Algoritmuselmélet és bonyolultságelmélet feladatok
MSc hallgatók számára

Bonyolultsági osztályok

2017. Előadó: Hajnal Péter

1. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő problémák/nyelvek megoldhatók úgy, hogy* 0 *tárat használunk, azaz munkaszalag nélkül.*

(i)

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : \ w\text{-ben páros sok } 1\text{-es van}\},$$

(ii)

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : \ w\text{-ben az } 1\text{-el és } 0\text{-k számának paritása különbözik}\},$$

(iii)

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* : \ w\text{-ben a karakterek sorozata ábécé sorrendben következik}\}.$$

(iv) Döntsük el, hogy egy adott karaktersorozatban van-e hat egymás utáni betű, amelyből kirakható TURING neve.

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő problémák/nyelvek* $\mathcal{L}$*-ben vannak:*

(i)

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : \ w \text{ ugyanannyi } 0\text{-t tartalmaz mint } 1\text{-est}\},$$

(ii)

$$L = \{1^{n^2} : n \in \mathbb{N}\},$$

(iii)

$$L = \{ww : \ w \in \{0,1\}^*\},$$

(iv) PALINDROM,

(v) Adott egy G *gráf. Döntsük el körgráf-e.*

(v) Adott egy $\overrightarrow{G}$ *irányított gráf és egy* u *csúcsa. Döntsük el, hogy* u*-ból elérhető-e egy csúcs, amely kifoka legalább* 2.

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő problémák* $\mathcal{NP}$*-ben vannak. A bizonyító Turing gép legyen egyszerűbb, mint egy* $\mathcal{P}$*-beli gép, ha polinomiális időben megoldható feladatról van szó.*

(i) Adott G *egyszerű gráf. Van-e benne* 2017 *elemű klikk?*

(ii) Adott R, G *két gráf.* R *részgráfja-e* G*-nek?*

(iii) Adott G *gráf. Döntsük el* 3*-színezhető-e.*

(iv) *Adott G gráf. Döntsük el van-e benne Hamilton-kör.*

(v) *Adott egy szám, döntsük el hatványszám-e (a k^ℓ számok a hatványszámok, ahol $k, \ell > 1$).*

(vi) *Adott G gráf és egy k szám. Döntsük el van-e G-ben k elemű klikk.*

(vii) *Adott G gráf és egy k szám. Döntsük el van-e G-ben k elemű független csúcshalmaz.*

(viii) *Adott G gráf és egy k szám. Döntsük el van-e G-ben k elemű lefogó halmaz.*

4. Feladat. *Igazoljuk, hogy a követekező problémák co$\mathcal{NP}$-ben vannak:*

(i) *Adott egy G gráf. Igaz-e, hogy síkgráf?*

(ii) *Adott G egyszerű gráf. Igaz-e, hogy perfekt? Egy gráf perfekt, ha minden feszített részgráfjára teljesül, hogy legnagyobb klikkjének mérete sok színnel jól kiszínezhető.*

(iii) *Adott egy szám, döntsük el prímszám-e.*

5. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő problémák $\mathcal{NP} \cap$ coNP-ben vannak. Ha tudjuk, hogy alkalmas T Turing-gép miatt $\mathcal{P}$-beli nyelvről van szó, azért vázoljunk fel egy-egy jóval egyszerűbb Turing-gépet, ami $\mathcal{NP}$, illetve coNP-beliséget bizonyít.*

(i) *Adott G gráf. Páros-e?*

(ii) *Adott G gráf. Van-e benne Euler-kör?*

(iii) *Adott G páros gráf. Van-e benne teljes párosítás?*

(iv) *Adott G páros gráf és egy t természetes szám. Van-e G-ben t élű párosítás?*

(v) *Adott G gráf. Van-e benne teljes párosítás?*

(vi) *Adott G gráf és egy t természetes szám. Van-e G-ben t élű párosítás?*

(vii) *Adott G gráf és s, t csúcsa. Van-e G-ben st út.*

(viii) *Adott $\overrightarrow{G}$ irányított gráf és s, t csúcsa. Van-e $\overrightarrow{G}$-ben st irányított út.*

(ix) *Adott $\overrightarrow{G}$ irányított gráf és s, t csúcsa, továbbá egy k természetes szám. Van-e $\overrightarrow{G}$-ben k darab páronként éldiszjunkt st irányított út.*

(x) *Adott $\overrightarrow{G}$ irányított gráf és s, t csúcsa, továbbá egy k természetes szám. Van-e $\overrightarrow{G}$-ben k darab páronként belső-pont-diszjunkt st irányított út.*

(xi) *Adott $\overrightarrow{G}$ irányított gráf. Van-e $\overrightarrow{G}$-ben irányított kör.*

6. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő problémák $\mathcal{P}$-ben vannak. (A megoldás BSc/MSc anyagban szereplő algoritmusok, bizonyít'asok felidézése, és érvelés, hogy ebből polinomiális algoritmus kiolvasható.)*

(i) *Adott G gráf. Páros-e?*

(ii) *Adott G gráf. Van-e benne Euler-kör?*

(iii) *Adott G páros gráf. Van-e benne teljes párosítás?*

(iv) *Adott G gráf. Van-e benne teljes párosítás?*

(v) *Adott G gráf és egy k pozitív egész. Döntsük el G k-szorosan él-összefüggő-e.*

(vi) *Adott G gráf és egy k pozitív egész. Döntsük el G k-szorosan összefüggő-e.*

(vii) *Adott G gráf. Döntsük el G síkgráf-e.*

7. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő problémák $\mathcal{PSPACE}$-ben vannak:*

(i) *Adott egy gráf döntsük el va-e benne Hamilton-kör.*

(ii) *Adott egy φ ítéletkalkulusbeli formula. Döntsük el kielégíthető-e.*

(iii) *Adott egy formula $Q_1x_1\ Q_2x_2\ \ldots\ Q_nx_n\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ahol φ egy ítéletkalkulusbeli formula, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ a $\{0, 1\}$ halmazra vonatkozó kvantorok. Döntsük el igaz-e a formula.*

(iv) *Adott egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráf és egy S(TART) csúcs. Ketten játszanak a gráfon egy babúval, ami kezdetben az S csúcsban van. K(ezdő) és M(ásodik) felváltva mozgatják a bábút az aktuális helyéről egy ebből kivezető élen át lépve egyet egy eddig nem látogatott csúcsba. Az veszít, aki nem tud lépni. Döntsük el ki nyer.*

$\star \qquad \star \qquad \star$

8. Feladat. *Igazolja, ha $\mathcal{NP} \neq co\mathcal{NP}$, akkor $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.*