Algoritmuselmélet és bonyolultságelmélet feladatok
MSc hallgatók számára

Kupacok, Fibonacci

2017. Előadó: Hajnal Péter

1. Feladat. *Egy pontú gyökeres fáink (1 pontú $\equiv$ gyökere 0 rangú equiv gyökere 0 gyerekkel rendelkezik) vannak. Azonos rangú fákat olvasztunk egybe billentéssel. Így egyre bonyolultabb fákat kapunk. Rajzoljunk fel $r = 1, 2, 3, 4$ esetére ilyen fákat.*

Igazoljuk, hogy az r rangú gyökeres fáink mind izomorfak.

Jelölés. Az előző feladatban nyert r rangú fák izomorfiatípusa legyen B_r. Ezeket a fákat binomiális fáknak nevezzük.

2. Feladat (folytatás). *(i) Hány csúcsa van B_r-nek?*

(ii) Mi a mélysége B_r-nek?

(iii) Hány i-edik generációs csúcsa van B_r-nek? (Egy csúcs i-edik generációs, ha i távolságra van a gyökértől.)

Definíció. Egy *elemi binomiális kupac* 2^r adat egy binomiális fa csúcsaiba rakva:

(i) Kupac tulajdonság, azaz minden adat kulcsa legfeljebb akkora mint a leszármazottjai kulcsa.

(ii) Minden adat/csúcs-ból egy pointer megy legkisebb rangú gyerekéhez.

(iii) Minden adat/csúcs gyerekei rang szerint novekvő sorrendben körzerűen, duplán láncolva vannak.

Egy *binomiális kupac* különböző rangú binomiális kupacok rang szerinti növekvő sorrendben láncolva egy listában.

3. Feladat. *n adatot egy binomiális kupacban tárolunk. Hány darab és milyen rangú fáink vannak?*

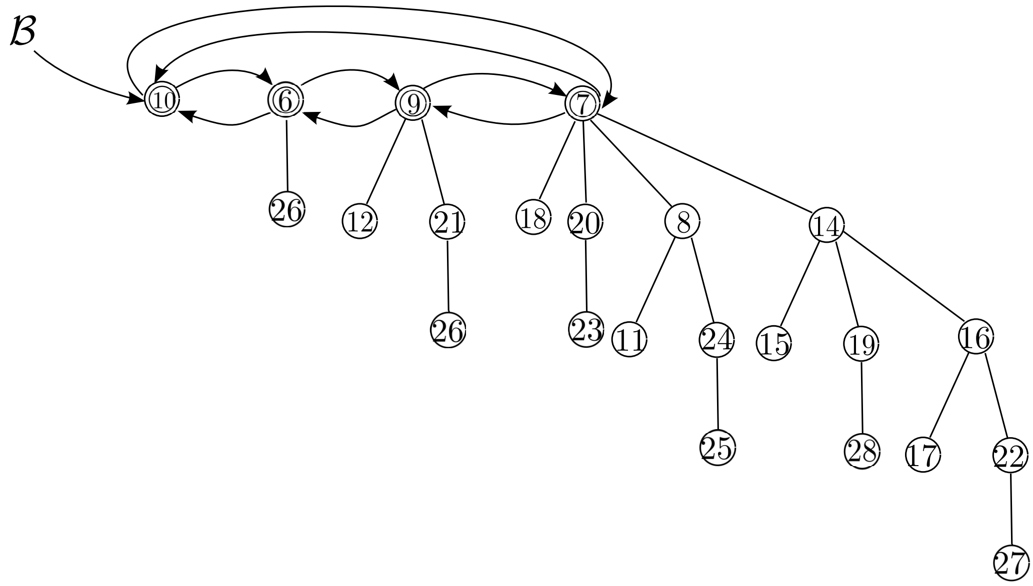
4. Feladat. *Tervezzünk algoritmust egy elem beszúrására egy binomiális kupacba. Analizáljuk az eljárásunkat.*

5. Feladat. *Tervezzünk algoritmus egy binomiális kupac legkisebb kulcsának meghatározására. Analizáljuk az eljárásunkat.*

6. Feladat. *Tervezzünk algoritmus egy binomiális kupac legkisebb kulcsú adatának törlésére. Analizáljuk az eljárásunkat.*

7. Feladat. *Tervezzünk algoritmus egy binomiális kupac egyik adatában a kulcs csökkentésére. Analizáljuk az eljárásunkat.*

8. Feladat. *Vegyük az alábbi binomiális kupacot.*



Végezzük el a Beszúr(13) parancsot.

⋆ ⋆ ⋆

Definíció. *Ferde-kettes* számrendszernek nevezzük a következő helyiértékes számrendszert:

(i) A helyiértékek: $1, 3, 7, 15, 31, \ldots, 2^\ell - 1, \ldots$.

(ii) A számjegyek halmaza $\{0, 1, 2\}$.

Például: 12010_{f2} értéke $1 \cdot 31 + 2 \cdot 15 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 64$.

9. Feladat. *(i) Igazoljuk, hogy minden természets szám felírható ferde-kettes számrendszerben.*

(ii) Igazoljuk, hogy van olyan természets szám, amely több féleképpen is felírható ferde-kettes számrendszerben.

Definíció. Egy ferde-kettes szám *szabályos*, ha 2 számjegy után csak 0 számjegy(ek) jöhet(nek) (esetleg 2 az egyetlen 2-es számjegy az utolsó helyen). 1011200_{f2} szabályos, 1011201_{f2} és 10102020000_{f2} nem szabályos.

10. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden természetes szám egyértelműen írható fel ferde-kettes számrendszerben.*

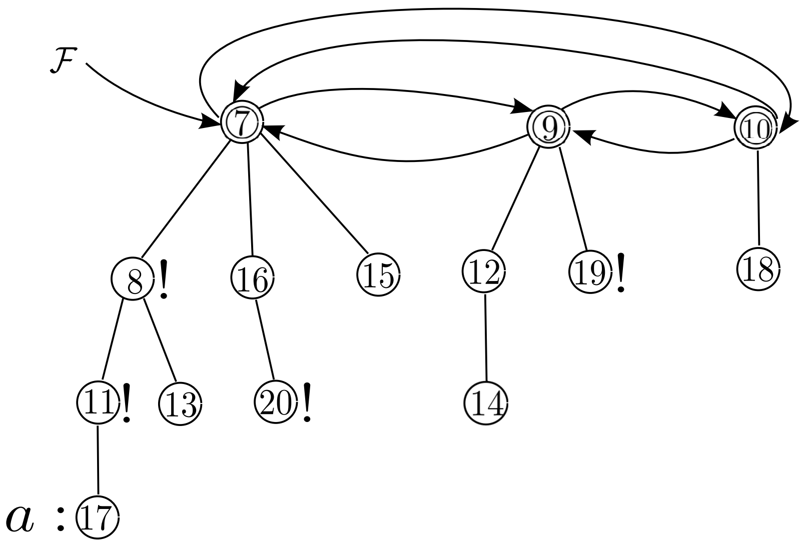
11. Feladat. *Adott egy n szám ferde-kettes számrendszerben felírva. Számoljuk ki $n+1$ ferde-kettes számrendszerbeli alakját. Tervezzünk algoritmust és analizáljuk azt.*

12. Feladat. * *A binomiális kupacok megvalósítása és analízise nagyban használta a kettes számrendszert. Tervezzünk adatstruktúrát, amely hasonló filozófiát követ, de a fura-kettes számrendszeren alapul.*

⋆ ⋆ ⋆

13. Feladat. *Induljunk ki egy üres Fibonacci kupacból és sorban hajtsuk végre az alábbi „szolgáltatásokat": Beszúr(27), Beszúr(17), Beszúr(19), Beszúr(20), Beszúr(24), Beszúr(12), Beszúr(11), Beszúr(10), Beszúr(14), Beszúr(18), MinTöröl, KulcsCsökkent(19, 6), KulcsCsökkent(24,5), MinTöröl. Rajzoljuk fel a végül kialakuló Fibonacci kupacot.*

14. Feladat. *Vegyük a rajzon látható Fibonacci kupacot:*



Végezzünk el MinTöröl algoritmust. Majd végezzük el a KulcsCsökkent (a,10) parancsot.

15. Feladat. *Igaz-e, hogy egy Fibonacci-kupacban egy r rangú gyökér kupacának* $\mathcal{O}(\log n)$ *mélysége van? Válaszunkat indokoljuk.*

16. Feladat. *Beszúr, MinTöröl, KulcsCsökkent utasítások sorozatával építsünk fel egy Fibonacci-kupacot, amely egyetlen gyökeret tartalmaz, amely kupaca egy végpontjában gyökereztetett út.*

⋆ ⋆ ⋆

Definíció. Legyen $\mathcal{F}_0 = 1, \mathcal{F}_1 = 2$, és $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$ (amennyiben $n \geq 2$) összefüggéssel megadott sorozat.

Legyen $F_0 = 1, F_1 = 1$, és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (amennyiben $n \geq 2$) összefüggéssel megadott sorozat.

Legyen $f_0 = 0, f_1 = 1$, és $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (amennyiben $n \geq 2$) összefüggéssel megadott sorozat.

17. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-2} + \ldots + \mathcal{F}_0 + 2.$$

18. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő összeszámlálási kérdésekre* $\mathcal{F}_n$ *a válasz:*

(i) Hányféleképpen színezhető ki egy n szintes torony szintjei piros/kék színnel, ha két szomszédos szint nem lehet egyszerre piros?

(ii) Igazoljuk az előző feladat azonosságát ezen értelmezés alapján kombinatorikus módon.

19. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő összeszámlálási kérdésekre F_n a válasz:*

(i) Hányfélekeppen fedhető le egy $2 \times n$ méretű tábla mezői n darab dominóval, ahol egy dominó alakja két szomszédos mező téglalapja.

(ii) Hányféleképpen írható fel az n szám 1 és 2 tagok összegeként? (A tagok sorrendje számít!)

(iii) Hányféleképpen mehetünk fel egy n fokú lépcső tetejére (alúlról), ha minden lépésünkkel egy vagy két fokot mehetünk fel?

(iv) Hányféleképpen írható fel $n+1$ páratlan számok összegeként? (A tagok sorrendje számít!)

(v) Hány $n+2$ hosszú s sorozatot építhetünk fel az $1, 2, 3, 4$ számokból úgy, hogy a sorozat 1-gyel kezdődjön, 1-gyel vagy 4-gyel végződjön és a szomszédos elemek között 1 különbség legyen?

(vi) Hány $n+1$ hosszú s sorozatot építhetünk fel az $1, 2, 3, 4$ számokból úgy, hogy a sorozat 1-gyel kezdődjön és a szomszédos elemek között 1 különbség legyen?

(vii) Hány n hosszú 0-1 sorozat van, amely 0-val kezdődik és $0/1$ blokkokra osztásában minden blokk páratlan hosszú?