rá vissza.

Lerajzolás után a kereszteződő éleket kell helyettesíteni az alábbi kis gráffal:



Azt kell meggondolni, hogy megtehetőek a helyettesítések úgy, hogy nem hoznak be új metszéseket, és a keletkezett gráf pontosan akkor 3-színezhető, ha az eredeti is.

Még további színezési problémák

Még további színezési problémák

Észrevétel

A 2-színezhetőség $co\mathcal{NL}$ -beli.

Még további színezési problémák

Észrevétel

A 2-színezhetőség $co\mathcal{NL}$ -beli.

Észrevétel (Appel, Haken 1977)

SÍKGRÁF-4-SZÍNEZHETŐSÉG triviális.

Még további színezési problémák

Észrevétel

A 2-színezhetőség $\text{co}\mathcal{NL}$ -beli.

Észrevétel (Appel, Haken 1977)

SÍKGRÁF-4-SZÍNEZHETŐSÉG triviális.

Definíció

SZÍNEZÉSI-PROBLÉMA: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -nek jó k -színezése?

Tétel

SZÍNEZÉSI-PROBLÉMA \mathcal{NP} -teljes.

Bizonyítás

Bizonyítás

SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

Bizonyítás

SZÍNEZÉSI PROBLÉMA $\in \mathcal{NP}$: tanú egy színezés, polinom időben ellenőrizhető, jó színezés-e.

A SZÍNEZÉSI PROBLÉMA \mathcal{NP} -nehéz, mivel a 3-SZÍNEZHETŐSÉG általánosítása.

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ

Definíció

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k -elemű független csúcshalmaz?

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ

Definíció

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k -elemű független csúcshalmaz?

Tétel

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ \mathcal{NP} -teljes.

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ

Definíció

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k -elemű független csúcshalmaz?

Tétel

FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ \mathcal{NP} -teljes.

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ $\in \mathcal{NP}$: tanú egy független csúcshalmaz.

Bizonyítás I

Bizonyítás I

SAT visszavezetése:

$$\mathcal{C} = (C_1 = \langle z_{1,1}, \dots, z_{1,r_1} \rangle, \dots, C_k = \langle z_{k,1}, \dots, z_{k,r_k} \rangle) \mapsto (G_{\mathcal{C}}, k)$$

$((i, j)$ jelentése: i -edik klóz j -edik literálja),

$$V(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j) : i \leq k, j \leq r_i\},$$

$$E(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j), (i', j') : i = i' \text{ vagy } z_{i,j} = \bar{z}_{i',j'}\}.$$

Bizonyítás I

SAT visszavezetése:

$$\mathcal{C} = (C_1 = \langle z_{1,1}, \dots, z_{1,r_1} \rangle, \dots, C_k = \langle z_{k,1}, \dots, z_{k,r_k} \rangle) \mapsto (G_{\mathcal{C}}, k)$$

$((i, j)$ jelentése: i -edik klóz j -edik literálja),

$$V(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j) : i \leq k, j \leq r_i\},$$

$$E(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j), (i', j') : i = i' \text{ vagy } z_{i,j} = \bar{z}_{i',j'}\}.$$

Könnyű meggondolni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható és pontosan akkor van benne k elemű független halmaz, ha \mathcal{C} kielégíthető.

Bizonyítás I

SAT visszavezetése:

$$\mathcal{C} = (C_1 = \langle z_{1,1}, \dots, z_{1,r_1} \rangle, \dots, C_k = \langle z_{k,1}, \dots, z_{k,r_k} \rangle) \mapsto (G_{\mathcal{C}}, k)$$

$((i, j)$ jelentése: i -edik klóz j -edik literálja),

$$V(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j) : i \leq k, j \leq r_i\},$$

$$E(G_{\mathcal{C}}) = \{(i, j), (i', j') : i = i' \text{ vagy } z_{i,j} = \bar{z}_{i',j'}\}.$$

Könnyű meggondolni, hogy $G_{\mathcal{C}}$ polinom időben meghatározható és pontosan akkor van benne k elemű független halmaz, ha \mathcal{C} kielégíthető.

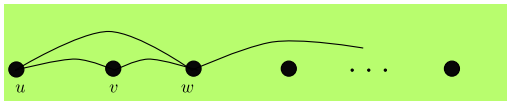
Egy kiértékelés akkor kielégítő, ha minden klózból ki tudunk választani egy igaz literált (az élek garantálják, hogy változó és negáltja egyszerre ne szerepeljenek, illetve minden klózból legfeljebb egy literált válasszunk).

Bizonyítás II

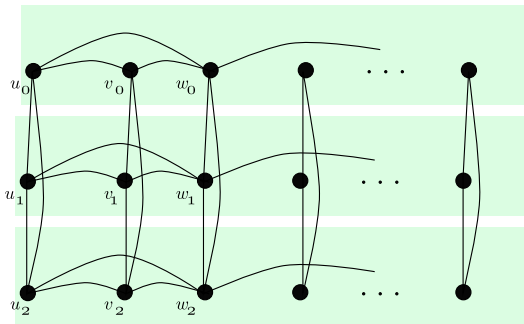
Bizonyítás II

SZÍNEZÉSI PROBLÉMA visszavezetése: $G \mapsto (G', |V(G)|)$, ahol
 $V(G') = \{(v, i) : v \in V(G), i \in [3]\}$ (itt (v, i) jelentése az, hogy v az i szint kapja),
 $E(G') = \{(v, i)(v', i') : v = v', i \neq i' \text{ vagy } vv' \in E(G), i = i'\}$
(vagyis: élek a tiltások, tiltott, hogy egy csúcs több szint kapjon vagy összekötött csúcsok azonos szint kapjanak).

Bizonyítás II képen



G



G_0

G_1

G_2

Bizonyítás II szóban

Bizonyítás II szóban

Könnyű meggondolni, hogy G' és $|V(G)|$ is polinom időben meghatározható, és pontosan akkor van G' -ben $|V(G)|$ elemű független halmaz, ha G gráf 3-színezhető.

Megjegyzés

Megjegyzés

Megjegyzés

Szemben a SZÍNEZÉSI PROBLÉMÁval, ha k nem az input része, hanem konstans, akkor az így kapott k -FÜGGETLEN HALMAZ probléma már polinom időben megoldható (egy n csúcsú gráfnak n -ben polinomiális sok k -elemű részalmaza van, ha k fix).

KLIKK, LEFOGÓ-PONTHALMAZ

KLIKK, LEFOGÓ-PONTHALMAZ

Definíció

KLIKK probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám.
Van-e G -ben k méretű klikk?

KLIKK, LEFOGÓ-PONTHALMAZ

Definíció

KLIKK probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k méretű klikk?

Definíció

LEFOGÓ-PONTHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k -elemű lefogó ponthalmaz?

KLIKK, LEFOGÓ-PONTHALMAZ

Definíció

KLIKK probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k méretű klikk?

Definíció

LEFOGÓ-PONTHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k -elemű lefogó ponthalmaz?

Következmény

KLIKK és LEFOGÓ-PONTHALMAZ \mathcal{NP} -teljesek.

KLIKK, LEFOGÓ-PONTHALMAZ

Definíció

KLIKK probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k méretű klikk?

Definíció

LEFOGÓ-PONTHALMAZ: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben k -elemű lefogó ponthalmaz?

Következmény

KLIKK és LEFOGÓ-PONTHALMAZ \mathcal{NP} -teljesek.

Ekvivalensek a FÜGGETLEN-CSÚCSHALMAZ problémával.

HAMILTON

HAMILTON

Definíció

HAMILTON, azon gráfok kódjait tartalmazó nyelv, amelyek Hamilton-körrel rendelkeznek.

HAMILTON

Definíció

HAMILTON, azon gráfok kódjait tartalmazó nyelv, amelyek Hamilton-körrel rendelkeznek.

A HAMILTON nyelv döntési feladat azt jelenti, hogy adott gráfról el kell döntenünk, hogy rendelkezik-e Hamilton körrel.

HAMILTON

Definíció

HAMILTON, azon gráfok kódjait tartalmazó nyelv, amelyek Hamilton-körrel rendelkeznek.

A HAMILTON nyelv döntési feladat azt jelenti, hogy adott gráfról el kell döntenünk, hogy rendelkezik-e Hamilton körrel.

Tétel

HAMILTON \mathcal{NP} -teljes.

HAMILTON

Definíció

HAMILTON, azon gráfok kódjait tartalmazó nyelv, amelyek Hamilton-körrel rendelkeznek.

A HAMILTON nyelv döntési feladat azt jelenti, hogy adott gráfról el kell döntenünk, hogy rendelkezik-e Hamilton körrel.

Tétel

HAMILTON \mathcal{NP} -teljes.

HAMILTON $\in \mathcal{NP}$ nyilvánvaló.

Az állítás kibontva

Az állítás kibontva

Belátjuk, hogy LEFOGÓ-PONTHALMAZ visszavezethető HAMILTON-ra.

Az állítás kibontva

Belátjuk, hogy LEFOGÓ-PONTHALMAZ visszavezethető HAMILTON-ra. Azaz, ha adott egy G gráf és $k \in \mathbb{N}$, akkor hatékonyan definiálhatunk egy R gráfot, amely pontosan akkor rendelkezik Hamilton-körrel, ha G lefogható k csúccsal.

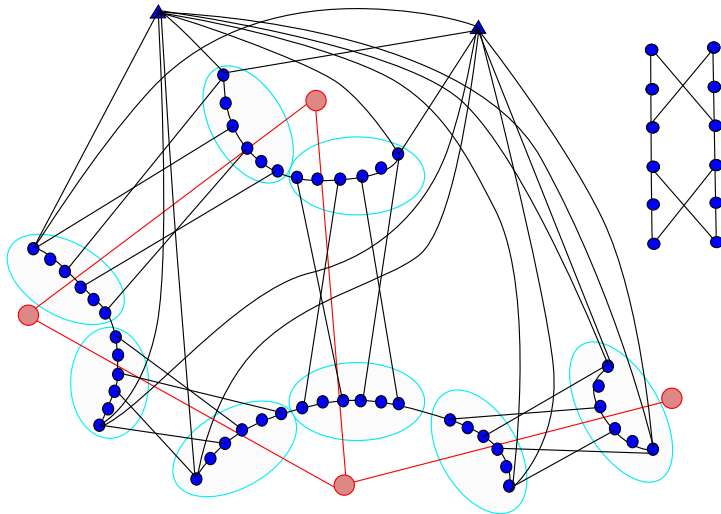
Az állítás kibontva

Belátjuk, hogy LEFOGÓ-PONTHALMAZ visszavezethető HAMILTON-ra. Azaz, ha adott egy G gráf és $k \in \mathbb{N}$, akkor hatékonyan definiálhatunk egy R gráfot, amely pontosan akkor rendelkezik Hamilton-körrel, ha G lefogható k csúccsal.

A redukciót egy példával/ábrával demonstráljuk. Az általános, formális leírás könnyen kiolvasható az ábrából, ezt az érdeklődő hallgatóra bízunk.

Bizonyítás képen: G piros, $k = 2$, R kék

Bizonyítás képen: G piros, $k = 2$, R kék



A kép szóban

A kép szóban

Minden G -beli csúcsnak megfelel egy-egy út, amelyekben hatos blokkokban (világos kék ellipszisekkel bekerítettek) szerepelnek csúcsok (kék, kerek csúcsok).

A kép szóban

Minden G -beli csúcsnak megfelel egy-egy út, amelyekben hatos blokkokban (világos kék ellipszisekkel bekerítettek) szerepelnek csúcsok (kék, kerek csúcsok).

Egy csúcsnak megfelelő úton annyi blokk van, ahány él illeszkedik a csúcsra. A blokkok és a csúcs-él illeszkedések azonosítottak.

A kép szóban

Minden G -beli csúcsnak megfelel egy-egy út, amelyekben hatos blokkokban (világos kék ellipszisekkel bekerítettek) szerepelnek csúcsok (kék, kerek csúcsok).

Egy csúcsnak megfelelő úton annyi blokk van, ahány él illeszkedik a csúcsra. A blokkok és a csúcs-él illeszkedések azonosítottak.

Így minden élnek megfelel két hatos csúcs-blokk, amely a jobb oldalon szemléltetett módon összekötöttünk.

A kép szóban

Minden G -beli csúcshoz megfelel egy-egy út, amelyekben hatos blokkokban (világos kék ellipszisekkel bekerítettek) szerepelnek csúcsok (kék, kerek csúcsok).

Egy csúcshoz megfelelő úton annyi blokk van, ahány él illeszkedik a csúcsra. A blokkok és a csúcs-él illeszkedések azonosítottak.

Így minden élnek megfelel két hatos csúcs-blokk, amely a jobb oldalon szemléltetett módon összekötöttünk.

$k = 2$ érték alapján $k = 2$ új csúcsot is felvettünk (kék, háromszög alakú csúcsok).

A kép szóban

Minden G -beli csúcsnak megfelel egy-egy út, amelyekben hatos blokkokban (világos kék ellipszisekkel bekerítettek) szerepelnek csúcsok (kék, kerek csúcsok).

Egy csúcsnak megfelelő úton annyi blokk van, ahány él illeszkedik a csúcsra. A blokkok és a csúcs-él illeszkedések azonosítottak.

Így minden élnek megfelel két hatos csúcs-blokk, amely a jobb oldalon szemléltetett módon összekötöttünk.

$k = 2$ érték alapján $k = 2$ új csúcsot is felvettünk (kék, háromszög alakú csúcsok).

Ezeket pontosan az összes csúcshoz rendelt utak két-két végpontjával kötjük össze.

A bizonyítás

A bizonyítás

Tegyük fel, hogy ebben a gráfban van Hamilton-kör. Ekkor ezt a k háromszög alakú csúcs k darab ívre szakítja szét.

A bizonyítás

Tegyük fel, hogy ebben a gráfban van Hamilton-kör. Ekkor ezt a k háromszög alakú csúcs k darab ívre szakítja szét.

Az ívek egy-egy út végpontjában kezdődnek, végződnek.

A bizonyítás

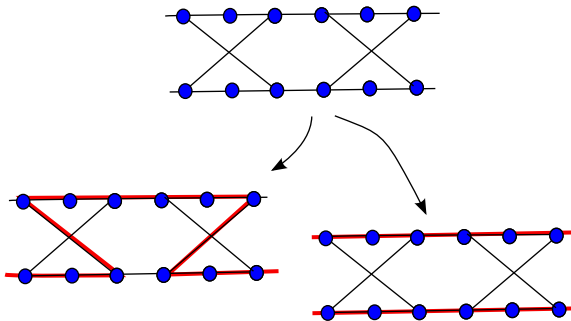
Tegyük fel, hogy ebben a gráfban van Hamilton-kör. Ekkor ezt a k háromszög alakú csúcs k darab ívre szakítja szét.

Az ívek egy-egy út végpontjában kezdődnek, végződnek.

Könnyű ellenőrizni, hogy egy élnek megfelelő két hatos blokkot ezek az ívek csak kétféleképpen szelhetik át.

Az átszelés képe

Az átszelés képem



(Bal) Az átszelés egy íven történik. Egy csúcs útján haladunk, de egy kitérővel az él másik blokkját is bejárjuk. (Jobb) Az átszelés két külön részben történik és mindegyik egy-egy csúcs útján történik.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Így a k háromszög alakú csúcs kiválaszt k csúcspot. Az erre a csúcsra illeszkedő élek mindegyik egy-egy lehetséges kitérőt engedélyez.

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Így a k háromszög alakú csúcs kiválaszt k csúcspot. Az erre a csúcsra illeszkedő élek mindegyik egy-egy lehetséges kitérőt engedélyez.

Ezeket a kitérőket úgy kell megszerveznünk, hogy az összes többi csúcs útja, illetve ezek blokkjai is be legyenek járva.

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Így a k háromszög alakú csúcs kiválaszt k csúcspot. Az erre a csúcsra illeszkedő élek mindegyik egy-egy lehetséges kitérőt engedélyez.

Ezeket a kitérőket úgy kell megszerveznünk, hogy az összes többi csúcs útja, illetve ezek blokkjai is be legyenek járva.

Könnyen látható, hogy ez csak akkor szervezhető meg, ha a kijelölt k csúcs lefoglalt csúcshalmazt alkot.

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Így a k háromszög alakú csúcs kiválaszt k csúcspot. Az erre a csúcsra illeszkedő élek mindegyik egy-egy lehetséges kitérőt engedélyez.

Ezeket a kitérőket úgy kell megszerveznünk, hogy az összes többi csúcs útja, illetve ezek blokkjai is be legyenek járva.

Könnyen látható, hogy ez csak akkor szervezhető meg, ha a kijelölt k csúcs lefoglalt csúcshalmazt alkot. Tehát Hamilton-kör létezése bizonyítja a k csúccsal lefoghatóságot.

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Így a k háromszög alakú csúcs kiválaszt k csúcspot. Az erre a csúcsra illeszkedő élek mindegyik egy-egy lehetséges kitérőt engedélyez.

Ezeket a kitérőket úgy kell megszerveznünk, hogy az összes többi csúcs útja, illetve ezek blokkjai is be legyenek járva.

Könnyen látható, hogy ez csak akkor szervezhető meg, ha a kijelölt k csúcs lefogó csúcshalmazt alkot. Tehát Hamilton-kör létezése bizonyítja a k csúccsal lefoghatóságot.

Gondolatmenetünk könnyen megfordítható.

Bizonyítás (folytatás)

Mindkét esetben a Hamilton kör egy-egy íve egy-egy csúcs útját járja be (közben lehetséges kitérőkkel).

Így a k háromszög alakú csúcs kiválaszt k csúcspot. Az erre a csúcsra illeszkedő élek mindegyik egy-egy lehetséges kitérőt engedélyez.

Ezeket a kitérőket úgy kell megszerveznünk, hogy az összes többi csúcs útja, illetve ezek blokkjai is be legyenek járva.

Könnyen látható, hogy ez csak akkor szervezhető meg, ha a kijelölt k csúcs lefogl csúcshalmazt alkot. Tehát Hamilton-kör létezése bizonyítja a k csúccsal lefoghatóságot.

Gondolatmenetünk könnyen megfordítható.

Ez bizonyítja a redukció elméleti részét. A technikai apróságok (implementáció polinomialis időben) részletezését elhagyjuk.

MAX-CUT

MAX-CUT

Egy gráf vágása csúcsainak két diszjunkt részre bontása. A vágás élhalmaza azon éleket tartalmazza, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részbe esik.

MAX-CUT

Egy gráf vágása csúcsainak két diszjunkt részre bontása. A vágás élhalmaza azon éleket tartalmazza, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részbe esik.

Definíció

MAX-CUT probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben olyan vágás, amely legalább k élű?

MAX-CUT

Egy gráf vágása csúcsainak két diszjunkt részre bontása. A vágás élhalmaza azon éleket tartalmazza, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részbe esik.

Definíció

MAX-CUT probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben olyan vágás, amely legalább k élű?

Tétel

MAX-CUT \mathcal{NP} -teljes.

MAX-CUT

Egy gráf vágása csúcsainak két diszjunkt részre bontása. A vágás élhalmaza azon éleket tartalmazza, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik részbe esik.

Definíció

MAX-CUT probléma: adott egy G gráf és egy k természetes szám. Van-e G -ben olyan vágás, amely legalább k élű?

Tétel

MAX-CUT \mathcal{NP} -teljes.

MAX-CUT $\in \mathcal{NP}$: tanú egy piros/kék színezés, polinom időben kiszámolható az élszáma, amit k -val összehasonlíthatunk.

Bizonyítás

Bizonyítás

MAX-CUT \mathcal{NP} -nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza.

Bizonyítás

MAX-CUT \mathcal{NP} -nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza.

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai \mathcal{C} változói és azok negáltjai (a literálok).

Bizonyítás

MAX-CUT \mathcal{NP} -nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza.

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai \mathcal{C} változói és azok negáltjai (a literálok).

Minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a benne szereplő három literált páronként összekötjük.

Bizonyítás

MAX-CUT \mathcal{NP} -nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza.

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai \mathcal{C} változói és azok negáltjai (a literálok).

Minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a benne szereplő három literált páronként összekötjük. (Ezekre az élekre mint klóz-élekre hivatkozunk.) Minden klózhoz három klóz-él tartozik.

Bizonyítás

MAX-CUT \mathcal{NP} -nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza.

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai \mathcal{C} változói és azok negáltjai (a literálok).

Minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a benne szereplő három literált páronként összekötjük. (Ezekre az élekre mint klóz-élekre hivatkozunk.) Minden klózhoz három klóz-él tartozik. Ha két literál több klózban is együtt szerepel, akkor többszörös él lesznek a redukció által megkonstruált gráfban.

Bizonyítás

MAX-CUT \mathcal{NP} -nehéz: NEM-MIND-IGAZ-3-SAT-ot vezetjük rá vissza.

\mathcal{C} 3-CNF-hez hozzárendeljük $G_{\mathcal{C}}$ gráfot, amely csúcsai \mathcal{C} változói és azok negáltjai (a literálok).

Minden $C \in \mathcal{C}$ klózra a benne szereplő három literált páronként összekötjük. (Ezekre az élekre mint klóz-élekre hivatkozunk.) Minden klózhoz három klóz-él tartozik. Ha két literál több klózban is együtt szerepel, akkor többszörös él lesznek a redukció által megkonstruált gráfban.

Minden x változóra x és \bar{x} közé is behúzzunk egy élt. (Ezekre az élekre mint változó-élekre hivatkozunk.) Ezzel leírtuk a $G_{\mathcal{C}}$ gráf összes élét.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Könnyű ellenőrizni, hogy G_C polinom időben meghatározható,

Bizonyítás (folytatás)

Könnyű ellenőrizni, hogy G_C polinom időben meghatározható,

Továbbá pontosan akkor van benne $|V| + 2|C|$ élű vágás, ha van olyan kiértékelése a változóinknak, hogy C minden klóza nem-homogén.

Bizonyítás (folytatás)

Könnyű ellenőrizni, hogy G_C polinom időben meghatározható,

Továbbá pontosan akkor van benne $|V| + 2|C|$ élű vágás, ha van olyan kiértékelése a változóinknak, hogy C minden klóza nem-homogén.

Valóban, G_C minden vágása lefeljebb (az összes) $|V|$ literál-élet és minden klóz három klózélből legfeljebb 2-t tartalmaz. Azaz $|V| + 2|C|$ egy felső becslés G_C tetszőleges vágásának élszámára.

Bizonyítás (folytatás)

Könnyű ellenőrizni, hogy G_C polinom időben meghatározható,

Továbbá pontosan akkor van benne $|V| + 2|C|$ élű vágás, ha van olyan kiértékelése a változóinknak, hogy C minden klóza nem-homogén.

Valóban, G_C minden vágása lefeljebb (az összes) $|V|$ literál-élet és minden klóz három klózélből legfeljebb 2-t tartalmaz. Azaz $|V| + 2|C|$ egy felső becslés G_C tetszőleges vágásának élszámára.

Ha egy (I, H) vágás eléri ezt a felső becslést, akkor minden literálélet tartalmaz, azaz minden x változóra x és \bar{x} közül egyik I -be, másik H -ba esik. Azaz a vágás definiál egy kiértékelését a változóinknak.

Bizonyítás (folytatás)

Könnyű ellenőrizni, hogy G_C polinom időben meghatározható,

Továbbá pontosan akkor van benne $|V| + 2|C|$ élű vágás, ha van olyan kiértékelése a változóinknak, hogy C minden klóza nem-homogén.

Valóban, G_C minden vágása lefeljebb (az összes) $|V|$ literál-élet és minden klóz három klózeléből legfeljebb 2-t tartalmaz. Azaz $|V| + 2|C|$ egy felső becslés G_C tetszőleges vágásának élszámára.

Ha egy (I, H) vágás eléri ezt a felső becslést, akkor minden literálélet tartalmaz, azaz minden x változóra x és \bar{x} közül egyik I -be, másik H -ba esik. Azaz a vágás definiál egy kiértékelését a változóinknak.

Továbbá minden klóz három klózeléből kettőt tartalmaz a vágás, azaz a leírt kiértékelés nem-mind-igaz módon ielégíti (a tetszőlegesen választott) klózt C -ből.

CUT megjegyzések

CUT megjegyzések

Megjegyzés

A MIN-CUT probléma annak tesztelését kéri, hogy van-e olyan vágás, amely élszáma k -nál nem nagyobb. Ez a probléma polinom időben megoldható. A folyamok elmélete alapján a legkisebb vágás élhalmaza meghatározható.

CUT megjegyzések

Megjegyzés

A MIN-CUT probléma annak tesztelését kéri, hogy van-e olyan vágás, amely élszáma k -nál nem nagyobb. Ez a probléma polinom időben megoldható. A folyamok elmélete alapján a legkisebb vágás élhalmaza meghatározható.

Szintén megjegyezzük, hogy a redukciónk olyan gráfot készített, amely optimális vágása két egyenlő osztályra történt/felezés volt. Így a MAX-FELEZÉS problémáról is adódott, hogy \mathcal{NP} -teljes. Az egyszerű komplementálás mutatja, hogy a MAX-FELEZÉS és MIN-FELEZÉS problémák (polinomiális időre nézve) ekvivalensek. Speciálisan a MIN-FELEZÉS problémáról is kapjuk, hogy \mathcal{NP} -teljes.

Szünet



Halmazrendszerek

Halmazrendszerek

Definíció: Egyszerű halmazrendszer

\mathcal{H} egyszerű halmazrendszer a V halmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. \mathcal{H} elemei a halmazrendszer élei.

Halmazrendszerek

Definíció: Egyszerű halmazrendszer

\mathcal{H} egyszerű halmazrendszer a V halmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. \mathcal{H} elemei a halmazrendszer élei.

k -uniform halmazrendszer olyan halmazrendszer, amely összes éle k elemű.

Halmazrendszerek

Definíció: Egyszerű halmazrendszer

\mathcal{H} egyszerű halmazrendszer a V halmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. \mathcal{H} elemei a halmazrendszer élei.

k -uniform halmazrendszer olyan halmazrendszer, amely összes éle k elemű. Tehát az egyszerű gráfok pontosan a 2-uniform halmazrendszerek.

Halmazrendszerek

Definíció: Egyszerű halmazrendszer

\mathcal{H} egyszerű halmazrendszer a V halmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. \mathcal{H} elemei a halmazrendszer élei.

k -uniform halmazrendszer olyan halmazrendszer, amely összes éle k elemű. Tehát az egyszerű gráfok pontosan a 2-uniform halmazrendszerek.

Definíció: Halmazrendszer

(V, \mathcal{E}, I) egy halmazrendszer, ha $I \subset V \times \mathcal{E}$ egy illeszkedési reláció a V csúcshalmaz és \mathcal{E} élhalmaz között.

Halmazrendszerek

Definíció: Egyszerű halmazrendszer

\mathcal{H} egyszerű halmazrendszer a V halmaz felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$. \mathcal{H} elemei a halmazrendszer élei.

k -uniform halmazrendszer olyan halmazrendszer, amely összes éle k elemű. Tehát az egyszerű gráfok pontosan a 2-uniform halmazrendszerek.

Definíció: Halmazrendszer

(V, \mathcal{E}, I) egy halmazrendszer, ha $I \subset V \times \mathcal{E}$ egy illeszkedési reláció a V csúcshalmaz és \mathcal{E} élhalmaz között.

Minden $E \in \mathcal{E}$ -hez tartozik egy $\{v \in V : vIE\}$ részhalmaza V -nek

Halmazrendszerek alternatív leírásai

Halmazrendszerek alternatív leírásai

Észrevétel

V feletti \mathcal{H} halmazrendszer könnyen leírható B páros gráffal.

Halmazrendszerek alternatív leírásai

Észrevétel

V feletti \mathcal{H} halmazrendszer könnyen leírható B páros gráffal. A két színosztály V (felső pontok) és \mathcal{H} (alsó pontok).

Halmazrendszerek alternatív leírásai

Észrevétel

V feletti \mathcal{H} halmazrendszer könnyen leírható B páros gráffal. A két színosztály V (felső pontok) és \mathcal{H} (alsó pontok). Az alaphalmaz egy v eleme/csúcs akkor és csak akkor van összekötve \mathcal{H} egy E elemével/élel, ha $v \in E$.

Halmazrendszerek alternatív leírásai

Észrevétel

V feletti \mathcal{H} halmazrendszer könnyen leírható B páros gráffal. A két színosztály V (felső pontok) és \mathcal{H} (alsó pontok). Az alaphalmaz egy v eleme/csúcs akkor és csak akkor van összekötve \mathcal{H} egy E elemével/élel, ha $v \in E$.

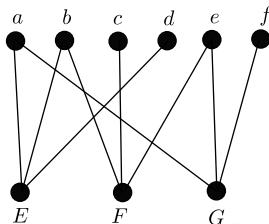
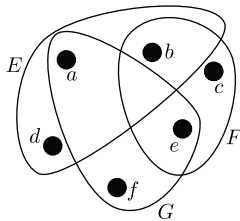
A halmazrendszert lehet kódolni pont-él illeszkedési mátrixszal. Ez egy $n \times m$ méretű 0-1 mátrix, ahol $n = |V|$ és $m = |\mathcal{H}|$.

Halmazrendszerek alternatív leírásai

Észrevétel

V feletti \mathcal{H} halmazrendszer könnyen leírható B páros gráffal. A két színosztály V (felső pontok) és \mathcal{H} (alsó pontok). Az alaphalmaz egy v eleme/csúcs akkor és csak akkor van összekötve \mathcal{H} egy E elemével/éllel, ha $v \in E$.

A halmazrendszert lehet kódolni pont-él illeszkedési mátrixszal. Ez egy $n \times m$ méretű 0-1 mátrix, ahol $n = |V|$ és $m = |\mathcal{H}|$.



	E	F	G
a	1	0	1
b	1	1	0
c	0	1	0
d	1	0	0
e	0	1	1
f	0	0	1

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN

Definíció

A gráfelmélet független csúcshalmazának fogalmát kétféleképpen terjeszthetjük ki halmazrendszerekre:

I független, ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $E \not\subseteq I$.

I független*: ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $|E \cap I| \leq 1$.

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN

Definíció

A gráfelmélet független csúcshalmazának fogalmát kétféleképpen terjeszthetjük ki halmazrendszerekre:

I független, ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $E \not\subseteq I$.

I független*: ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $|E \cap I| \leq 1$.

Definíció

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$\{[V, \mathcal{H}, k] : \text{van olyan } I \text{ független csúcshalmaz, hogy } |I| = k\}$.

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN

Definíció

A gráfelmélet független csúcshalmazának fogalmát kétféleképpen terjeszthetjük ki halmazrendszerekre:

I független, ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $E \not\subseteq I$.

I független*: ha minden $E \in \mathcal{H}$ élre $|E \cap I| \leq 1$.

Definíció

FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$\{[V, \mathcal{H}, k] : \text{van olyan } I \text{ független csúcshalmaz, hogy } |I| = k\}$.

FGTLEN*-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN=

$\{[V, \mathcal{H}, k] : \text{van olyan } I \text{ független}^* \text{ csúcshalmaz, hogy } |I| = k\}$.

Halmazrendszerek nehezebbek mint a gráfok

Halmazrendszerek nehezebbek mint a gráfok

Tétel

- (i) $\text{FGTLEN-CSÚCSOK} \preceq \text{FGTLEN-CSÚCSOK-HRSZBEN}$,
- (ii) $\text{FGTLEN-CSÚCSOK} \preceq \text{FGTLEN}^*\text{-CSÚCSOK-HRSZBEN}$.

Halmazrendszerek nehezebbek mint a gráfok

Tétel

- (i) $\text{FGTLEN-CSÚCSOK} \preceq \text{FGTLEN-CSÚCSOK-HRSZBEN}$,
- (ii) $\text{FGTLEN-CSÚCSOK} \preceq \text{FGTLEN}^*\text{-CSÚCSOK-HRSZBEN}$.

Valóban, a gráfelméleti probléma gráfja a halmazrendszerek egy speciális esete.

Halmazrendszerek nehezebbek mint a gráfok

Tétel

- (i) $\text{FGTLEN-CSÚCSOK} \preceq \text{FGTLEN-CSÚCSOK-HRSZBEN}$,
- (ii) $\text{FGTLEN-CSÚCSOK} \preceq \text{FGTLEN}^*\text{-CSÚCSOK-HRSZBEN}$.

Valóban, a gráfelméleti probléma gráfja a halmazrendszerek egy speciális esete. A gráfelméleti függetlenség mindkét halmazrendszeres függetlenség fogalom speciális esete.

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

Definíció

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN =

$\{[V, \mathcal{H}, k] : \mathcal{H}\text{-ban van } k \text{ él, amelyek páronként diszjuntak}\}.$

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

Definíció

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN =

 $\{[V, \mathcal{H}, k] : \mathcal{H}\text{-ban van } k \text{ él, amelyek páronként diszjuntak}\}.$

Megjegyzés: FGTLEN-ÉLEK-GRÁFOKBAN probléma,
másképpen PÁROSÍTÁS = $\{[G, k] : \nu(G) \geq k\}.$

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

Definíció

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN =

 $\{[V, \mathcal{H}, k] : \mathcal{H}\text{-ban van } k \text{ él, amelyek páronként diszjunktak}\}.$

Megjegyzés: FGTLEN-ÉLEK-GRÁFOKBAN probléma, másképpen PÁROSÍTÁS = $\{[G, k] : \nu(G) \geq k\}$. Az Edmonds-algoritmus alapján ez egy \mathcal{P} -beli probléma. Azaz a gráfokra vonatkozó eset könnyen kezelhető.

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

Definíció

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN =

$\{[V, \mathcal{H}, k] : \mathcal{H}\text{-ban van } k \text{ él, amelyek páronként diszjunktak}\}.$

Megjegyzés: FGTLEN-ÉLEK-GRÁFOKBAN probléma, másképpen PÁROSÍTÁS = $\{[G, k] : \nu(G) \geq k\}$. Az Edmonds-algoritmus alapján ez egy \mathcal{P} -beli probléma. Azaz a gráfokra vonatkozó eset könnyen kezelhető.

Tétel

FGTLEN*-CSÚCSOK-HRSZBEN \preceq FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN

Halmazrendszerek: dualitás

Halmazrendszerek: dualitás

A páros gráf kódoláson alapulva könnyű leírni a független* halmazokat. Ezeknek B -ben felső pontok egy olyan I halmaza tartozik, amelyekre nem illeszkedik V -alak, azaz olyan $a \in A, f, f' \in I \subset F$ ponthármas, ahol a összekötött f és f' -vel.

Halmazrendszerek: dualitás

A páros gráf kódoláson alapulva könnyű leírni a független* halmazokat. Ezeknek B -ben felső pontok egy olyan I halmaza tartozik, amelyekre nem illeszkedik V -alak, azaz olyan $a \in A, f, f' \in I \subset F$ ponthármas, ahol a összekötött f és f' -vel.

Definíció

Legyen B egy halmazrendszert leíró páros gráf. Az alsó/felső szerepek felcserélésével a B^* páros gráfot kapunk. Ez a B^* „elolvasható halmazrendszerként” visszaalakítva halmazrendszerre a $V^* = \mathcal{H}, \mathcal{H}^* = V$ duális halmazrendszert kapunk.

Bizonyítás

Bizonyítás

V, \mathcal{H}, k -ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartjuk meg: V^*, \mathcal{H}^*, k .

Bizonyítás

V, \mathcal{H}, k -ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartsuk meg: V^*, \mathcal{H}^*, k .

Azt kell eldöntenünk, hogy az eredeti halmazrendszert leíró B páros gráfban van-e k felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá \vee alak.

Bizonyítás

V, \mathcal{H}, k -ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartjuk meg: V^*, \mathcal{H}^*, k .

Azt kell eldöntenünk, hogy az eredeti halmazrendszert leíró B páros gráfban van-e k felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá \vee alak.

V^*, \mathcal{H}^* páros gráfja éppen a fejetetejére állított B .

Bizonyítás

V, \mathcal{H}, k -ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartjuk meg: V^*, \mathcal{H}^*, k .

Azt kell eldöntenünk, hogy az eredeti halmazrendszert leíró B páros gráfban van-e k felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá \vee alak.

V^*, \mathcal{H}^* páros gráfja éppen a fejetetejére állított B . Azaz az eredeti döntési feladat ekvivalens azzal, hogy fejrefordított B gráfban van-e k alsó csúcs (k darab él), hogy ne támaszkodjon rá \wedge , azaz páronként diszjunktak legyenek.

Bizonyítás

V, \mathcal{H}, k -ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartjuk meg: V^*, \mathcal{H}^*, k .

Azt kell eldöntenünk, hogy az eredeti halmazrendszert leíró B páros gráfban van-e k felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá \vee alak.

V^*, \mathcal{H}^* páros gráfja éppen a fejetetejére állított B . Azaz az eredeti döntési feladat ekvivalens azzal, hogy fejrefordított B gráfban van-e k alsó csúcs (k darab él), hogy ne támaszkodjon rá \wedge , azaz páronként diszjunktak legyenek. Azaz FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN problémát kell megoldani V^*, \mathcal{H}^*, k esetén.

Bizonyítás

V, \mathcal{H}, k -ból képezzük a duális halmazrendszert, a k értékét pedig tartjuk meg: V^*, \mathcal{H}^*, k .

Azt kell eldöntenünk, hogy az eredeti halmazrendszert leíró B páros gráfban van-e k felső pont úgy, hogy ne támaszkodjon rá \vee alak.

V^*, \mathcal{H}^* páros gráfja éppen a fejetetejére állított B . Azaz az eredeti döntési feladat ekvivalens azzal, hogy fejrefordított B gráfban van-e k alsó csúcs (k darab él), hogy ne támaszkodjon rá \wedge , azaz páronként diszjunktak legyenek. Azaz FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN problémát kell megoldani V^*, \mathcal{H}^*, k esetén.

Azaz a kiinduló transzformáció a tételt igazoló redukció.

PARKETTÁZÁS

PARKETTÁZÁS

Definíció

PARKETTÁZÁS = $\{[V, \mathcal{H}] : \text{léteznek } E_1, \dots, E_k \text{ páronként diszjunkt élek, hogy } \dot{\cup} E_i = V\}$

PARKETTÁZÁS

Definíció

PARKETTÁZÁS = $\{[V, \mathcal{H}] : \text{léteznek } E_1, \dots, E_k \text{ páronként diszjunkt élek, hogy } \dot{\cup} E_i = V\}$

Tétel

FGTLEN-ÉLEK-HRSZBEN \leq PARKETTÁZÁS.

A redukció

A redukció

Legyen V, \mathcal{H}, k az input. Legyen S a maximális élméret paraméter.
El kell dönteni, hogy van-e k db diszjunkt él.

A redukció

Legyen V, \mathcal{H}, k az input. Legyen S a maximális élméret paraméter. El kell dönteni, hogy van-e k db diszjunkt él.

A konstrukciót több lépésben végezzük el. Először \mathcal{H} -t úgy transzformáljuk, hogy uniform legyen: Minden E élhez $S - |E|$ sok új pontot veszünk fel (különböző élekhez különböző új pontokat használunk).

A redukció

Legyen V, \mathcal{H}, k az input. Legyen S a maximális élméret paraméter. El kell dönteni, hogy van-e k db diszjunkt él.

A konstrukciót több lépésben végezzük el. Először \mathcal{H} -t úgy transzformáljuk, hogy uniform legyen: Minden E élhez $S - |E|$ sok új pontot veszünk fel (különböző élekhez különböző új pontokat használunk). A módosított halmazrendszerre vonatkozó probléma nyilván ekvivalens a kiinduló problémával.

A redukció

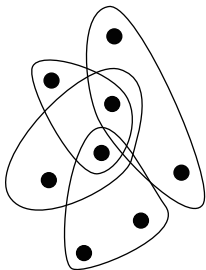
Legyen V, \mathcal{H}, k az input. Legyen S a maximális élméret paraméter. El kell dönteni, hogy van-e k db diszjunkt él.

A konstrukciót több lépésben végezzük el. Először \mathcal{H} -t úgy transzformáljuk, hogy uniform legyen: Minden E élhez $S - |E|$ sok új pontot veszünk fel (különböző élekhez különböző új pontokat használunk). A módosított halmazrendszerre vonatkozó probléma nyilván ekvivalens a kiinduló problémával.

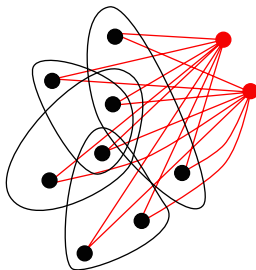
A konstrukció második lépésében már feltesszük, hogy \mathcal{H} egy S -uniform halmazrendszer. Ebben a lépésben $V(H)$ -hoz hozzáveszünk $|V(H)| - k \cdot S$ darab új csúcsot (legyen \tilde{V} a kapott ponthalmaz), $\tilde{\mathcal{H}}$ elemei pedig \mathcal{H} elemei és minden régi-új csúcspárra egy-egy őket tartalmazó kételemű halmaz.

A redukció képen

A redukció képen



$k=2$ $S=3$



A második lépés redukciója: $|V| - kS = 8 - 2 \cdot 3 = 2$. A két új pont és a hozzájuk tartozó gráfélek a jobb oldalon szerepelnek pirosban.

A redukció szóban

A redukció szóban

Észrevétel

$(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{H}})$ parkettázásához le kell fedni a $|V| - kS$ darab új csúcsot, ami csak a $|V| - kS$ darab új csúcskettőssel lehet. A maradék parkettázó élek csak régi élek lehetnek, amelyek kS csúcsot fednek le. Azaz a parkettázás ad k független élt \mathcal{H} -ban.

A redukció szóban

Észrevétel

$(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{H}})$ parkettázásához le kell fedni a $|V| - kS$ darab új csúcsot, ami csak a $|V| - kS$ darab új csúcskettőssel lehet. A maradék parkettázó élek csak régi élek lehetnek, amelyek kS csúcsot fednek le. Azaz a parkettázás ad k független élt \mathcal{H} -ban.

Az észrevétel gondolatmenetének megfordítása teszi teljessé a bizonyítás elméleti részét.

Párosítások: A 3-uniform halmazrendszerek esete

Párosítások: A 3-uniform halmazrendszerek esete

Definíció: 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Adott egy 3-uniform halmazrendszer. Van-e olyan részhalmaza, ami az alaphalmaz partíciója?

Párosítások: A 3-uniform halmazrendszerek esete

Definíció: 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Adott egy 3-uniform halmazrendszer. Van-e olyan részhalmaza, ami az alaphalmaz partíciója?

Definíció: TELJES-HÁRMASÍTÁS

Adott három k méretű A, B, C halmaz és ezek transzverzálisaiból álló \mathcal{H} 3-uniform halmazrendszer ($\mathcal{H} \subset A \times B \times C$). Van-e a halmazrendszerben k páronként diszjunkt él?

Párosítások: A 3-uniform halmazrendszerek esete

Definíció: 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Adott egy 3-uniform halmazrendszer. Van-e olyan részhalmaza, ami az alaphalmaz partíciója?

Definíció: TELJES-HÁRMASÍTÁS

Adott három k méretű A, B, C halmaz és ezek transzverzálisaiból álló \mathcal{H} 3-uniform halmazrendszer ($\mathcal{H} \subset A \times B \times C$). Van-e a halmazrendszerben k páronként diszjunkt él?

Tétel

3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ és TELJES-HÁRMASÍTÁS is \mathcal{NP} -teljes.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\bar{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\bar{x}}\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\bar{x}}\}\},$$

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\bar{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\bar{x}}\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\bar{x}}\}\},$$

Ígéret: Az a_i, b_i csúcsok csak a hármasokban lesznek benne.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\bar{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\bar{x}}\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\bar{x}}\}\},$$

Ígéret: Az a_i, b_i csúcsok csak a hármasokban lesznek benne.

Így ha van teljes hármásítás, akkor az vagy X vagy \bar{X} a hármásítás része.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\bar{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\bar{x}}\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\bar{x}}\}\},$$

Ígéret: Az a_i, b_i csúcsok csak a hármasokban lesznek benne.

Így ha van teljes hármasítás, akkor az vagy X vagy \bar{X} a hármasítás része. Speciálisan vagy az összes c_i^x vagy az összes $c_i^{\bar{x}}$ marad hármasítatlanul.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\bar{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\bar{x}}\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\bar{x}}\}\},$$

Ígéret: Az a_i, b_i csúcsok csak a hármasokban lesznek benne.

Így ha van teljes hármasítás, akkor az vagy X vagy \bar{X} a hármasítás része. Speciálisan vagy az összes c_i^x vagy az összes $c_i^{\bar{x}}$ marad hármasítatlanul. A párosítatlanul hagyott c_i -k felső indexét igaznak értékelt literálnak tekinthetjük.

3-SAT \leq TELJES-HÁRMASÍTÁS \leq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\bar{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\bar{x}}\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\bar{x}}\}\},$$

Ígéret: Az a_i, b_i csúcsok csak a hármasokban lesznek benne.

Így ha van teljes hármasítás, akkor az vagy X vagy \bar{X} a hármasítás része. Speciálisan vagy az összes c_i^x vagy az összes $c_i^{\bar{x}}$ marad hármasítatlanul. A párosítatlanul hagyott c_i -k felső indexét igaznak értékelt literálnak tekinthetjük. Minden változóra diszjunkt csúcshalmazokkal definiáljuk a fenti hármasrendszert.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS \preceq 3-UNIFORM-HALMAZRENDSZER-PARTÍCIÓ

Elég az első redukciót belátni.

Ehhez vegyünk egy φ 3-SAT inputot. Tegyük fel, hogy az x változó n -szer szerepel benne. $A \cup B$ -ből válasszunk ki $2n$ csúcsot x -hez: $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$. Vegyük az

$$X^+ = \{\{a_0, b_0, c_0^x\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^x\}\},$$

$$\bar{X} = \{\{a_0, b_0, c_0^{\bar{x}}\}, \dots, \{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}^{\bar{x}}\}\},$$

Ígéret: Az a_i, b_i csúcsok csak a hármasokban lesznek benne.

Így ha van teljes hármasítás, akkor az vagy X vagy \bar{X} a hármasítás része. Speciálisan vagy az összes c_i^x vagy az összes $c_i^{\bar{x}}$ marad hármasítatlanul. A párosítatlanul hagyott c_i -k felső indexét igaznak értékelt literálnak tekinthetjük. Minden változóra diszjunkt csúcshalmazokkal definiáljuk a fenti hármasrendszert. Ha van hármasítás, akkor egy értékelését írja le a változóknak.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ , 3-SAT input egy klóza.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ , 3-SAT input egy klóza.

Vezessünk be egy a_C, b_C csúcsot és válasszunk egy eddig más klózhoz nem választott c_i csúcsot z_1 felső indexszel.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ , 3-SAT input egy klóza.

Vezessünk be egy a_C, b_C csúcsot és válasszunk egy eddig más klózhoz nem választott c_i csúcsot z_1 felső indexszel. A C -beli másik két literálra is tegyük meg ezt.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ , 3-SAT input egy klóza.

Vezessünk be egy a_C, b_C csúcsot és válasszunk egy eddig más klózhoz nem választott c_i csúcsot z_1 felső indexszel. A C -beli másik két literálra is tegyük meg ezt.

Ezzel a C klózhoz bevezettünk két új csúcsot és három új hármast.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ , 3-SAT input egy klóza.

Vezessünk be egy a_C, b_C csúcsot és válasszunk egy eddig más klózhoz nem választott c_i csúcsot z_1 felső indexszel. A C -beli másik két literálra is tegyük meg ezt.

Ezzel a C klózhoz bevezettünk két új csúcsot és három új hármast. Ezt minden klózra megismételjük.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ , 3-SAT input egy klóza.

Vezessünk be egy a_C, b_C csúcsot és válasszunk egy eddig más klózhoz nem választott c_i csúcsot z_1 felső indexszel. A C -beli másik két literálra is tegyük meg ezt.

Ezzel a C klózhoz bevezettünk két új csúcsot és három új hármast. Ezt minden klózra megismételjük.

Ha az eddig definiált hármásokban találunk egy hármasítást, amely minden a -csúcsot és b -csúcsot lefed, akkor φ kielégíthető

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

Legyen $C = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ a φ , 3-SAT input egy klóza.

Vezessünk be egy a_C, b_C csúcsot és válasszunk egy eddig más klózhoz nem választott c_i csúcsot z_1 felső indexszel. A C -beli másik két literálra is tegyük meg ezt.

Ezzel a C klózhoz bevezettünk két új csúcsot és három új hármast. Ezt minden klózra megismételjük.

Ha az eddig definiált hármásokban találunk egy hármasítást, amely minden a -csúcsot és b -csúcsot lefed, akkor φ kielégíthető. A gondolatmenet megfordítható.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasrendszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c -csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasrendszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c -csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

Ha új a -csúcsokat és b -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor ezeket az összes lehetséges módon egészítsük ki hármasokká a c -csúcsokkal.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasrendszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c -csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

Ha új a -csúcsokat és b -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor ezeket az összes lehetséges módon egészítsük ki hármasokká a c -csúcsokkal.

Ha új c -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor fomrulánk biztos nem kielégíthető.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasrendszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c -csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

Ha új a -csúcsokat és b -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor ezeket az összes lehetséges módon egészítsük ki hármasokká a c -csúcsokkal.

Ha új c -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor fomrulánk biztos nem kielégíthető. Az új csúcsokat hagyjuk izoláltnak.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármrendszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c -csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

Ha új a -csúcsokat és b -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor ezeket az összes lehetséges módon egészítsük ki hármassá a c -csúcsokkal.

Ha új c -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor fomrulánk biztos nem kielégíthető. Az új csúcsokat hagyjuk izoláltnak.

A kapott 3-uniform kiegyensúlyozott háromrészes halmazrendszer a redukció végeredménye.

3-SAT \preceq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasrendszerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c -csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

Ha új a -csúcsokat és b -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor ezeket az összes lehetséges módon egészítsük ki hármasokká a c -csúcsokkal.

Ha új c -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor fomrulánk biztos nem kielégíthető. Az új csúcsokat hagyjuk izoláltak.

A kapott 3-uniform kiegyensúlyozott háromrészes halmazrendszer a redukció végeredménye. A redukció bizonyítja a tételt.

3-SAT \leq TELJES-HÁRMASÍTÁS bizonyítása (folytatás)

A fenti hármasszisztzerben az a -csúcsok és b -csúcsok száma ugyanaz. Ha a c -csúcsok száma több, akkor adjunk új a -csúcsokat és b -csúcsokat a kiegyensúlyozásra. Ha a c -csúcsok száma kevesebb, akkor adjunk új c -csúcsokat a kiegyensúlyozásra.

Ha új a -csúcsokat és b -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor ezeket az összes lehetséges módon egészítsük ki hármassokkal a c -csúcsokkal.

Ha új c -csúcsokat adtunk halmazrendszerünkhöz, akkor fomrulánk biztos nem kielégíthető. Az új csúcsokat hagyjuk izoláltnak.

A kapott 3-uniform kiegyensúlyozott háromrészes halmazrendszer a redukció végeredménye. A redukció bizonyítja a tételt. Az ehhez szükséges állítások könnyen ellenőrizhetők.

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE

Definíció

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei k színnel, hogy semelyik H -beli halmaz ne legyen monokromatikus?

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE

Definíció

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei k színnel, hogy semelyik H -beli halmaz ne legyen monokromatikus?

Tétel

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE \mathcal{NP} -teljes.

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE

Definíció

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE: adott egy H halmazrendszer és egy k természetes szám. Kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei k színnel, hogy semelyik H -beli halmaz ne legyen monokromatikus?

Tétel

HALMAZRENDSZEREK-SZÍNEZÉSE \mathcal{NP} -teljes.

A gráfelméleti színezési probléma általánosítása.

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE

Emlékeztető: Gráfok esetén a 2-színezhetőség esete könnyen kezelhető volt.

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE

Emlékeztető: Gráfok esetén a 2-színezhetőség esete könnyen kezelhető volt.

Definíció

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE: Adott egy \mathcal{H} halmazrendszer. Döntsük el: kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei 2 színnel úgy, hogy semelyik H -beli halmaz ne legyen monokromatikus.

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE

Emlékeztető: Gráfok esetén a 2-színezhetőség esete könnyen kezelhető volt.

Definíció

HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE: Adott egy \mathcal{H} halmazrendszer. Döntsük el: kiszínezhetők-e $V(H)$ elemei 2 színnel úgy, hogy semelyik H -beli halmaz ne legyen monokromatikus.

Tétel

PARKETTÁZÁS \preceq
HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE.

A redukció

A redukció

Adott egy V, \mathcal{H} input a parkettázás problémához.

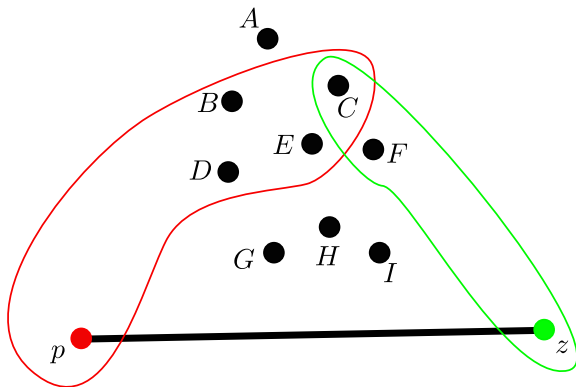
A redukció

Adott egy V, \mathcal{H} input a parkettázás problémához.

Konstrukció: $\tilde{V} = \mathcal{H} \cup \{p, z\}$. \tilde{H} -hoz minden E, F metsző \mathcal{H} -beli élpárra legyen $Z_{E,F} = \{E, F, z\}$ egy él. Minden $v \in V$ esetén legyen $R_v = \{E : v \in E \in \mathcal{H}\} \cup \{p\}$ egy \tilde{H} -beli él. Továbbá legyen $\{p, z\}$ is egy \tilde{H} -beli él.

A redukció képen

A redukció képen



A, B, C, \dots, H, I pontosan a halmazrendszerünk élei. B, C, D, E pontosan az a elemet tartalmazó élek. C és F élek metszőek. A fenti információkból kiolvasható éleket rajzoltuk be az ábrába, amely a redukció megfelelő töredékét tartalmazza.

A redukció szóban

A redukció szóban

Észrevétel

\tilde{V} , $\tilde{\mathcal{H}}$ egy 2-színezése esetén legyen p színe piros, z színe zöld (a $\{p, z\}$ él kényszerít a teljes paletta használatára). Az eredeti éleknek megfelelő csúcsok közül a zöld szín kijelöl egy élhalmazt. Ezek parkettázzák az eredeti halmazrendszert.

A redukció szóban

Észrevétel

$\tilde{V}, \tilde{\mathcal{H}}$ egy 2-színezése esetén legyen p színe piros, z színe zöld (a $\{p, z\}$ él kényszerít a teljes paletta használatára). Az eredeti éleknek megfelelő csúcsok közül a zöld szín kijelöl egy élhalmazt. Ezek parkettázzák az eredeti halmazrendszert.

Valóban, köztük két metsző él egy $Z_{E,F}$ típusú zöld-homogén élhez vezetne a redukció eredményében.

A redukció szóban

Észrevétel

\tilde{V}, \tilde{H} egy 2-színezése esetén legyen p színe piros, z színe zöld (a $\{p, z\}$ él kényszerít a teljes paletta használatára). Az eredeti éleknek megfelelő csúcsok közül a zöld szín kijelöl egy élhalmazt. Ezek parkettázzák az eredeti halmazrendszert.

Valóban, köztük két metsző él egy $Z_{E,F}$ típusú zöld-homogén élhez vezetne a redukció eredményében. Míg egy lefedetlen v csúcs (az eredeti halmazrendszerben) adna egy R_v piros-homogén élt.

A redukció szóban

Észrevétel

$\tilde{V}, \tilde{\mathcal{H}}$ egy 2-színezése esetén legyen p színe piros, z színe zöld (a $\{p, z\}$ él kényszerít a teljes paletta használatára). Az eredeti éleknek megfelelő csúcsok közül a zöld szín kijelöl egy élhalmazt. Ezek parkettázzák az eredeti halmazrendszert.

Valóban, köztük két metsző él egy $Z_{E,F}$ típusú zöld-homogén élhez vezetne a redukció eredményében. Míg egy lefedetlen v csúcs (az eredeti halmazrendszerben) adna egy R_v piros-homogén élt.

A gondolatmenet megfordítható, a bizonyítás teljes.

Vissza a NEM-MIND-IGAZ-SAT problémához

Vissza a NEM-MIND-IGAZ-SAT problémához

Most jegyezzük meg, hogy a
HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE $\leq_{\mathcal{P}}$
NEM-MIND-IGAZ-SAT, így kapjuk a hiányzó \mathcal{NP} -teljességet:
NEM-MIND-IGAZ-SAT is \mathcal{NP} -teljes.

Vissza a NEM-MIND-IGAZ-SAT problémához

Most jegyezzük meg, hogy a HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE $\leq_{\mathcal{P}}$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, így kapjuk a hiányzó \mathcal{NP} -teljességet: NEM-MIND-IGAZ-SAT is \mathcal{NP} -teljes.

A halmazrendszer alaphalmazát azonosítsuk egy V változó halmazzal.

Vissza a NEM-MIND-IGAZ-SAT problémához

Most jegyezzük meg, hogy a HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE $\leq_{\mathcal{P}}$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, így kapjuk a hiányzó \mathcal{NP} -teljességet: NEM-MIND-IGAZ-SAT is \mathcal{NP} -teljes.

A halmazrendszer alaphalmazát azonosítsuk egy V változó halmazzal.

Minden él a benne szereplő változók halmazaként klózként, az egeász halmazrendszer egy CNF-ként értelmezhető.

Vissza a NEM-MIND-IGAZ-SAT problémához

Most jegyezzük meg, hogy a HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE $\leq_{\mathcal{P}}$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, így kapjuk a hiányzó \mathcal{NP} -teljességet: NEM-MIND-IGAZ-SAT is \mathcal{NP} -teljes.

A halmazrendszer alaphalmazát azonosítsuk egy V változó halmazzal.

Minden él a benne szereplő változók halmazaként klózként, az egeász halmazrendszer egy CNF-ként értelmezhető.

Egy értékadás a változóknak egy piros/kék színezésként is leírható.

Vissza a NEM-MIND-IGAZ-SAT problémához

Most jegyezzük meg, hogy a HALMAZRENDSZEREK-2-SZÍNEZHETŐSÉGE $\leq_{\mathcal{P}}$ NEM-MIND-IGAZ-SAT, így kapjuk a hiányzó \mathcal{NP} -teljességet: NEM-MIND-IGAZ-SAT is \mathcal{NP} -teljes.

A halmazrendszer alaphalmazát azonosítsuk egy V változó halmazzal.

Minden él a benne szereplő változók halmazaként klózként, az egeász halmazrendszer egy CNF-ként értelmezhető.

Egy értékadás a változóknak egy piros/kék színezésként is leírható.

Ez pontosan akkor lesz NEM-MIND-IGAZ-SAT értékadás ha színezésként értelmezve jól 2-színezi a definiált halmazrendszert.

Szünet



DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER

Definíció: DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER

Adott egy $Ax \leq b$ egész együtthatós lineáris egyenlőtlenségrendszer.
Van-e megoldása egész számokban?

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER

Definíció: DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER

Adott egy $Ax \leq b$ egész együtthatós lineáris egyenlőtlenségrendszer.
Van-e megoldása egész számokban?

Tétel

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER \mathcal{NP} -teljes.

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER

Definíció: DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER

Adott egy $Ax \leq b$ egész együtthatós lineáris egyenlőtlenségrendszer.
Van-e megoldása egész számokban?

Tétel

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER \mathcal{NP} -teljes.

\mathcal{NP} -beliségre tanú egy megoldás.

SAT \preceq

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

SAT \preceq

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

Adott egy konjunktív normálforma.

SAT \leq

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

Adott egy konjunktív normálforma.

Minden x_i változóra bevezetjük a $0 \leq x_i \leq 1$ egyenlőtlenséget.

SAT \preceq

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

Adott egy konjunktív normálforma.

Minden x_i változóra bevezetjük a $0 \leq x_i \leq 1$ egyenlőtlenséget.

Minden $\langle z_1, \dots, z_k \rangle$ klózra a $t_1 + \dots + t_k \geq 1$ egyenlőtlenséget, ahol $t_i = x_j$, ha $z_i = x_j$ és $t_i = 1 - x_j$, ha $z_i = \bar{x}_j$.

SAT \preceq

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENSZER

Adott egy konjunktív normálforma.

Minden x_i változóra bevezetjük a $0 \leq x_i \leq 1$ egyenlőtlenséget.

Minden $\langle z_1, \dots, z_k \rangle$ klózra a $t_1 + \dots + t_k \geq 1$ egyenlőtlenséget, ahol $t_i = x_j$, ha $z_i = x_j$ és $t_i = 1 - x_j$, ha $z_i = \bar{x}_j$.

Könnyű látni, hogy az így kapott egyenlőtlenségrendszer polinom időben megkonstruálható.

SAT \preceq

DIOPHANTOSZI-EGYENLŐTLENSÉGRENDSZER

Adott egy konjunktív normálforma.

Minden x_i változóra bevezetjük a $0 \leq x_i \leq 1$ egyenlőtlenséget.

Minden $\langle z_1, \dots, z_k \rangle$ klózra a $t_1 + \dots + t_k \geq 1$ egyenlőtlenséget, ahol $t_i = x_j$, ha $z_i = x_j$ és $t_i = 1 - x_j$, ha $z_i = \bar{x}_j$.

Könnyű látni, hogy az így kapott egyenlőtlenségrendszer polinom időben megkonstruálható.

Könnyű látni, hogy az így kapott egyenlőtlenségrendszer pontosan akkor megoldható, ha a konjunktív normálforma kielégíthető.

RÉSZLETÖSSZEG

RÉSZLETÖSSZEG

Definíció

RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{[A, b] : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A, \\ \text{hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

RÉSZLETÖSSZEG

Definíció

RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{[A, b] : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A, \\ \text{hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

A feladat egy egyszerű értelmezése:

RÉSZLETÖSSZEG

Definíció

RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{[A, b] : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A, \\ \text{hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

A feladat egy egyszerű értelmezése: A a pénztárcánkban lévő érmék értékeit összegyűjtő halmaz. A, b kódja akkor tartozik az elfogadandó nyelvhez, ha b összeget pontosan ki tudunk fizetni a pénztárcánkból.

RÉSZLETÖSSZEG

Definíció

RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{[A, b] : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A, \\ \text{hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

A feladat egy egyszerű értelmezése: A a pénztárcánkban lévő érmék értékeit összegyűjtő halmaz. A, b kódja akkor tartozik az elfogadandó nyelvhez, ha b összeget pontosan ki tudunk fizetni a pénztárcánkból.

Tétel

RÉSZLETÖSSZEG \mathcal{NP} -teljes.

RÉSZLETÖSSZEG

Definíció

RÉSZLETÖSSZEG=

$$\{[A, b] : A \subset \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{van olyan } R \subset A, \\ \text{hogy az } R\text{-beli számok összege } b\}.$$

A feladat egy egyszerű értelmezése: A a pénztárcánkban lévő érmék értékeit összegyűjtő halmaz. A, b kódja akkor tartozik az elfogadandó nyelvhez, ha b összeget pontosan ki tudunk fizetni a pénztárcánkból.

Tétel

RÉSZLETÖSSZEG \mathcal{NP} -teljes.RÉSZLETÖSSZEG nyilván \mathcal{NP} -beli.

PARKETTÁZÁS \preceq RÉSZLETÖSSZEG

PARKETTÁZÁS \preceq RÉSZLETÖSSZEG

Legyen V, \mathcal{H} a PARKETTÁZÁS egy inputja.

PARKETTÁZÁS \preceq RÉSZLETÖSSZEG

Legyen V, \mathcal{H} a PARKETTÁZÁS egy inputja. Ki lehet-e választani olyan parkettahalmazt/élhalmazt, amivel ki lehet parkettázni a V -t/padlót?

PARKETTÁZÁS \preceq RÉSZLETÖSSZEG

Legyen V, \mathcal{H} a PARKETTÁZÁS egy inputja. Ki lehet-e választani olyan parkettahalmazt/élhalmazt, amivel ki lehet parkettázni a V -t/padlót?

Konstrukció: Legyen $w : V \rightarrow \{1, a, a^2, \dots, a^{|V|-1}\}$ tetszőleges bijekció. Az értékészletre gondoljunk mint az a alapú számrendszer helyiértékei.

PARKETTÁZÁS \preceq RÉSZLETÖSSZEG

Legyen V, \mathcal{H} a PARKETTÁZÁS egy inputja. Ki lehet-e választani olyan parkettahalmazt/élhalmazt, amivel ki lehet parkettázni a V -t/padlót?

Konstrukció: Legyen $w : V \rightarrow \{1, a, a^2, \dots, a^{|V|-1}\}$ tetszőleges bijekció. Az értékészletre gondoljunk mint az a alapú számrendszer helyiértékei.

Legyen $E \in \mathcal{H}$ esetén $a_E = \sum_{v:v \in E} w(v)$. Legyen $A = \{a_E : E \in \mathcal{H}\}$ és $b = 11 \dots 1_a = \sum_{v:v \in V} w(v)$. Ezzel leírtuk a részletösszeg probléma egy inputját.

Bizonyítás

Bizonyítás

Észrevétel

Ha a értékét $|\mathcal{H}| + 1$ -nek választjuk, akkor $a_i \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az a alapú számrendszerben maradék továbbvitele nélkül kiszámolható.

Bizonyítás

Észrevétel

Ha a értékét $|\mathcal{H}| + 1$ -nek választjuk, akkor $a_i \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az a alapú számrendszerben maradék továbbvitele nélkül kiszámolható.

Az észrevétel egyből adja, hogy a csupa 1-es számjegyből álló szám előállítása mint részletösszeg ekvivalens az eredeti halmazrendszerre vonatkozó PARKETTÁZÁS feladattal (alkalmasan nagy a esetén).

Bizonyítás

Észrevétel

Ha a értékét $|\mathcal{H}| + 1$ -nek választjuk, akkor $a_j \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az a alapú számrendszerben maradék továbbvitele nélkül kiszámolható.

Az észrevétel egyből adja, hogy a csupa 1-es számjegyből álló szám előállítása mint részletösszeg ekvivalens az eredeti halmazrendszerre vonatkozó PARKETTÁZÁS feladattal (alkalmasan nagy a esetén).

A redukció során előforduló legnagyobb szám

$$S = \sum_{i=0}^{|\mathcal{H}|-1} a^i = \frac{a^{|\mathcal{H}|-1} - 1}{a - 1} < a^{|\mathcal{H}|}.$$

Bizonyítás

Észrevétel

Ha a értékét $|\mathcal{H}| + 1$ -nek választjuk, akkor $a_i \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az a alapú számrendszerben maradék továbbvitele nélkül kiszámolható.

Az észrevétel egyből adja, hogy a csupa 1-es számjegyből álló szám előállítása mint részletösszeg ekvivalens az eredeti halmazrendszerre vonatkozó PARKETTÁZÁS feladattal (alkalmasan nagy a esetén).

A redukció során előforduló legnagyobb szám

$$S = \sum_{i=0}^{|\mathcal{V}|-1} a^i = \frac{a^{|\mathcal{V}|-1} - 1}{a - 1} < a^{|\mathcal{V}|}. \text{ Kódjának hossza } |\mathcal{V}| \log a = |\mathcal{V}| \log(|\mathcal{H}| + 1).$$

Bizonyítás

Észrevétel

Ha a értékét $|\mathcal{H}| + 1$ -nek választjuk, akkor $a_i \in A$ számok olyanok, hogy minden részletösszeg az a alapú számrendszerben maradék továbbvitele nélkül kiszámolható.

Az észrevétel egyből adja, hogy a csupa 1-es számjegyből álló szám előállítása mint részletösszeg ekvivalens az eredeti halmazrendszerre vonatkozó PARKETTÁZÁS feladattal (alkalmasan nagy a esetén).

A redukció során előforduló legnagyobb szám

$$S = \sum_{i=0}^{|\mathcal{V}|-1} a^i = \frac{a^{|\mathcal{V}|-1} - 1}{a - 1} < a^{|\mathcal{V}|}. \text{ Kódjának hossza } |\mathcal{V}| \log a = |\mathcal{V}| \log(|\mathcal{H}| + 1). \text{ Redukciónk polinomiális.}$$

HÁTIZSÁK

HÁTIZSÁK

Definíció

HÁTIZSÁK: Adott tárgyak T halmaza. Minden $t \in T$ tárgyhoz tartozik egy V_t térfogat és egy v_t érték ($v_t, V_t \in \mathbb{N}$). Adott egy hátizsák, amelybe legfeljebb H össztérfogatú tárgyakat pakolhatunk. Továbbá adott egy L értékhatár. ($H, L \in \mathbb{N}$.) Kiválasztható-e T egy részhalmaza úgy, hogy elférjen a hátizsákban és összértéke legalább L legyen?

HÁTIZSÁK

Definíció

HÁTIZSÁK: Adott tárgyak T halmaza. Minden $t \in T$ tárgyhöz tartozik egy V_t térfogat és egy v_t érték ($v_t, V_t \in \mathbb{N}$). Adott egy hátizsák, amelybe legfeljebb H össztérfogatú tárgyakat pakolhatunk. Továbbá adott egy L értékhatár. ($H, L \in \mathbb{N}$.) Kiválasztható-e T egy részhalmaza úgy, hogy elférjen a hátizsákban és összértéke legalább L legyen?

Tétel

HÁTIZSÁK \mathcal{NP} -teljes.

HÁTIZSÁK

Definíció

HÁTIZSÁK: Adott tárgyak T halmaza. Minden $t \in T$ tárgyhöz tartozik egy V_t térfogat és egy v_t érték ($v_t, V_t \in \mathbb{N}$). Adott egy hátizsák, amelybe legfeljebb H össztérfogatú tárgyakat pakolhatunk. Továbbá adott egy L értékhatár. ($H, L \in \mathbb{N}$.) Kiválasztható-e T egy részhalmaza úgy, hogy elférjen a hátizsákban és összértéke legalább L legyen?

Tétel

HÁTIZSÁK \mathcal{NP} -teljes.

A probléma \mathcal{NP} -belisége nyilvánvaló.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq HÁTIZSÁK

RÉSZLETÖSSZEG \preceq HÁTIZSÁK

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq HÁTIZSÁK

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Minden $a \in A$ számhoz vegyünk egy tárgyat amely térfogata és értéke is a .

RÉSZLETÖSSZEG \preceq HÁTIZSÁK

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Minden $a \in A$ számhoz vegyünk egy tárgyat amely térfogata és értéke is a .

Hátizsákunk térfogata legyen b .

RÉSZLETÖSSZEG \preceq HÁTIZSÁK

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Minden $a \in A$ számhoz vegyünk egy tárgyat amely térfogata és értéke is a .

Hátizsákunk térfogata legyen b .

Az értékhatár is legyen b .

RÉSZLETÖSSZEG \preceq HÁTIZSÁK

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Minden $a \in A$ számhoz vegyünk egy tárgyat amely térfogata és értéke is a .

Hátizsákunk térfogata legyen b .

Az értékhatár is legyen b .

Nyilván tárgyaink/számaink egy részhalmaza akkor fér a hátizsákba és egyben éri el az értékhatárt, ha az összegük éppen b .

FELEZÉS

FELEZÉS

Definíció: FELEZÉS

Adott egész számok A halmaza. Ketté lehet-e osztani számainkat, hogy a két rész összege ugyanaz legyen?

FELEZÉS

Definíció: FELEZÉS

Adott egész számok A halmaza. Ketté lehet-e osztani számainkat, hogy a két rész összege ugyanaz legyen? El lehet-e felezni A -t?

FELEZÉS

Definíció: FELEZÉS

Adott egész számok A halmaza. Ketté lehet-e osztani számainkat, hogy a két rész összege ugyanaz legyen? El lehet-e felezni A -t?

Tétel

FELEZÉS \mathcal{NP} -teljes.

FELEZÉS

Definíció: FELEZÉS

Adott egész számok A halmaza. Ketté lehet-e osztani számainkat, hogy a két rész összege ugyanaz legyen? El lehet-e felezni A -t?

Tétel

FELEZÉS \mathcal{NP} -teljes.

FELEZÉS nyilván \mathcal{NP} -beli.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A -beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A -beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.

Legyen \hat{A} a kibővített számhalmaz.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A -beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.

Legyen \hat{A} a kibővített számhalmaz.

Ha \hat{A} elfelezhető, akkor mindkét félben az összeg $S - b$.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A -beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.

Legyen \hat{A} a kibővített számhalmaz.

Ha \hat{A} elfelezhető, akkor mindkét félben az összeg $S - b$. Az egyik fél csak A -beli számokat tartalmaz.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A -beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.

Legyen \hat{A} a kibővített számhalmaz.

Ha \hat{A} elfelezhető, akkor mindkét félben az összeg $S - b$. Az egyik fél csak A -beli számokat tartalmaz. Ezen fél A -ra vonatkozó komplementerében az összeg b , a célszám.

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A -beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.

Legyen \hat{A} a kibővített számhalmaz.

Ha \hat{A} elfelezhető, akkor mindkét félben az összeg $S - b$. Az egyik fél csak A -beli számokat tartalmaz. Ezen fél A -ra vonatkozó komplementerében az összeg b , a célszám.

Fordítva:

RÉSZLETÖSSZEG \preceq FELEZÉS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege. A b célszám és $S - b$ célszám ugyanazt a RÉSZLETÖSSZEG problémát adja.

Feltesszük/feltehetjük, hogy $b \leq S/2$.

Az A -beli számokhoz adjuk hozzá az egyetlen $S - 2b$ számot.

Legyen \hat{A} a kibővített számhalmaz.

Ha \hat{A} elfelezhető, akkor mindkét félben az összeg $S - b$. Az egyik fél csak A -beli számokat tartalmaz. Ezen fél A -ra vonatkozó komplementerében az összeg b , a célszám.

Fordítva: Ha b előáll részletösszegként, akkor a tagokhoz $S - 2b$ -t hozzáadva megfeleztük \hat{A} -t.

LÁDAPAKOLÁS

LÁDAPAKOLÁS

Definíció

LÁDAPAKOLÁS: adott egész számok A halmaza, egy b és egy c egész szám. Meg lehet-e adni A egy legfeljebb b osztályú partícióját, amelyben minden osztály összege legfeljebb c ?

LÁDAPAKOLÁS

Definíció

LÁDAPAKOLÁS: adott egész számok A halmaza, egy b és egy c egész szám. Meg lehet-e adni A egy legfeljebb b osztályú partícióját, amelyben minden osztály összege legfeljebb c ?

A probléma értelmezése: Az A halmaz tárgyakat térfogatát írja le. Adott b darab láda, amelyek mindegyikébe c összterfogat fér el. El tudjuk-e pakolni tárgyainkat a ládádba?

LÁDAPAKOLÁS

Definíció

LÁDAPAKOLÁS: adott egész számok A halmaza, egy b és egy c egész szám. Meg lehet-e adni A egy legfeljebb b osztályú partícióját, amelyben minden osztály összege legfeljebb c ?

A probléma értelmezése: Az A halmaz tárgyakat térfogatát írja le. Adott b darab láda, amelyek mindegyikébe c összterfogat fér el. El tudjuk-e pakolni tárgyainkat a ládába?

Tétel

LÁDAPAKOLÁS \mathcal{NP} -teljes.

LÁDAPAKOLÁS

Definíció

LÁDAPAKOLÁS: adott egész számok A halmaza, egy b és egy c egész szám. Meg lehet-e adni A egy legfeljebb b osztályú partícióját, amelyben minden osztály összege legfeljebb c ?

A probléma értelmezése: Az A halmaz tárgyakat térfogatát írja le. Adott b darab láda, amelyek mindegyikébe c össztérfogat fér el. El tudjuk-e pakolni tárgyainkat a ládába?

Tétel

LÁDAPAKOLÁS \mathcal{NP} -teljes.

LÁDAPAKOLÁS nyilván \mathcal{NP} -beli.

FELEZÉS \preceq LÁDAPAKOLÁS

FELEZÉS \preceq LÁDAPAKOLÁS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$ a FELEZÉS probléma egy inputja.

FELEZÉS \preceq LÁDAPAKOLÁS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$ a FELEZÉS probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege.

FELEZÉS \preceq LÁDAPAKOLÁS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$ a FELEZÉS probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege.

Vizsgáljuk az A , $b = 2$, $c = S/2$ LÁDAPAKOLÁSI problémát.

FELEZÉS \preceq LÁDAPAKOLÁS

Legyen adott $A \subset \mathbb{N}$ a FELEZÉS probléma egy inputja.

Legyen S az A -beli számok összege.

Vizsgáljuk az A , $b = 2$, $c = S/2$ LÁDAPAKOLÁSI problémát.

A pakolás akkor és csak akkor oldható meg, ha A elfelezhető.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!