Javításos algoritmusok

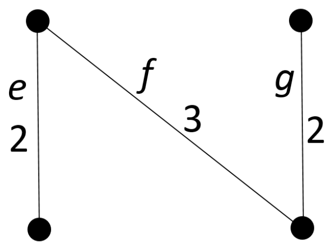
Bevezetés

Javításos algoritmusokat leginkább optimalizálási feladatoknál használunk. Optimalizálási feladatnak a következőt nevezzük. Legyen $\mathcal{L}$ a lehetséges inputok halmaza és $c\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ célfüggvény. Ennek a célfüggvénynek az értékét szeretnénk maximalizálni (pl.: bevétel esetén) vagy minimalizálni (pl.: kiadás esetén). Az output tehát egy $opt \in \mathcal{L}$ elem, amelyre teljesül, hogy $c(opt) \geq c(x)$, ha a maximumot keressük, és $c(opt) \leq c(x)$, ha minimumot keressük, $\forall x \in \mathcal{L}$.

1. PÉLDA Legyen $\mathcal{G}$ gráf, $c\colon E(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}_{++}$ súlyfüggvény. Az így kapott súlyozott gráfban keressük a maximális súlyú körmentes élhalmazt. Vagyis $F \subseteq E$ esetén a $\check{c}(F)=\sum_{f\in F} \check{c}(f)$ függvény maximumát keressük. Ennek a problémának egy másik változata, amikor minimális költségű körmentes részgráfot keresünk. Az eredeti változat az 1920-as években merült fel városok villamosításánál. Ismert módszer a feladat megoldására a Kruskal-algoritmus, amely az üres halmazból indulva, mohó bővítéssel keresi meg az optimális részgráfot.

1. TÉTEL A Kruskal mohó/javításos algoritmus optimális élhalmazt ad.

2. PÉLDA Legyen $\mathcal{G}$ gráf, $c\colon E(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}_{++}$ súlyfüggvény. Az így kapott súlyozott gráfban keressük a maximális súlyú párosítást. A mohó algoritmus most is az üres halmazból indul, és a legsúlyosabb él hozzávételével bővíti a már meglévő élhalmazt, a párosítás megtartása mellett. Viszont ez a módszer nem feltétlenül az optimumot adja.



1. Ábra: A mohó algoritmusnak ebben az esetben az $\{f\}$ élhalmaz lesz a outputja, viszont az optimális párosítás az $\{e,g\}$ élhalmaz.

1. MEGJEGYZÉS Az előző példából látszik, hogy a mohó algoritmus nem mindig “univerzális” javító módszer. Nevét onnan kapta, hogy korábbi választást nem ír felül. Emiatt sokszor gyenge ez az algoritmus.

3. PÉLDA Javításos algoritmussal egy adott $\mathcal{G}$ gráf egy hosszú útja is megtalálható .(BSc)

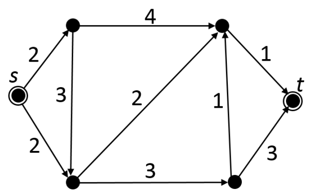
4. PÉLDA BSc-n tanult univerzális javító algoritmus a szimplex módszer, ám ez az algoritmus rossz esetben ciklizálhat is.

Folyamok

1. DEFINÍCIÓ $\vec{G}: (V, E, K, B)$ irányított gráf, ha $\forall\, e \in E\, \exists\, !\, v \in V$: vKe) és $\forall\, e \in E\, \exists\, !\, v \in V$: vBe, ahol V a csúcsok halmaza, E az élekhalmaz, K és B pedig relációk a csúcsok és az élek között. Azaz egy olyan gráf, amelyben minden él pontosan egy csúcsból indul ki és pontosan egy csúcsba fut be.

2. MEGJEGYZÉS Irányított gráffal modellezhetjük egy olyan város út hálózatát, amelyben minden utca egyirányú.

2. DEFINÍCIÓ $\mathcal{H}$ hálózatnak nevezzük a következő struktúrát: $(\vec{G}, s, t, c)$, ahol s, t a $\vec{G}$ gráf két különböző pontja, és $c : E \to \mathbb{R}_{++}$ kapacitásfüggvény, ahol $c(e)$ az e él kapacitása. A megadott s csúcsot forrásnak, t-t nyelőnek nevezzük.



3. DEFINÍCIÓ $f : E(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}_+$ folyam ($\mathcal{H}$ hálózatban), ha teljesíti a következő két feltételt

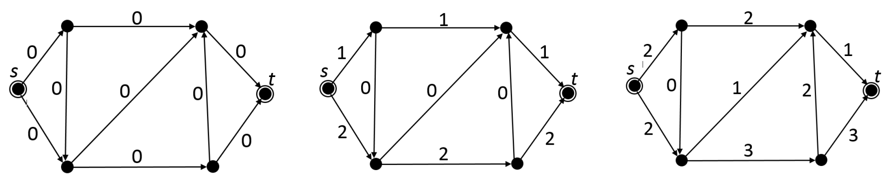
(F1) $\forall\, e \in E$ esetén $0 \le f(e) \le c(e)$

(F2) Megmaradási / csomóponti törvény: $\forall\, v \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{e:\, \text{vBe}} f(e) = \sum_{e:\, \text{vKe}} f(e)$

4. DEFINÍCIÓ f folyam értéke $\text{é}(f) = \sum_{e:\, \text{tBe}} f(e) - \sum_{e:\, \text{tKe}} f(e)$

3. MEGJEGYZÉS Folyammal modellezhető például egy lakótelep és a belváros közötti reggeli forgalom. Ekkor a lakórelep a folyam forrása, a belváros pedig a nyelő.

5. PÉLDA Néhány példa folyamra és azok értékeire:



1. Ábra: a folyamok értékei: é(f_1)=0,é(f_2)= 3, é(f_3)=4

Most már meg tudjuk fogalmazni a folyam problémát. A feladat, hogy egy adott $\mathcal{H}$ hálózatban megaláljuk a maximális értékű folyamot. A folyam probléma egy folytonos feladat, így ha a maximális folyamértékről beszélünk, akor ezt magyarázni kell. Egy E($\mathcal{G}$) $\to\mathbb{R}_{++}$ függvényt felfoghatjuk $\mathbb{R}^{E(\mathcal{G})}$ egy vektorának. A folyamok $\mathbb{R}^{E(\mathcal{G})}$ egy kompakt részhalmazát adják. é egy folytonos (valójában lineáris) függvény. Tehát a folyamérték függvény valóban felveszi a maximumát.

5. DEFINÍCIÓ $\mathcal{V}$ vágás $\mathcal{H}$ hálózatban, ha $\mathcal{V}$=($\mathcal{S}$,$\mathcal{T}$), ahol $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}\subseteq$V($\mathcal{G}$) a vágás oldalai (s$\in\mathcal{S}$, t$\in\mathcal{T}$), és $\mathcal{V}$ kapacitása (az adott c-től függően) $c(\mathcal{V})=\sum_{\substack{e=\overrightarrow{xy} \\ x\in\mathcal{S},\, y\in\mathcal{T}}} f(e)$.

Bevezetjük a következő jelöléseket is:

$E^{+}(\mathcal{V})$={e=xy$\in$E: x$\in\mathcal{S}$, y$\in\mathcal{T}$}

$E^{-}(\mathcal{V})$={e=xy$\in$E: x$\in\mathcal{T}$, y$\in\mathcal{S}$}.

1. LEMMA Legyen f folyam és $\mathcal{V}$ vágás. Ekkor é(f)=$\sum_{e\in E^{+}(\mathcal{V})} f(e)$-$\sum_{e\in E^{-}(\mathcal{V})} f(e)$.

BIZONYÍTÁS

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{V}$ vágást, amely $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ részekre osztják a gráfot. A folyam értékének definíciója szerint é(f)=$\sum_{e:\,\mathrm{tBe}} f(e)$- $\sum_{e:\,\mathrm{tKe}} f(e)$. $\mathcal{T}$ maradék $|T|-1$ db elemére a csomóponti törvény átrendezéséből adódiik, hogy 0=$\sum_{e:\,\mathrm{vBe}} f(e)$- $\sum_{e:\,\mathrm{vKe}} f(e)$. Ez tehát összesen $|T|$ db feltétel, amelyek abból adódnak, hogy f folyam. Az ebből adódó $|T|$ db egyenletet összegezve az egyenlet baloldala é(f), a jobb oldalára pedig a következők igazak. Nem szerepel benne $\mathcal{S}$-beli él. A $\mathcal{T}$-beli élek kétszer szerepelnek, egyszer kiinduló, egyszer befutó élként, vagyis egyszer pozitív, egyszer negatív előjel-lel, azaz összevonás után kiesnek. Maradtak még azok az élek, amelyeknek az egyik végpontja $\mathcal{S}$-beli, a másik pedig $\mathcal{T}$-beli. $E^{+}(\mathcal{V})$ élei befutó élek lesznek, így ezek pozitív előjellel szerepelnek, $E^{-}(\mathcal{V})$ kifutó élek lesznek, ezek így negatív előjellel szerepelnek. Tehát összegzés után az egyenlet jobb oldala éppen a lemma jobboldalát adja.

■

6. PÉLDA Ezekkel az ismeretekkel modellezhetjük a szegedi egyetemisták mozgását. Ebben a példában a forrás a Bolyai Intézet épülete, a nyelőt az egyik újszegedi kollégium alkotjáa és a vágás a Tisza. A fenti lemma pedig azt mondja, hogy a folyam értékének megállapításához nem szükséges a kollégiumnál figyelni a hallgatókat, hanem a hidakról figyelve is megkapjuk a szükséges információkat.

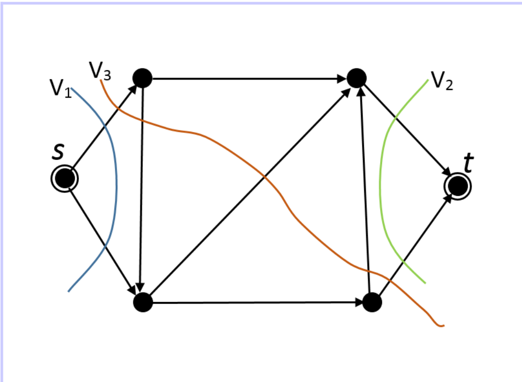
1. KÖVETKEZMÉNY Tetszőleges f folyam és tetszőleges $\mathcal{V}$ vágás esetén é(f)≤c($\mathcal{V}$).

BIZONYÍTÁS

$$\text{é}\,(f)=\sum_{e\in E^+(\mathcal{V})} f(e)-\sum_{e\in E^-(\mathcal{V})} f(e) \le \sum_{e\in E^+(\mathcal{V})} c(e)-\sum_{e\in E^-(\mathcal{V})} 0 = \text{c}(\mathcal{V})$$

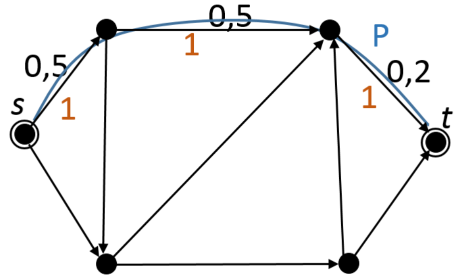
■

7. PÉLDA Tekintsük a következő $\mathcal{V}_1$,$\mathcal{V}_2$,$\mathcal{V}_3$ vágásokat:



Az 5. Példában szereplő f_1,f_2,f_3 folyamokkal a következők igazak: é(f_1)<é(f_2)<é(f_3)=c($\mathcal{V}_1$)=c($\mathcal{V}_2$)<c($\mathcal{V}_3$)=6, ebből pedig következik, hogy f_3 optimális folyam.

8. PÉLDA Tekintsük a következő példában szereplő $\vec{P}$ irányított $\vec{st}$ utat. A fekete számok az adott éleken futó folyammennyiséget jelölik, a narancsárga számok pedit az él kapacitását. Itt a $\vec{P}$ út minden élére teljesül, hogy $f_0(e)<c(e)$. Viszont ezt az f_0 értéket növelhetjük úgy, hogy az előbbi feltétel még mindig teljesüljön. 0.5-tel növelve az élek f_0 értékeit, két él elérné a kapacitás értékét, egyedül a nyelőbe mutató él nem. Viszont 0.8-cal nem növelhetjük az értéket, mert az előbbi két él kapacitása is csak 1, és ezt nem léphetjük túl. Így az f_0-ból kapott f_1 folyamot úgy kapjuk, hogy minden élen a folyammennyiséget 0,5-tel növeljük.



6. DEFINÍCIÓ Legyen $\mathcal{H}$ hálózat, f folyam és $\mathcal{P}$ út egy st út irányítatlan értelemben. (Ekkor $E(\mathcal{P})=E_{\text{előre}}(\mathcal{P}) \cup E_{\text{hátra}}(\mathcal{P})$, és $E_{\text{előre}}(\mathcal{P}) \cap E_{\text{hátra}}(\mathcal{P}) = \emptyset$). $\mathcal{P}$ utat javító útnak nevezzük, ha teljesíti a következő két feltételt:

(J1) $\forall e \in E_{\text{előre}}(\mathcal{P})$: $f(e) \lneqq c(e)$

(J2) $\forall e \in E_{\text{hátra}}(\mathcal{P})$: $f(e) \gneqq c(e)$.

2. LEMMA Legyen f folyam, $\mathcal{P}$ javító út. Ekkor $\exists$ g folyam, amelyre é$(g)>$é(f) és azt mondjuk, hogy f javítható.

Legyen adott egy f folyam. Ezt a következő g folyammal javíthatjuk:

$$g(e) = \begin{cases} f(e) + \delta & e \in E_{\text{előre}}(\mathcal{P}) \\ f(e) - \delta & e \in E_{\text{hátra}}(\mathcal{P}) \\ f(e) & \text{különben} \end{cases}$$

Az ebben szereplő δ-t pedig a következőképpen definiáljuk. Legyen $\delta_{\text{előre}}$ az a minimális érték, amellyel $\mathcal{P}$ előre mutató élein a folyam maximálisan javítható, vagyis $\delta_{\text{előre}} = \min\{c(e) - f(e) : e \in E_{\text{előre}}(\mathcal{P})\}$. Legyen $\delta_{\text{hátra}}$ a $\mathcal{P}$ hátra mutató élein a folyam értékének a minimuma, azaz $\delta_{\text{hátra}} = \min\{f(e) : e \in E_{\text{hátra}}(\mathcal{P})\}$. Ekkor δ legyen ezek minimuma, vagyis $\delta = \min\{\delta_{\text{előre}}, \delta_{\text{hátra}}\}$. Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott g függvény valóban folyam. δ definíciójából adódik, hogy $0 \leq g(e) \leq c(e)$, vagyis (F1) teljesül, továbbá δ-t uniform módon definiáltuk $\mathcal{P}$ élein, így a csomóponti törvény érvényben marad, vagyis (F2) is teljesül. Tehát g valóban folyam, és igaz rá, hogy é$(g) \leq$ é$(f) + \delta >$ é(f). Ebből pedig következik, hogy $\mathcal{P}$ pontosan akkor javító út, ha δ>0 teljesül.

Most már látható, hogy próbálkozhatunk az optimális folyam keresésénél a "javításos módszerrel".

2. TÉTEL A folyamok alaptétele
Legyen f folyam egy $\mathcal{H}$ hálózatban. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:
(i) é(f) maximális,
(ii) ∃ $\mathcal{V}$ vágás úgy, hogy é(f)=c($\mathcal{V}$),
(iii) ∄ javító út.

BIZONYÍTÁS

Az (i) ⇒ (iii) irány triviálisan igaz a 2. Lemmából.

Az (ii) ⇒ (i) irány is nyilvánvaló az 1. Következményből. Sőt a három ekvivalens állítás közül ez egy f folyam optimalitását jól tudja “demonstrálni”.

Az (iii) ⇒ (ii) irány már bonyolultabb. Először vezessük be a javítóút kezdemény fogalmát. Egy P sx út javító út kezdemény, ha (J1) és (J2) teljesül. Legyen S={x: ∃ sx javító út kezdemény}, és legyen T=V($\mathcal{G}$)\S. Ekkos s∈S és t∈T, sőt S definíciója és (iii) miatt t∉S. Az 1. Következmény bizonyításában láttuk, hogy $é(f) = \sum_{e\in E_{\text{előre}}(v)} f(e)$-$\sum_{e\in E_{\text{hátra}}(v)} f(e)$ ≤c($\mathcal{V}$). Itt azonban egyenlőség kell álljon, mert ha a baloldal nem érné el a kapacitás értékét, akkor még folytathatnánk a javító utat, ám ez S definíciója miatt nem lehetséges. Ezzel a tételt igazoltuk.

■

Az alaptétel után könnyen megfeogalmazható egy javításos folyam-algoritmus. Ezt a következő alkalommal tárgyaljuk.