Dualizálás

Hajnal Péter

2020. tavasz

Bevezető példa

A példánk (előjeles poliedrikus forma)

Maximalizáljuk	$2x_1 + 3x_2$-t
Feltéve, hogy	$4x_1 + 8x_2 \leq 12$
	$2x_1 + x_2 \leq 3$
	$3x_1 + 2x_2 \leq 4$
	$x_1, x_2 \geq 0,$

Kezünkben a (teljes/kétfázisú) szimplex módszer. Megoldhatnánk. De már sokat számoltunk, ezt kihagyjuk.

Azért gondolkozzunk.

Az ötlet

Képzeljünk egy tetszőleges $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ lehetséges megoldást. Mit tudunk róla a nemnegativitáson túl?

Tudjuk a feltételeket: $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$

Ebből levezethetünk következtetéseket.

Következtetések

$$6=\frac{1}{2}\cdot 12\geq \frac{1}{2}(4x_1+8x_2)=2x_1+4x_2\geq 2x_1+3x_2,$$

$$9=3\cdot 3\geq 3(2x_1+x_2)=6x_1+3x_2\geq 2x_1+3x_2,$$

$$6=\frac{3}{2}\cdot 4\geq \frac{3}{2}(3x_1+2x_2)=4.5\ x_1+3x_2\geq 2x_1+3x_2,$$

$$5=\frac{1}{3}\cdot(12+3)\geq \frac{1}{3}[(4x_1+8x_2)+(2x_1+x_2)]=2x_1+3x_2.$$

Középen a feltételek (egyenlőtlenségek) bal oldalainak NEMNEGATÍV EGYÜTTHATÓS lineáris kombinációi állnak. Úgy, hogy a célfüggvényt felülről becsüljük, hiszen x_1 és x_2 értéke NEMNEGATÍV. A sor a célfüggvényre ad egy könnyen ellenőrizhető felső becslést.

Felső becslések a célfüggvényre. De melyik a legjobb?

- Legjobb? Ez egy optimalizálási probléma.
-

Minimalizáljuk	$12\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3$-t
Feltéve, hogy	$2 \leq 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$
	$3 \leq 8\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3$
	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

- Csak elárulom, hogy a legjobb választás: $\lambda_1 = \frac{5}{16}$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = \frac{1}{4}$. Ekkor a becslés $4\frac{3}{4}$ a célfüggvényre.

- Miért nincs jobb? Ha $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{4}$ az eredeti feladat lehetséges megoldása, ahol a célfüggvény értéke $4\frac{3}{4}$.

Kiinduló feladat: Előjeles poliedrikus forma

Induljunk ki az alábbi problémából:

PRIMÁL probléma

Maximalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$
	$x \succeq 0$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{k \times n},\ b \in \mathbb{R}^k.$$

Definiálunk egy rokon problémát:

Dualizálás: Előjeles poliedrikus forma

Dualizálás

- Minden feltételhez bevezetünk egy **duális változót** $\to \lambda$.

  // Ez a megfelelő feltétel szorzója lesz. Esetünkben egyenlőtlenségeket szozunk, nemnegatív lesz: $\lambda \succeq 0$.
- A sorait súlyozzuk a megfelelő duális változóval úgy, hogy a c^T vektornál komponensenként nagyobb egyenlő vektort kapjunk.

  // Mivel a változók nemnegatívok, ezért elég (lásd korábbi példa), ha c „fölé” megyünk.

  Duális feltételek: $c^\mathsf{T} \preceq \lambda^\mathsf{T} A$.
- A **célfüggvény** a súlyozott egyenlőtlenségek jobb oldala. // $\lambda^\mathsf{T} b$.
- A cél **minimalizálni** a célfüggvényt.

Duális formálisan: Előjeles poliedrikus forma

DUÁL probléma

Minimalizáljuk	$b^{\mathsf{T}}\lambda$-t
Feltéve, hogy	$A^{\mathsf{T}}\lambda \succeq c$
	$\lambda \succeq 0$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix},\ A^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n\times k}/A \in \mathbb{R}^{k\times n},\ b \in \mathbb{R}^k,\ c \in \mathbb{R}^n.$$

Kiinduló feladat: Poliedrikus forma

Induljunk ki az alábbi problémából:

PRIMÁL probléma

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R}^n, \; A \in \mathbb{R}^{k\times n}, \; b \in \mathbb{R}^k.$$

Definiálunk egy rokon problémát:

Dualizálás: Poliedrikus forma

Dualizálás

- Minden feltételhez bevezetünk egy **duális változót** $\to \lambda$.

  // Ez a megfelelő feltétel szorzója lesz. Esetünkben egyenlőtlenségeket szozunk, nemnegatív lesz: $\lambda \succeq 0$.
- A sorait súlyozzuk a megfelelő duális változóval úgy, hogy a c^{T} vektort kapjuk.

  // Mivel a változók nemnegatívitását nem tudjuk, ezért c-t kell „kihoznunk”, hogy a primál célfüggvényt becsülhessük.

  Duális feltételek: $\lambda^{\mathsf{T}} A = c^{\mathsf{T}}$.
- A **célfüggvény** a súlyozott egyenlőtlenségek jobb oldala.

  // $\lambda^{\mathsf{T}} b$.
- A cél **minimalizálni** a célfüggvényt.

Duális formálisan: Poliedrikus forma

DUÁL probléma

Minimalizáljuk	$b^{\mathsf{T}}\lambda$-t
Feltéve, hogy	$A^{\mathsf{T}}\lambda = c$
	$\lambda \succeq 0$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix},\ A^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n\times k}/A \in \mathbb{R}^{k\times n},\ b \in \mathbb{R}^k,\ c \in \mathbb{R}^n.$$

Kiinduló feladat: Szimplexforma

Induljunk ki az alábbi problémából:

PRIMÁL probléma

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax = b$
	$x \succeq 0$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{k \times n},\ b \in \mathbb{R}^k.$$

Definiálunk egy rokon problémát:

Dualizálás: Szimplexforma

Dualizálás

- Minden feltételhez bevezetünk egy **duális változót** $\rightarrow \lambda$.

  // Ez a megfelelő feltétel szorzója lesz. Esetünkben egyenlőségeket szozunk, NINCS előjelfeltétel.

- A sorait súlyozzuk a megfelelő duális változóval úgy, hogy a c^{T} vektornál komponensenként nagyobb egyenlő vektort kapjunk.

  // Mivel a változók nemnegatívok, ezért elég (lásd korábbi példa), ha c „fölé” megyünk.

  Duális feltételek: $c^{\mathsf{T}} \preceq \lambda^{\mathsf{T}} A$.

- A **célfüggvény** a súlyozott egyenlőtlenségek jobb oldala: // $\lambda^{\mathsf{T}} b$.
- A cél **minimalizálni** a célfüggvényt.

Duális formálisan: Szimplexforma

DUÁLIS probléma

Minimalizáljuk	$b^{\mathsf{T}}\lambda$-t
Feltéve, hogy	$A^{\mathsf{T}}\lambda \succeq c$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix},\ A^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n\times k}/A \in \mathbb{R}^{k\times n},\ b \in \mathbb{R}^k,\ c \in \mathbb{R}^n.$$

Emlékeztető

Legyen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$. Nézzük a következő optimalizálási problémát:

Maximalizáljuk	$c(x)$-t
Feltéve, hogy	$x \in \mathcal{L}$

Definíció

Legyen

$$p^* := \sup\{c(x) : x \in \mathcal{L}\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

ahol $\sup \emptyset := -\infty$.

Emlékeztető újraértékelése

Miért p^* jelölés? Az optimumértékében a p a primál szó kezdőbetűje. Primál idegen szó, jelentése: ősi, eredeti, elsődleges. Ha egy optimalizálási probléma további feladatohoz vezet, akkor a kiinduló progbémára mint primál probléma hivatkozunk.

Jelölés

Ha egy primál feladatot veszünk és dualizáljuk, akkor a duál feladat optimális értékét

$$d^*$$

jelöli.

Vegyük észre, hogy ebben a kurzusban a primál feladatok általában maximalizásási problémák. A duális ennek megfelelően általában minimalizálás. Ekkor egy kicsit mások a megállapodások: $\inf \emptyset := \infty$.

Gyenge dualitás tétel

Gyenge dualitás tétel

Vegyünk egy (P) primál (tegyük fel, hogy maximalizálási probléma) feladatot és (D) duálisát (akkor ez minimalizálás). Ekkor

$$p^* \leq d^*.$$

Megjegyezzük, hogy $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ rendezése természetes.

Bizonyítás

- Ha $p^*, d^* \in \mathbb{R}$, akkor a fenti logikánk szerint minden primál lehetséges megoldásnál a célfüggvény értéket felülről becsli egy tetszőleges duális lehetséges megoldáson felvett duális célfüggvény.
- Ha $p^* = -\infty$, vagy $d^* = \infty$, akkor a gyenge dualitás semmitmondó.
- Ha $p^* = \infty$, akkor $\mathcal{L}_P$ (primál lehetséges megoldások halmaza) NEM üres, a célfüggvény tetszőlegesen nagy lehet. A duális problémának (fenti logikánk alapján) nem lehet lehetséges megoldása, $d^* = \infty$. Hasonló a helyzet, ha $d^* = -\infty$.

Szünet

Erős dualitás tétel

Maximalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$,

ahol $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Erős dualitás tétel

Egy LP feladatnál a következő két lehetőség áll fenn:

(i)
$$p^* = d^*,$$

(ii)
$$p^* = -\infty < d^* = \infty,$$

Sajnos a tökéletes szépséget elrontó (ii) lehetőség valóban fennállhat.

A „csúnya” eset: Primál probléma

Példa

Legyen x egyetlen valós változó. Egyetlen feltételt írunk fel.

Maximalizáljuk	x-t
Feltéve, hogy	$0 \cdot x \leq -1$

A feltétel ellentmondás, azaz $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(P)} = \emptyset$, azaz $p^* = -\infty$.

A „csúnya” eset: Duál probléma

- Az egy (egyenlőtlenség) feltételhez bevezetünk egy duális (nemnegatív) változót: λ.
- A feltételt a nemnagatív szorzóval úgy súlyozzuk, hogy bal oldala a célfüggvény legyen (pontosan).
- A feltétel jobb oldalát (felső becslés a primál célfüggvény optimális értékére) szeretnénk minimalizálni.

A példa duálisa

Minimalizáljuk	$-\lambda$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \cdot 0 = 1$

A feltétel ellentmondás, azaz $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(D)} = \emptyset$, azaz $d^* = \infty$.

Erős dualitás tétel bizonyítása: A kiindulás

Legyen a (P) primál feladat

Maximalizáljuk	$c^\mathsf{T}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$.

Az optimális érték legyen p^*.

(1) Ha $p^* = \infty$, akkor már a gyenge dualitás „kikényszeríti” az erős dualitást.

(2) Ha $p^* = -\infty$ és $\mathcal{L}_{(D)} \neq \emptyset$, akkor $\mathcal{L}_{(P)} = \emptyset$, így a Farkas-Lemma miatt alkalmas $\lambda_0 \succeq 0$ vektorra $\lambda_0^\mathsf{T} A = 0$ és $\lambda_0^\mathsf{T} b = -1$. Tudjuk, hogy van λ_1 duális lehetséges megoldás. Ekkor a $\lambda_1 + t\lambda_0$ is duális lehetséges megoldás lesz tetszőleges $t \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ekkor a duális célfüggvény értéke $(\lambda_1 + t\lambda_0)^\mathsf{T} b$ tetszőlegesen kicsi lehet, azaz $d^\star = -\infty$.

Erős dualitás tétel bizonyítása: A kiindulás (folytatás)

(3) Ha $p^* = -\infty$ és $\mathcal{L}_{(D)} = \emptyset$ esetén az erős dualitás tétel (ii) esete teljesül.

• A továbbiakban $p^* \in \mathbb{R}$. Azaz $\mathcal{L}_{(P)} \neq \emptyset$. Azaz célunk $p^* = d^*$ igazolása.

Ekkor tetszőleges pozitív $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$ esetén a

$$\begin{cases} Ax \preceq b \\ c^{\mathsf{T}} x \geq p^* + \varepsilon \end{cases}$$

rendszer nem kielégíthető.

Erős dualitás tétel bizonyítása: A Farkas-Lemma

A Farkas-Lemma alapján, ha egy

$$\begin{cases} Ax \preceq b \\ -c^{\mathsf{T}}x \leq -(p^* + \varepsilon) \end{cases}$$

rendszer nem kielégíthető, akkor alkalmas nemnegatív súlyokkal kikövetkeztethető a $0 \leq -1$ ellentmondás.

Legyen $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^k$ az eredeti k darab, $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ pedig a plusz feltétel együtthatója.

A Farkas-Lemma következtetése

Alkalmas $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^k$ és $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\lambda_0^{\mathsf{T}} A + \mu_0(-c^{\mathsf{T}}) = 0 (\in \mathbb{R}^n),$$

$$\lambda_0^{\mathsf{T}} b + \mu_0(-p^* + \varepsilon) = -1.$$

Erős dualitás tétel bizonyítása: A befejezés

- $\mu_0 = 0$ nem lehetséges, mert $Ax \preceq b$-nek van megoldása.
- Ha $\mu_0 > 0$, akkor a Farkas-Lemma következménye átrendezhető:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \cdot \lambda_0^{\mathsf{T}} A - c^{\mathsf{T}} = 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \cdot \lambda_0^{\mathsf{T}} b - (p^* + \varepsilon) < 0. \end{cases}$$

- Legyen $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \lambda_0 \succeq 0$.
- Ekkor

$$\begin{cases} \lambda_1^{\mathsf{T}} A = c^{\mathsf{T}} \\ \lambda_1^{\mathsf{T}} b < p^* + \varepsilon. \end{cases}$$

- Azaz λ_1 a duális feladat lehetséges megoldása, így

$p^* \leq d^* \leq p^* + \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges pozitív szám $p^* = d^*$.

Erős dualitás tétel más alakokra is

- Természetesen más alakokra is érvényes az erős dualitás tétel.

- A Farkas-Lemmának több változata is van. Ezek használatával bizonyítható az erős dualitás más változata.

- Egy alternatíva a különböző alakok poliéder alakra hozása. (Ne feljtsük el, hogy mindegyik alak „univerzális”.)

- Van „legáltalánosabb” LP alak is: Lineáris egyenlőség és egyenlőtlenség feltételek, a változók epdig három osztályba sorolhatók: nemnegatívok, nempozitívok és előjel-kötetlenek. A dualizálás, erős dualitás tétel erre az alakra is kidolgozható.

Szünet

Megvan az optimum! Hogyan lehet meggyőzni egy laikust?

- Tegyük fel, hogy $p^* \in \mathbb{R}$ és megvan egy x_{opt} optimális helye az LP feladatnak.

- Az eredmény a szimplex módszerrel adódott hosszas számolás, vagy egy megírt program segítségével. Hihető ez?

- A laikus az $x_0 := x_{\text{opt}}$ helyet nem hiszi optimálisnak. $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$ azonban számára is könnyen ellenőrizhető.

- Ekkor

$$c^{\mathsf{T}} x_0 \leq p^* \leq d^*$$

nyilvánvaló (csak a gyenge dualitásra hivatkozunk).

- Ha $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$ tetszőleges, akkor

$$c^{\mathsf{T}} x_0 \leq p^* \leq d^* \leq b^T \lambda_0$$

nyilvánvaló.

Meggyőzés

Észrevétel

Tegyük fel, hogy egy LP feladatra $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$ és $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$. Továbbá

$$c^{\mathsf{T}} x_0 = b^{\mathsf{T}} \lambda_0.$$

Ekkor x_0 a primál/eredeti LP feladat optimális helye. Továbbá λ_0 a duál LP feladat optimális helye, sőt erős dualitás van:

$$c^{\mathsf{T}} x_0 = p^* = d^* = b^{\mathsf{T}} \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

A bizonyítás a

$$c^{\mathsf{T}} x_0 \le p^* \le d^* \le b^{T} \lambda_0 = c^{\mathsf{T}} x_0$$

egyenlőtlenségsorozat két végének egyenlőségéből eredő nyilvánvaló következtetés arra, hogy végig egyenlőségnek kell fennállni.

Meggyőzés másképp fogalmazva

Definíció

Ha egy LP feladatra $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$ és $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$. Továbbá

$$c^{\mathsf{T}} x_0 = b^{\mathsf{T}} \lambda_0$$

teljesül, akkor $(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ párt **bizonyító-párnak nevezzük**.

Tétel

Ha egy LP feladatra (x_0, λ_0) bizonyító-pár, akkor x_0 optimális hely (speciálisan $p^* \in \mathbb{R}$).

Meggyőzés másként

Tegyük fel, hogy a poliedrikus alakkal dolgozunk:

Maximalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$.

A duális

Minimalizáljuk	$b^{\mathsf{T}}\lambda$-t
Feltéve, hogy	$\lambda^{\mathsf{T}}A = c^{\mathsf{T}}$
	$\lambda \succeq 0$

Ismét legyen $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$ és $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$ tetszőleges.

Ekkor

$$c^{\mathsf{T}}x_0 = (\lambda_0^{\mathsf{T}}A)x_0 = \lambda_0^{\mathsf{T}}(Ax_0) \leq \lambda_0^{\mathsf{T}}b = b^{\mathsf{T}}\lambda_0.$$

Az érvelés egyetlen egyenlőtlensége

$$c^T x_0 = (\lambda_0^T A) x_0 = \lambda_0^T (A x_0) \leq \lambda_0^T b = b^T \lambda_0.$$

Gyenge dualitás tétel

$$p^* \leq d^*.$$

Nézzük meg közlebbről az egyetlen egyenlőtlenségünket $\lambda_0^T (A x_0) \leq \lambda_0^T b$-t, vagyis $\lambda_0^T (A x_0 - b) \leq 0$-t:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a_i^T x_0 - b_i) \leq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

ahol $\lambda_0^T = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $a_i^T \in \mathbb{R}^n$ az A mátrix i-edik sora, $b_i \in \mathbb{R}$ a b vektor i-edik komponense.

Az egyenlőség elemzése

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(a_i^{\mathsf{T}} x_0 - b_i) \leq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k \qquad (\star)$$

Tudjuk, hogy $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$, azaz

$$a_i^{\mathsf{T}} x_0 - b_i \leq 0, \quad \text{minden } i = 1, 2, \ldots, k \text{ esetén.}$$

Tudjuk, hogy $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$ azaz

$$\lambda_i \geq 0, \quad \text{minden } i = 1, 2, \ldots, k \text{ esetén.}$$

Egyenlőség csak úgy lehet, ha

$$\lambda_i(a_i^{\mathsf{T}} x_0 - b_i) = 0, \quad \text{minden } i = 1, 2, \ldots, k \text{ esetén.}$$

Egyenlőség csak úgy lehet, ha

$$\lambda_i = 0 \text{ vagy } a_i^{\mathsf{T}} x_0 - b_i = 0, \quad \text{minden } i = 1, 2, \ldots, k \text{ esetén.}$$

Az egyenlőség elemzése, jelölések

Emlékezzünk a $\lambda_i \geq 0$ nemnegatív (i-edik) duális változó az i-edik $a_i^T x_0 \leq b_i$ ($a_i^T x_0 - b_i \leq 0$) feltétel „párja".

Definíció

Az i-edik $a_i^T x_0 \leq b_i$ feltétel **laza**, ha $a_i^T x_0 - b_i < 0$.

Az i-edik $\lambda_i \geq 0$ duális előjelfeltétel **laza**, ha $\lambda_i > 0$.

Jelölés

Jelölje $L_{(P)} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ a LAZA primál feltételek indexeinek halmazát. Jelölje $L_{(D)} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ a LAZA duál feltételek indexeinek halmazát.

Az egyenlőség elemzése, összefoglalás

Emlékeztetünk, hogy $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$ és $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$ esetén (x_0, λ_0) pontosan akkor egy bizonyító-pár, ha $(\star)$-ban egyenlőség teljesül. Ezt elemeztük és most összefoglaljuk megállapításainkat.

Tétel

Legyen $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$ és $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$ tetszőleges. (x_0, λ_0) pontosan akkor egy bizonyító-pár, ha

$$L_{(P)} \cap L_{(D)} = \emptyset.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy x_0 és λ_0 teljesíti a **komplementáris lazasági tulajdonságot**.

Az egyenlőség elemzése, összefoglalás II.

Másképpen fogalmazva:

Tétel

Legyen $x_0 \in \mathcal{L}_{(P)}$ és $\lambda_0 \in \mathcal{L}_{(D)}$ tetszőleges. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) x_0 primál optimális hely és λ_0 duál optimális hely,

(ii) (x_0, λ_0) bizonyító pár.

(iii) x_0 és λ_0 teljesíti a a komplementáris lazaság tulajdonságot.

Szünet

Emlékeztető

Vizsgáljuk egy korábbi előjelfeltételes poliedrikus formában lévő LP feladat feltételeit. (Az első két feltétel az előjelfeltétel.)

$$\begin{cases} -x_1 \phantom{{}-x_2} \leq 0 & (\mathcal{E}_1) \\ - x_2 \leq 0 & (\mathcal{E}_2) \\ -x_1 + x_2 \leq 1 & (\mathcal{E}_3) \\ x_1 \phantom{{}-x_2} \leq 3 & (\mathcal{E}_4) \\ \phantom{-x_1 -{}} x_2 \leq 2 & (\mathcal{E}_5). \end{cases}$$

Az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív változókat vesszük. x_i-re úgy tekintünk, mint az $(\mathcal{E}_i)$ egyenlőtlenség slack-változója.

Az előjelfeltételken túli feltételeket átírjuk

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (\mathcal{E}'_3) \\ x_1 + x_4 = 3 & (\mathcal{E}'_4) \\ x_2 + x_5 = 2 & (\mathcal{E}'_5). \end{cases}$$

Emlékeztető (folytatás)

A szótár alak ($c(x) = x_1 + x_2$):

$$\left[\begin{array}{cccc} \text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 & 1 & -1 \\ x_4 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Az első pivot

$$\left[\begin{array}{cccc} \text{bázis} & \text{konstans} & \boxed{x_1} & x_2 \\ x_3 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{x_4} & 3 & \boxed{-1} & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_2 \\ x_3 & 4 & -1 & -1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 3 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Emlékeztető (folytatás)

A második pivot:

$$\left[\begin{array}{crrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_2 \\ x_3 & 4 & -1 & -1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{crrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_5 \\ x_3 & 2 & -1 & 1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ x_2 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 5 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

A $c(x)$ sorában lévő nempozitív együtthatók mutatják, hogy megoldásunk optimális:

$$\left[\begin{array}{crrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_5 \\ x_3 & 2 & -1 & 1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ x_2 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 5 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Emlékeztető (folytatás)

Az optimális megoldás könnyen látható. A bázison kívüli változók (piros változók) értéke 0. A bázisbeli változók értékeit a konstansok mutatják (zöldek).

$$\left[\begin{array}{ccrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_5 \\ x_3 & 2 & -1 & 1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ x_2 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 5 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Ez most egy gyors, egyszerű számolás adta, de máskor hosszú, áttekinthetetlen program futtatásának végén kapjuk. Mi van ha nem bízunk a használt programban? Mi van ha fönökünk szerint nagyobb célfüggvényt kell/lehet elérni?

A kérdés

Hogyan tudunk egy bizonyító-párt találni?

Szimmetria: Írjuk át a változókat a megfelelő duális változókká: $x_i \to (\mathcal{E}_i) \to \lambda_i$.

A bázison belüli változók duális változópárjaik (piros szín) értéke legyen 0. A bázison kívüli változók duális párjai értéke legyen a célfüggvény együtthatók ellentettjei. Ezeket zölddel kódoltuk:

$$\left[\begin{array}{cccc} \text{bázis} & \text{konstans} & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & 2 & -1 & 1 \\ \lambda_1 & 3 & -1 & \\ \lambda_2 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 5 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Így egy duális optimális megoldást kapunk. Ezt könnyű ellenőrizni.

Az alábbiakban ezt látjuk be általában.

A tétel

- A végső szimplex szótárt nézzük.

- Látunk egy bázismegoldást. Könnyű ellenőrizni, hogy a primál LP feltételeinek eleget tesz.

- Látunk egy értékadást a duális változóknak.

- Tudjuk, hogy nemnegatívak a komponensek, azaz az értékadás az előjelfeltételeknek eleget tesz.

- Látjuk a komplementáris lazasági tulajdonságot. Miért? $L_{(P)} \subset B$ és $L_{(D)} \subset K^\star \equiv K$.

Tétel

A fenti módon kiolvasott értékadás kielégíti a duális feltételekt.

- Összefoglalva az előző példa nem speciális: A szimplex módszer leállásakor a leírt módon egy bizonyító pár is a kezünkben van.

A Lemma

- Vegyünk egy előjelfeltételes poliedrikus alakban lévő LP feladatot (n változó/n előjelfeltétel, további k feltétel), $b \succeq 0$ (a második fázisban vagyunk) és $c^{\mathsf{T}}x$ célfüggvény.
- Írjuk fel szimplex alakban ($n+k$ változó ($\widetilde{x}$), párosítva az $n+k$ feltétellel, párosítva az $n+k$ duális változóval):

Lemma

- Vegyük egy szótárat a szimplex algoritmus futása alatt (így van egy B bázisunk, vele együtt egy K halmazunk is). Írjuk át a szótár észak-nyugati határát. Minden változót helyettesítsünk a megfelelő feltétel baloldalává: $x_i \leftarrow \mathcal{E}_i$. $c(x)$ helyére írjunk $-c(x)$-et. A konstans oszlopot hagyjuk el (ne vegyük figylembe).
- Vegyünk egy kifejezést a bal oldali oszlopból: β, ami $\mathcal{E}_i$ ($x_i \in B$) vagy $-c(x)$. Legyen ennek sora σ. σ számait fogjuk fel együtthatónak a megfelelő $\mathcal{E}_i$ ($x_i \in K$) kifejezéseknek. Ekkor a kapott kifejezésekből felépített lineáris kombináció/súlyozott összeg β lesz.

A Lemma bizonyítása

Az algoritmus kezdetén a bizonyítandó nyilvánvalóan teljesül. Ez a példánkon keresztül jól látszik

$$\left[\begin{array}{r|r|rr} \text{bázis} & \text{konstans} & (-x_1) & (-x_2) \\ (-x_1+x_2) & 1 & 1 & -1 \\ (x_1) & 3 & -1 & \\ (x_2) & 2 & & -1 \\ \hline -(x_1+x_2) & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A bizonyítandó minden pivotnál megőrződik. A pivot egy Gauss-elimináció-szerű lépés. Az öröklődés nyilvánvaló. A példa rávilágít az állítás egyszerűségére.

$$\left[\begin{array}{r|r|rr} \text{bázis} & \text{konstans} & (x_1) & (-x_2) \\ (-x_1+x_2) & 4 & -1 & -1 \\ (-x_1) & 3 & -1 & \\ (x_2) & 2 & & -1 \\ \hline -(x_1+x_2) & 3 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

A Tétel bizonyítása

Speciálisan, amikor eljutunk a szimplex módszer sikeres befejezéséhez a Lemma állítása akkor is teljesül. Példánkban:

$$\left[\begin{array}{rrrr}
\text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\
(-x_1+x_2) & 2 & -1 & 1 \\
-x_1 & 3 & -1 & \\
-x_2 & 2 & & -1 \\
\hline
-(x_1+x_2) & 5 & -1 & -1
\end{array}\right].$$

• Az alsó sorra olvassuk el a Lemma állítását, ami egy lineáris kifejezésekre vonatkozó azonosság.

• Az ott megjelenő előjelváltások kiejtik egymást.

• A duális változóknak adott értékekkel súlyozzuk a megfelelő egyenlőtlenségek bal oldalát és éppen a célfüggvény jön ki.

• Azaz értékadásunk lehetséges duális megoldás.

Szünet

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Alapok

- Legyen két játékos Xavér és Yvett. // A játék kétszemélyes.
- Mindkét játékos lép egyet és ennek függvényében kiértékelik a játékot.
- Xavér lehetséges lépései egy L_X véges halmaz elemei, míg Yvetté egy L_Y véges halmaz elemei.
- Egy fordulóban Xavér és Yvett választ egy ℓ_X elemet az L_X, illetve ℓ_Y elemet az L_Y halmazból.
- A játék eredménye: Xavér $A_X(\ell_X, \ell_Y) \in \mathbb{R}$ összeget kap Yvettől. Persze lehet, hogy Yvett kap Xavértől, amikor is $A_X(\ell_X, \ell_Y) < 0$, vagy lehet $A_X(\ell_X, \ell_Y) = 0 \in \mathbb{R}^{L_X \times L_Y}$ (döntetlen).
- A játék eredményét kifejezhetjük Yvett szempontjából is egy A_Y mátrixszal. Nyilván $A_X + A_Y = 0$. // A játék zéróösszegű.

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Példa

Példa: Kő-papír-olló

$$L_X = L_Y = \{\text{kő}, \text{papír}, \text{olló}\}.$$

$A_X =$

X \ Y	kő	papír	olló
kő	0	-1	1
papír	1	0	-1
olló	-1	1	0

$A_Y =$

X \ Y	kő	papír	olló
kő	0	1	-1
papír	-1	0	1
olló	1	-1	0

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Stratégiák

- Feltesszük, hogy Xavér és Yvett is választ egy-egy stratégiát a S_X, S_Y halmazokból. Egy $s \in S_X$ stratégia leírja, hogyan válassza lépését Xavér.

Példa: Determinisztikus stratégiák

Xavér egy stratégiája lehet $\ell_0 \in L_X$: Xavér ℓ_0-t lép. // $S_X = L_X$.

Például a kő-papír-olló jétékban "papír" startégia, hogy Xavér mindig papírt-t mond.

Példa: von Neumann kevert stratégiái

Yvett egy stratégiája lehet valószínűségi eloszlás L_Y-en: Yvett az eloszlás alapján generál egy L_Y-beli elemet és meglépi azt. // $S_Y = \mathbb{D}^{L_Y} := \{\rho \in \mathbb{R}_+^{L_Y} : 1^\mathsf{T} x = 1\}$.

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Hogyan gondolkozik Xavér?

• „Tegyük fel, hogy s_X stratégia szerint lépek."

• Ha ezt Yvett tudja, akkor egy olyan s_Y startégiát választ, amely optimális helye a következő feladatnak:

$$\min_{s' \in S_Y} v(A_X, s_X, s'),$$

ahol $v(A_X, s_X, s)$ írja le Xavér nyereségét, ha ő s_X, míg Yvett s szerint lép.

• Xavér nyilván, egy olyan $s_X \in S_X$-et választ, amely optimális helye a következő feladatnak:

$$\max_{s \in S_X} \min_{s' \in S_Y} v(A_X, s, s').$$

Észrevétel

Xavér a fenti startégia választással legalább $\max_{s \in S_X} \min_{s' \in S_Y} v(A_X, s, s')$ bevételt ér el.

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Xavér mit gondol Yvett gondolkozásáról?

- Yvett tudja, hogy egy $s_Y \in S_Y$ startégiájára én egy olyan s_X startégiát választok, amely optimális helye a következő feladatnak:

$$\max_{s \in S_X} v(A_X, s, s_Y).$$

- Yvett nyilván, egy olyan $s_Y \in S_Y$-et választ, amely optimális helye a következő feladatnak:

$$\min_{s' \in S_Y} \max_{s \in S_X} v(A_X, s, s').$$

Észrevétel

Xavér tudja, ha Yvett a fentiek szerint gondolkozik akkor legfeljebb

$$\min_{s' \in S_Y} \max_{s \in S_X} v(A_X, s, s').$$

bevételt ér el.

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Az észrevételek eredője

Észrevétel

$$\max_{s\in S_X}\min_{s'\in S_Y} v(A_X, s, s') \leq \min_{s'\in S_Y}\max_{s\in S_X} v(A_X, s, s').$$

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Determinisztikus stratégiák

- Az észrevétel egy középiskolai egyszerű szakköri feladat.

Kő-papír-olló, determinisztikus startégia

$$-1 \leq \quad \text{Xavér nyeresége} \quad \leq 1.$$

- Az észrevétel konkluziója semmitmondó.

Kétszemélyes, zéróösszegű játékok: Kevert stratégiák

A v „érték” függvény kevert stratégiák között

Legyen $s \in \mathbb{D}^{L_X}$, $s' \in \mathbb{D}^{L_Y}$, $A_X \in \mathbb{R}^{L_X \times L_Y}$. Ekkor

$$v(A_X, s, s') = s^\mathsf{T} A_X s'.$$

A korábbi észrevétel

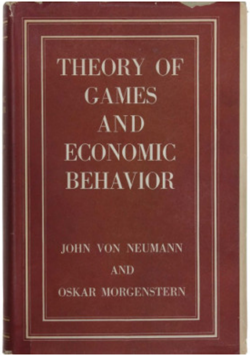
$$\max_{s \in \mathbb{D}^{L_X}} \min_{s' \in \mathbb{D}^{L_Y}} s^\mathsf{T} A_X s' \leq \min_{s' \in \mathbb{D}^{L_Y}} \max_{s \in \mathbb{D}^{L_X}} s^\mathsf{T} A_X s'.$$

von Neumann minimax tétele

$$\max_{s \in \mathbb{D}^{L_X}} \min_{s' \in \mathbb{D}^{L_Y}} s^\mathsf{T} A_X s' = \min_{s' \in \mathbb{D}^{L_Y}} \max_{s \in \mathbb{D}^{L_X}} s^\mathsf{T} A_X s'.$$

von Neumann (1903. december 28. — 1957. február 8.)

von Neumann: A játékelmélet alapjainak megalkotása



von Neumann minimax tétele: A konkluzió

• Az állítás ekvivalens a következővel: Xavér választhat egy olyan $s_0 \in \mathbb{D}^{L_X}$ startégiát, hogy garantáltan legalább

$$v := v_{\max} = \min_{s' \in \mathbb{D}^{L_Y}} s_0^\mathsf{T} A_X s'$$

értéket nyerjen, továbbá
Yvett választhat egy olyan $s_0' \in \mathbb{D}^{L_Y}$ stratégiát, hogy legfeljebb

$$v = \max_{s \in \mathbb{D}^{L_X}} s^\mathsf{T} A_X s_0'$$

értéket veszítsen.

• Ha Xavér eltér s_0-tól, akkor a v nyereségértéke „veszélybe kerül”.

• Ha Yvett eltér s_0'-től, akkor a $-v$ nyereségértéke „veszélybe kerül”.

• Az (s_0, s_0') stratégiapár egy „equilibrium pont”.

von Neumann minimax tétele: A bizonyítás: A bal oldal

$$\max_{x\in\mathbb{D}^{L_X}} \min_{y\in\mathbb{D}^{L_Y}} x^{\mathsf{T}}Ay = \max_{x\in\mathbb{D}^{L_X}} \min_{j=1,2,\ldots,n} x^{\mathsf{T}}Ae_j = \max_{x\in\mathbb{D}^{L_X}} \min_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{k} A_{i,j}x_i$$

a minimax tétel bal oldalának átírása.

- Ez az átírás megfogalmazható egy ($\mathrm{P}_{\mathrm{bal}}$) LP feladatként:

Maximalizáljuk	v-t
Feltéve, hogy	$v \leq \sum_{i=1}^{k} A_{i,j}x_i$, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$
	$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$
	$x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$

- Erre a feladatra

$$p^\star = \max_{x\in\mathbb{D}^{L_X}} \min_{y\in\mathbb{D}^{L_Y}} x^{\mathsf{T}}Ay$$

von Neumann minimax tétele: A bizonyítás: A jobb oldal

$$\min_{s'\in\mathbb{D}^{L_Y}} \max_{s\in\mathbb{D}^{L_X}} x^{\mathsf{T}} Ay = \min_{s'\in\mathbb{D}^{L_Y}} \max_{i=1,2,\dots,k} e_i^{\mathsf{T}} Ay = \min_{s'\in\mathbb{D}^{L_Y}} \max_{i=1,2,\dots,k} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j .$$

a minimax tétel jobb oldalának átírása.

- Ez az átírás megfogalmazható egy ($\mathrm{P_{jobb}}$) LP feladatként:

Minimalizáljuk	v-t
Feltéve, hogy	$v \geq \sum_{i=1}^{k} A_{i,j} x_i$, ahol $i = 1, 2, \dots, n$
	$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
	$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$

- Erre a feladatra az optimális érték

$$\max_{x\in\mathbb{D}^{L_X}} \min_{y\in\mathbb{D}^{L_Y}} x^{\mathsf{T}} Ay$$

von Neumann minimax tétele: A bizonyítás: Erős dualitás

A bizonyítás két egyszerű észrevételen alapul.

1. Észrevétel

(P_{jobb}) duálisa (P_{bal}).

2. Észrevétel

(P_{jobb}) és (P_{bal}) optimális értéke is véges.

- A második észrevétel garantálja az erős dualitást.
- A két optimális érték egyenlősége éppen a bizonyítandó egyenlőség.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!