A szimplex módszer

Hajnal Péter

2021. tavasz

A szimplexalak: Feltevés I

- Az alábbiakban mindig feltesszük, hogy LP feladatunk szimplexalakban van.

Feltevés I

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a szimplexalakban lévő LP mátrixa, amelyről feltesszük, hogy sorai lineárisan függetlenek (speciálisan $n \geq k$).

- Legyen B a változók egy k elemű halmaza. x_B jelölje ezen változók oszlopvektorát. K legyen a többi változó halmaza. x_K jelölje ezek oszlopvektorát. Feltehető, hogy $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_K \end{pmatrix}$.
- A $B \dot{\cup} K$ felbontás kihat az A mátrixra is: $A = (A_B | A_K)$.
- Ekkor az $Ax = b$ feltétel

$$A_B x_B + A_K x_K = b$$

alakban írható fel.

Feltevés I': Teljes sorrangúság és az egységmátrix

- $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ teljes sorrangúsága azt jelenti, hogy alkalmas B k-elemű változóhalmazra A_B invertálható lesz.
- Ha A_B invertálható, akkor ez az egyenlőség felírható

$$x_B + A_B^{-1} A_K x_K = A_B^{-1} b.$$

alakban. „Megjelent" egy egységmátrix.

Feltevés I'

Sőt feltesszük, hogy $n = k + \ell$, továbbá $A = (I_k | A_0)$,

$$Ax = I_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell} \end{pmatrix} = b.$$

Feltevések I: Teljes sorrangúság és az egységmátrix (folytatás)

- Rendezés után kapjuk, hogy

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_K x_K.$$

- Azaz x K-komponenseinek ismerete esetén az egyenlőség feltételek egyértelműen előírják a B-komponensek értékeit. x_K értékét/komponenseit ismerve x_B kiolvasható. Az egyenlőségrendszerünk ezen alakját úgy használhatjuk mint egy szótárat.

- Természetesen ha lehetséges megoldást szeretnénk, akkor a K-változók értékadásánál ügyelnünk kell a nem-negativitásra. Azonban ezután jön a B-változók előre determinált kiszámítása. Ezek eredményeinek is nem-negatívnak kell lennie. Előre kell gondolkoznunk.

Feltevés II

Feltevés II

$$b \succeq 0.$$

• Ez egy valódi egyszerűsítő feltevés (szemben Feltevés I-gyel). Egyszerűsítése abban rejlik, hogy könnyebbé teszi az elindulást. Tárgyalása mutatja a szimplex algoritmus teljes eszköztárát.

Észrevétel

Feltétel II mellett könnyű kiolvasni egy lehetséges megoldást. Legyen $x_K = 0 \in \mathbb{R}^\ell$ és legyen x_B az egyenlőségek által meghatározott érték.

• Mielőtt elkezdenénk az algoritmus leírását néhány fogalmat, elnevezést vezetünk be.

LP szótáralak: Példa

Kiinduló példánk:

$$\begin{array}{|ll|}\hline
\text{Maximalizáljuk} & x_1 + x_2\text{-t} \\
\text{Feltéve, hogy} & \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_4 & = 3 \\ x_2 + x_5 & = 2 \end{cases} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ \hline
\end{array}$$

Az egyenlőségfeltételek mátrixalakban

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

LP szótáralak: Példa (folytatás)

A mátrix x_3, x_4, x_5-nak megfelelő oszlopai egy egységmátrixot adnak. Ez alapján x_3, x_4, x_5 kifejezhető a többi változóval:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = x_3 \\ -x_1 \qquad + 3 = x_4 \\ \qquad - x_2 + 2 = x_5 \end{cases} .$$

A célfüggvény is leírható x_1 és x_2 segítségével:

$$x_1 + x_2.$$

Ez a szimplexalakban lévő LP feladat szótáralakja klasszikusan leírva.

Szótáralak: Mátrixokkal leírva

- Feltesszük, hogy kiinduláskor az LP feladatunk alakja:

$$Ax = A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} + I_k \begin{pmatrix} x_{\ell+1} \\ \vdots \\ x_{\ell+k} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\ell+1} \\ \vdots \\ x_{\ell+k} \end{pmatrix} = b.$$

- Ezt az alakot átírjuk:

$$\begin{pmatrix} x_{\ell+1} \\ \vdots \\ x_{\ell+k} \end{pmatrix} = b - A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix}.$$

- Az átírt alakot speciális, tömörített formában kódoljuk.

Szótáralak: Táblázatos jelölés

Ezt az alakot a következő táblázatos formában szokásos leírni:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\ \hline x_3 & 1 & 1 & -1 \\ x_4 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$c(x)$ sorában szerepel egy 0, míg másokat nem írtunk ki. A c-beli konstans fontos ezért szerepeltettük az ott lévő 0-t. Az együtthatóknál spóroltunk a hellyel.

Majdnem mindent leírtunk. Csak az előjelfeltételek hiáanyoznak. Mindig legyen a fejünkben, hogy x_i változók nemnegatív értékűek.

Szótáralak: Táblázatos jelölés, Megjegyzések

- Ha szótáralakról beszélünk mindig a fenti alakra gondolunk.
- Vegyük észre, hogy ez egy egyenlőségrendszer. Az egyenlőtlenségeket/előjel feltételeket a fejünkben tároljuk.
- A szótárt Gauss-eliminációs elvével ekvivalens módon átírhatjuk. Csak a fejünkben lévő előjelfeltételek szabnak majd határt.

Szótáralak: Táblázatos jelölés, formulák

- Feltesszük, hogy a szimplexalak $Ax = b$ egyenletrendszerének mátrixa teljes rangú.
- B legyen az A mátrix oszlopvektorainak egy bázisa ($|B| = k$). Legyen x_B a B-beli oszlopoknak megfelelő változók vektora, míg x_K a bázison kívüli oszlopoknak megfelelő változók vektora.
- Legyen A_B az A mátrix azon részmátrixa, amelyet B-beli oszlopok határoznak meg. Hasonlóan definiálható A_K.
- Legyen c_B a c vektor azon részvektora, amelyek B elemeinek felelnek meg. Hasonlóan definiálható c_K.

Tétel

Ekkor a szótáralak formulákkal:

$$\left[\begin{array}{ccc} \text{bázis} & \text{konstans} & x_K^\top \\ x_B & A_B^{-1}b & -A_B^{-1}A_K \\ \hline c(x) & c_B^\top A_B^{-1}b & c_K^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_K \end{array}\right].$$

Bázisváltozók, bázison kívüli változók

- A szimplexalakban felismerünk egy egységmáttrixot. Az egyégmátrix oszlopainak megfelelő változókat kifejeztük a többivel.

Definíció

A szótáralakban a soroknak megfelelő változókat *bázisváltozóknak* nevezzük. Halmazukat B-vel jelöljük. K-val jelöljük a bázison kívüli változók halmazát.

- B és K nem az optimalizálási feladat, vagy a szimplexalak által meghatározott fogalom. B és K a felismert/behozott egységmátrixtól, a szótáralaktól függ.
- Eljárásunk lényege a szótár folyamatos átírása. Így a bázisváltozók halmaza is dinamikusan változik.

Bázismegoldások

- Feltettük, hogy az egységmátrix kiinduláskor adott. Feltettük, hogy $0 \preceq b$.

Definíció

Egy szótáralakból egyenletrendszerünk egy megoldását nyerjük az alábbi módon: a K-beli változók értékét vegyük 0-nak, a B-belieket fejezzük ki. Ha ez egy lehetséges megoldás, akkor ezt a megoldást *bázismegoldásnak* nevezzük.

- Egyszerűsítő feltevésünk alapján most van egy kiinduló bázismegoldásunk.

- Általában nem könnyű ilyet találnunk. Ha feltétel rendszerünk ellentmondásos, akkor nincs lehetséges megoldás, így nincs bázismegoldás sem. Megtalálni egy bázismegoldást nem egyszerű, de erről csak később lesz szó.

Észrevétel

Észrevétel

Vegyünk egy szimplexalakban lévő LP feladatot n változóval és az előjelfeltételek mellett k további egyenlőséggel. Ekkor a bázis megoldások száma véges, legfeljebb

$$\binom{n}{k}.$$

- Ha a B (és így K is) halmaz ismert, akkor a szótár is ismert. Ekkor a definíció alapján egyetlen bázismegoldás lehet.
- B az összes n változó egy k elemű részhalmaza. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k}$ darab k elemű részhalmaza van.

Észrevétel: Megjegyzések

- A B k-elemű változóhalmazra/oszlophalmazra van $\binom{n}{k}$ lehetőségünk. nem szükségszerű, hogy A_B invertálható legyen, azaz B szolgálhat bázisként.
- $\binom{n}{k}$ az A mátrix oszlopbázisai számára is egy felső becslés. Ha B szolgálht bázisként, akkor felírhatjuk a szótárat. Sőt a komplementer K változóhalmaz elemeinek 0 értéket adva az $Ax = b$ egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Ez azonban nem szükségszerűen elégíti ki az előjelfeltételeket. Azaz egy bázisból származó megoldása $Ax = b$-nek nem szükségszerűen bázismegoldás.
- A bázismegoldások halmaza szűkebb mint az A mátrix oszlopbázisainak halmaza. A szimplex módszer bázismegoldások között „mozog” és talál egy optimális megoldást (ha van). Az, hogy ez a „terv” működik, az nem triviális. Ebben a pillanatban ez csak egy ígéret.

Szimplex módszer: Ígéretek

Ígéretek

(1) Ha van lehetséges megoldása feltételrendszerünknek, akkor van bázismegoldásunk is.

(2) Ekkor képesek leszünk egy bázismegoldást megtalálni.

(3) Ha léteznek optimális helyek, akkor köztük van bázismegoldás is.

(4) Képesek leszünk a kiinduló bázismegoldásból, további bázismegoldásokon keresztül elérni egy optimális bázismegoldást.

Feltétel I + Feltétel II az (1) és (2) ígértet konstruktív módon „kezünkbe adja”.

Szünet

Bázismegoldások geometriai tartalma

- Csak a korábbi példán magyarázzuk el a geometrai tartalmat. A példa előjeles poliedrikus alakú.

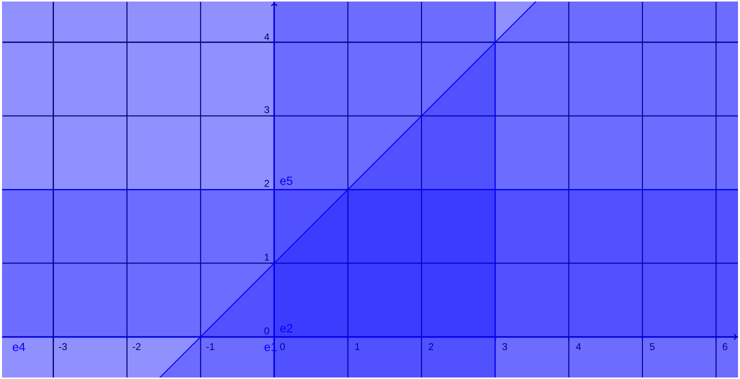
$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} \geq 0 \\ \phantom{-x_1+{}} x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} \leq 3 \\ \phantom{-x_1+{}} x_2 \leq 2. \end{cases}$$

- Az első két feltétel előjelfeltétel. Ezeknek „helye van” a szimplexalakban is.
- A következő három egyenlőtlenséget slack változók bevezetése után egyenlőségekké alakítjuk.
- A szótáralak kialakítása után öt változónk lesz. Feltételeink teljesülnek.

Bázismegoldások geometriai tartalma (folytatás)

- A feltételek felsorolásában észrevehetünk egy furcsaságot: az első és második feltétel az x_1 és x_2 változóra vonatkozó előjelfeltétel.
- A harmadik egyenlőtlenség az, ami a szótáralak x_3 változóját „behozta". A mostani negyedik egyenlőtlenségünk az, ami a szótáralak x_4 változóját „behozta". A mostani ötödik egyenlőtlenség az, ami a szótáralak x_5 változóját „behozta".
- A furcsa sorrend tudatos: Az öt feltétel és a szótár alak öt változója párban van. Mindegyik az egyik eredeti feltétel (beleértve az előjelre vonatkozó feltételeket is) slack-jét („játéklehetőségét") méri.
- Érdemes a második poliedrikus alakban lévő LP feladat szótáralakjának mindegyik változóját slack változónak tekinteni.
- Eredeti példánkban szerencsére csak két változónk van (a második poliedrikus alakkal dolgozunk). Ekkor a megoldáshalmazok síkbeli, jól felrajzolható halmazok.

Bázismegoldások geometriai tartalma (folytatás)



A félterek mindegyike kék félsík. A rendszer megoldása a legsötétebb kék tartomány, egy síkbeli poliéder. Esetünkben ez egy (konvex) ötszög, azaz korlátos, azaz egy 2-dimenziós politóp. A feltételek egyenlőséggel való teljesülése esetén a határoló egyenesen vagyunk (a slack 0). Ezek a halmazok kiemeltek.

Bázismegoldások geometriai tartalma (folytatás)

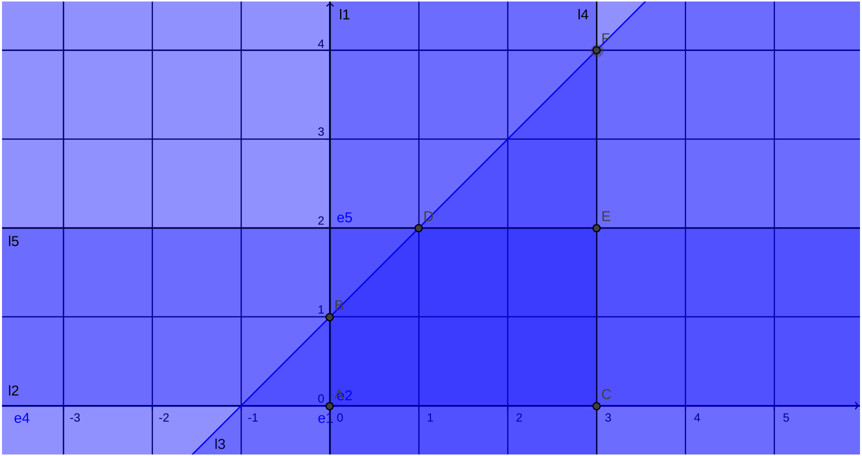
- Egy szótárból úgy nyerünk a szimplexalak egyenletrendszerének egy megoldását, hogy a K-beli változókat 0-nak tekintjük. Azaz két slack értéket 0-nak veszünk. Ekkor két határoló egyenes metszéspontjaként írjuk le a szimplexalak egyenletrendszerének megoldását.

- A

$$\left[\begin{array}{cccc} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 & 1 & -1 \\ x_4 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

szótárhoz tartozó megoldásban $x_1 = x_2 = 0$. Azaz az előjel feltételek slack-je 0. Ezek egyenlőséggel teljesülnek. Ez az ábrán a lehetséges megoldások poliéderének egyik csúcsa, éppen az origó.

Bázismegoldások geometriai tartalma (folytatás)



A félterek határoló egyeneseinek metszéspontjai közül néhányat bejelöltünk és megbetűztünk.

Bázismegoldások geometriai tartalma (folytatás)

- F is az ábrában bejelölt metszéspont. Ez az $x_1 \leq 3$ és $-x_1 + x_2 \leq 1$ félsíkok határoló egyeneseinek metszéspontja. Ezekhez rendeltük a x_3 és x_4 slack változókat.
- A $K = \{x_3, x_4\}$ és $B = \{x_1, x_2, x_5\}$ szereposztáshoz is tartozik egy szőtár:

$$\left[\begin{array}{crrr} & \text{konstans} & x_4 & x_3 \\ & & & \\ x_2 & 4 & 1 & -1 \\ x_5 & -2 & 1 & 1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ \hline c(x) & 7 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

- Ha itt a K-beli (slack-)változók értékeit lenullázuk ($x_1 = 3$ és $-x_1 + x_2 = 1$), akkor nem jutunk lehetséges megoldáshoz (a két egyenes metszete, F nem tartozik a lehetséges megoldások halmazához). Ehhez a szótárhoz nem tartozik bázismegoldás.

A példa összefoglalása

- A rendszer mátrixa 3×5 méretű.
- $\binom{5}{3} = 10$ sok oszlophármas van.
- Ebből 2 olyan, hogy a kapcsolódó részmátrix nem teljes rangú.
- A maradék $10 - 2 = 8$ esetben a kapcsolódó részmátrix teljes rangú és egy megfelelő szótárat írhatunk fel.
- 3 esetben a kiválasztott oszlopokhoz tartozó változóknak 0 értéket adva nem kapunk lehetséges megoldást.
- A maradék 5 oszlophármas jó kiinduló szótárnak felel meg.

Hová tartunk?: A geometriai tartalom

- Láttuk, hogy a geometriai tartalomhoz az előjeles poliedrikus formában szereplő egyenlőtlenségeket kell geometriailag elképzelni.
- A szimplexalakban felírt egyenlet feltételek szótáralakjait magyarázzuk a geometriai képpel
- A bázis megoldásoknak pontosan a lehetséges megoldások poliéderének csúcsai felelnek meg.
- A szimplex módszer bázismegoldásokon keresztül jut el egy optimális megoldáshoz. Azaz geometriailag a második poliedrikus alakban leírt poliéder csúcsain sétálunk az optimum felé.

Szünet

Hol is állunk?

(1) Felírtuk (ekvivalens átalakításokkal) egy speciális alakban.

// Ebben csak egyenletek vannak, de fejben kell tartanunk, hogy az x_i változók értékei csak nemnegatívok lehetnek.

(2) Ezen kívül van egy kiinduló lehetséges megoldásunk, egy bázismegoldás.

// Az LP feladat lényegét még nem is érintettük: A célfüggvény értékét minél nagyobbnak szeretnénk.

(3) A feladat átírásában ott szerepel a célfüggvény a bázison kívüli változókkal kifejezve.

(4) A bázison kívüli változóknak az értéke kezdetben 0. Bármelyik bázison kívüli változó esetén változtatásunk iránya kényszerített: „csak emelhetjük".

// Ekkor azonban a bázisváltozók és a célfüggvény értéke is változik. // A bázisváltozók értéke nem lehet negatív. // A célfüggvény értékét minél nagyobbra szeretnénk.

Példa

Egy lehetséges kiinduló szótár

$$\left[\begin{array}{rrrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 & 1 & -1 \\ x_4 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Az aktuális bázis megoldásunk: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 2$.
- Ha $x_1 = x_2 = 0$, akkor csak ez lehetséges. Ha eltérünk, akkor x_1 vagy x_2 pozitív értékű lesz. Mondjuk x_1-et megnöveljük.
- Ez a növelés növeli x_3 értékét, x_5 értéke nem változik. Ha eddig nem-negatív értékűek voltak, azok is maradnak. Ettől a változástól nem félünk.
- Ez a növelés csökkenti x_4 értékét. Eddig nem-negatív értékűek volt, annak is kell maradnia. Ettől a változástól „félünk”.
- Ez a növelés növeli a célfüggvény értékét. Ennek örülünk.

Az első fontos észrevétel

I. Észrevétel

Ha az LP feladat aktuális szótáralakjában a célfüggvényben minden bázison kívüli változó együtthatója negatív vagy 0, akkor az aktuális bázismegoldás optimális, a célfüggvény optimális (esetünkben maximális) értéke a célfüggvény kifejezésében lévő konstans.

Valóban. Ha $c(x) = \alpha + \sum_{x_i \in K} \beta_i x_i$, ahol $\beta_i \leq 0$ $(x_i \in K)$, akkor $c(x) \leq \alpha$ minden lehetséges megoldásra és $c(x) = \alpha$ az aktuális bázismegoldásra.

Általában azonban

$$P = \{x_i \in K : c(x)\text{-ben } x_i \text{ együtthatója pozitív}\}$$

egy nemüres halmaz. Amit a továbbiakban felteszünk.

A második fontos észrevétel

II. Észrevétel

Ha egy $x_i \in K$ minden bázisváltozó kifejezésében pozitív vagy 0 együtthatóval szerepel, akkor x_i növelésével minden változó nem negatív marad. Ha ráadásul $x_i \in P$, akkor x_i növelésével a célfüggvény értéke növelhető. Sőt a növeléssel bármilyen nagy célfüggvényértéket elérhetünk, LP feladatunk nem korlátos.

Példa

$$\left[\begin{array}{crrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_3 & x_2 \\ x_1 & 1 & -1 & 1 \\ x_4 & 3 & -1 & \\ \hline c(x) & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

szótár bázismegoldása $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 3$. x_2 növelésével a célfüggvény értéke nő. Egyik bázisváltozó sem ad korlátot. $x_1 = 1 + t$, $x_2 = t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ egy lehetséges megoldás, a célfüggvény értéke $1 + t$, tetszőlegesen nagy lehet.

Mi van, ha egyik észrevétel sem alkalmazható?

(1) $P \neq \emptyset$, azaz a külső változók valamelyikénke pozitív az együtthatója

(2) Minden $x_i \in P$ oszlopában egy alkalmas bázisváltozó sorában negatív együttható szerepel, azaz tetszőleges $x_i \in P$ esetén valamely bázisváltozó korlátozza x_i növelését. Azaz minden $x_i \in P$ esetén a

$$Q(x_i) = \{x_j \in B : x_j \text{ felírásában } x_i \text{ együtthatója negatív}\}$$

változóhalmaz nem-üres.

A bázisváltozó aktuális értéke nemnegatív. Minden $x_i \in P$ és $x_j \in Q(x_i)$ esetén könnyen meghatározható egy $[0, t_j]$ intervallum, hogy ezen belül oldva meg a x_i növelést a kiszámolt x_j nemnegatív legyen. Az is világos, hogy x_i-nek a t_j (extrém) értékre növelésével x_j lenullázódik.

Mi van, ha egyik észrevétel sem alkalmazható?: Példa

Példa

$$\left[\begin{array}{rrrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 & 1 & -1 \\ x_4 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

- x_1 együtthatója a célfüggvényben 1, x_1 növelése növeli a célfüggvényt.
- x_3 és x_5 nem ad határt a növelésnek.
- x_4 azonban határt szab. Az új x_1 csak a $[0, 3]$ intervallumból jöhet ha azt akarjuk, hogy x_4 ne legyen negatív.
- Ha a K-beli értékeknél áttérünk $x_1 = 3$, $x_2 = 0$-ra akkor a meghatározott bázisváltozók nemnegatívok maradnak, $x_4 = 0$ lesz.

Példa (folytatás)

- Vegyük észre, hogy az eredeti szimplexformában $B \setminus \{x_4\} \cup \{x_1\}$ változóinak megfelelő oszlopok ($k = 3$ darab) lineárisan függetlenek lesznek.
- Azaz $B \setminus \{x_4\} \cup \{x_1\}$ lehet egy új bázis, mellette $K \setminus \{x_1\} \cup \{x_4\}$ lesz az bázison kívüli változók halmaza.
- Azt mondjuk x_1 *(a bázisba) belépő változó*, x_4 *(a bázisból) kilépő változó*. Felírható egy új szótár.
- Az új szótár az előzőből könnyen kiszámolható x_4 ki volt fejezve K elemeiből. Ezt átírhatjuk x_1 kifejezésére $K \setminus \{x_1\} \cup \{x_4\}$ változóiból.

$$x_4 = 3 - x_1 \qquad \vdash \qquad x_1 = 3 - x_4$$

- A többi bázisváltozó egyenletéből kiejthető x_1 (ha eredetileg nem is szerepelt, akkor szerencsések vagyunk, nincs szükség változtatásra).

Példa (folytatás)

- Ennek ára, hogy a bal oldalon megjelenik x_4, ami átvihető a jobb oldalra:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = x_3 \\ -x_1 \qquad\quad + 3 = x_4 \end{cases} \quad \vdash \quad 4 - x_2 = x_3 + x_4 \quad \vdash \quad 4 - x_4 - x_2 = x_3$$

- Hasonlóan kezelhető a célfüggvény is:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad = c(x) \\ -x_1 \qquad\quad + 3 = x_4 \end{cases} \quad \vdash \quad 3 + x_2 = c(x) + x_4 \quad \vdash \quad 3 - x_4 + x_2 = c(x).$$

- Az új szótár

$$\left[\begin{array}{rrrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_2 \\ x_3 & 4 & -1 & -1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ x_5 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 3 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Új példa

Példa

Maximalizáljuk	x_1-t
Feltéve, hogy	$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$
	$x_1, x_2 \geq 0,$

- Azaz szótáralakban

$$\left[\begin{array}{cccc} \text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 & -1 & 1 \\ x_4 & 2 & 1 & -1 \\ \hline c(x) & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

- x_1 változó együtthatója a célfüggvényben (zöld), x_1 változó együtthatója x_3.ban (piros) x_1 belépő és x_3 kilépő változó (kék).

Új példa (folytatás)

- Az új szótár

$$\left[\begin{array}{lrrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_3 & x_2 \\ x_1 & 1 & -1 & 1 \\ x_4 & 3 & -1 & \\ \hline c(x) & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

- Egy korábbi példa alapján a szótár által leírt probléma nem korlátos.

Még újabb példa

Példa

$$\left[\begin{array}{crrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & \boxed{x_2} \\ x_3 & 4 & -1 & -1 \\ x_1 & 3 & -1 & \\ \boxed{x_5} & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 3 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

A célfüggvény pozitív együtthatóit zölddel jelölöm (P). A kiválasztott elem felett pirossal kiemelve a „veszélyes” negatív együtthatók (Q jelölés). Sötétebbek azok az együtthatók, amelyek a szűk-keresztmetszetet adják (Q_0 jelölés, lásd alább). Kékkel emeltem ki a belépő és kilépő változókat (az első oszlopban vannak a bázisváltozók, ezek közül a kék a kilépő változó; a felső sorban vannak a külső válozók, ezek között a kék a belépő változó).

- Ez lesz a pivotunk szokásos színjelölése.

Még újabb példa (folytatás)

- Az új szótár

$$\left[\begin{array}{lrrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_5 \\ \quad x_3 & 2 & -1 & 1 \\ \quad x_1 & 3 & -1 & \\ \quad x_2 & 2 & & -1 \\ \hline c(x) & 5 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

- Egy korábbi példa alapján az aktuális bázismegoldás optimális, a maximális célfüggvényérték 5.

Általános jelölések egy szótárra

Definíció

$$P = \{x_i \in K : x_i \text{ együtthatója a célfüggvényben pozitív}\}.$$

Definíció

Legyen $x_i \in P$. Ekkor

$$Q(x_i) = \{x_j \in B : x_j \text{ felírásában } x_i \text{ együtthatója negatív}\}.$$

Definíció

Legyen $x_i \in P$, $x_j \in Q(x_i)$. Ekkor $\tau_j = -\frac{b_j}{a_{j,i}}$, ahol $a_{j,i}$ a szótáralakban az x_j kifejezésében x_i együtthatója, b_i pedig a konstans (feltevésünk szerint $a_{j,i} < 0, b_j \geq 0$, azaz τ egy nemnegatív szám).

Általános jelölések egy szótárra (folytatás)

Definíció

Vegyünk egy tetszőleges $x_i \in P$ változót, amelyre $Q(x_i)$ nem-üres. Legyen

$$t(x_i) = \min_j \tau_j,$$

ahol a j az összes olyan indexen fut, amelyre $x_j \in Q(x_i)$. Nyilván t is nemnegatív.

Definíció

Legyen $x_i \in P$. Ekkor

$$Q_0(x_i) = \{x_j \in Q(x_i) : \tau_j = t(x_i)\}.$$

A pivot

- Tegyük fel, hogy adott egy szótár, amelyre sem az I., sem a II. Észrevétel nem alkalmazható. // Ha nem így lenne, akkor LP feladatunkat le tudjuk zárni.
- Ekkor $P \neq \emptyset$, tetszőleges $x_i \in P$ esetén $Q(x_i) \neq \emptyset$. Így $Q_0(x_i)$ jól definiált.
- Ekkor az x_i/x_j pivot esetén az eredeti B és K változóhalmazokból új bázis lesz: $B \setminus \{x_j\} \cup \{x_i\}$. Ennek megfelelően a bázison kívüli elemek új halmaza $K \setminus \{x_i\} \cup \{x_j\}$ lesz.
- Ennek megfelelően lesz egy új bázismegoldás (a fenti definíciók lényege pontosan az volt, hogy az új értékek kiszámolásánál ne kaphassunk negatív értéket). Az új szótár is kiszámolható.
- Ezek után azt mondjuk, hogy egy pivot-ot hajtottunk végre.

Fontos, eddig elsikkadó részlet: Példa

Példa

A második poliedrikus formában

$$\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & x_2\text{-t} \\ \text{Feltéve, hogy} & \begin{cases} x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 \qquad\;\; \le 2 \end{cases} \\ & x_1, x_2 \ge 0, \end{array}$$

azaz szótáralakban

$$\left[\begin{array}{cccc} \text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_2 \\ x_3 & 0 & 1 & -1 \\ x_4 & 2 & -1 & \\ \hline c(x) & 0 & & 1 \end{array}\right]$$

Példa: folytatás

- Csak x_2 növelésével próbálkozhatunk.
- Ekkor viszont x_3 miatt az $[0, 0] = \{0\}$ lehetőséghalmazt kapjuk. Azaz a növelés nem növelés.
- De a bázisba beléptethetjük x_2-t és kiléptethetjük x_3-at.
- A bázisban volt olyan változó, amely értéke 0 volt (kívül 0-nak kellett lenni az értékeknek, belül csak nemnegativitás volt a feltétel).
- Az előzőleg bevezetett $t(x_3)$ értéke 0. Egy külső változó lépett be és értéke is maradt 0.
- A bázismegoldás nem változott. A geometriai szemléletben ugyanabban a csúcsban maradtunk.

Példa: folytatás

- DE A BÁZIS (vele együtt K is) MEGVÁLTOZOTT.
- Érdekes módon ez egy hasznos pivot. Számoljuk ki az új szótárt:

$$\left[\begin{array}{crrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_3 \\ x_2 & 0 & 1 & -1 \\ x_4 & 2 & -1 & \\ \hline c(x) & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

- Az új szótárból látszik, hogy x_1 növelhető és a kezdeti kilátástalanság megszünt. Az x_1/x_4 pivot elvégezhető, az új szótár:

$$\left[\begin{array}{crrr} \text{bázis} & \text{konstans} & x_4 & x_3 \\ x_2 & 2 & -1 & -1 \\ x_1 & 2 & -1 & \\ \hline c(x) & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

A célfüggvény nőtt, sőt a korábbiak alapján láthatjuk, hogy bázismegoldásunk optimális.

Észrevétel

Definíció

Tegyük fel, hogy pivotunk belépő változója x_i, kilépő változója x_j. Ezt a pivotot *degenerált pivotnak* nevezzük, ha a kilépő változó értéke 0.

Észrevétel

Ha a pivot nem degenerált (a kilépő változó értéke nem 0), akkor a belépő változó értéke szükségszerűen nő, a célfüggvény nő.

Lemma

A következő lemma egyszerű.

Lemma

(i) π *degenerált (a kilépő változó értéke* 0*),*

(ii) a bázismegoldás nem változik,

(iii) geometriailag ugyanabban a csúcsban maradunk,

(iv) a célfüggvény értéke marad.

Nem degenerált pivot geometriai tartalma

Pivotszabályok

Általában P nem egyelemű. Egy pivothoz ki kell választanunk egy $x_i \in P$ változót. Ha ezt a döntést meghoztuk, akkor is elképzelhető, hogy $Q_0(x_i)$ is több elemű. Egy második döntés is szükséges, hogy egy konkrét pivotunk legyen.

Ha determinisztikus algoritmust szeretnénk, akkor pontosan le kell írnunk, hogy a két döntést hogyan hozzuk. Ennek rögzítését *pivot szabálynak* nevezzük.

A szabályt értelmezhetjük úgy is, hogy egy döntetlen feloldási módszer P elemei, majd $Q(x_i)$ elemei közt. Gyakran a szabály csak egy irányelv. Alkalmazása kizárhatja néhány elemét P-nek, de vezethet egy „redukált döntetlenhez”. Ott már a szabály nem törődik azzal, melyik maradék P-beli elemet választjuk.

Egy fogalmat példákon keresztül érdemes megérteni.

Pivotszabályok

Bland-szabály

P-ből a legkisebb indexű x_i-t vesszük ki. $Q_0(x_i)$-ből a legkisebb indexű x_j-t válasszuk ki.

Dantzig-szabály

P-ből azt az x_i-t választjuk, amelyhez a legnagyobb abszolútértékű célfüggvény együttható tartozik.

Véletlen szabály

P elemei közül egy véletlen elemet vegyünk ki (uniform eloszlással), majd a $Q(x_i)$ elemei közül is véletlenül válasszunk.

Pivotszabályok

Mohó szabály

Az összes x_i/x_j lehetséges pivotra számoljuk ki a célfüggvény növekményét. Azt a pivotot válasszuk, amely a legnagyobb növekményt adja.

Legmeredekebb él szabály

Az összes x_i/x_j lehetséges pivotra számoljuk ki a célfüggvény növekményét: Δ és az $x \mapsto x_{\text{updated}}$ lépés hosszát: s. Azt válasszuk ahol $\frac{\Delta}{s}$ a legnagyobb.

Egyszerűsített szimplex algoritmus

Egyszerűsített szimplex algoritmus: Adott egy szótáralakban lévő LP feladat, egy kiinduló bázismegoldás, egy pivot szabály.

(Init): Legyen x_{akt} a kiinduló bázismegoldás. $\mathcal{S}_{\text{akt}}$ a kiinduló szótár. // x_{akt} jelöli az aktuális bázismegoldást, $\mathcal{S}_{\text{akt}}$ az aktuális szótár.

(P): Meghatározzuk a P halmazt. Ha $P = \emptyset$, akkor leállunk; x_{akt} egy optimális megoldás. Ha $P \neq \emptyset$, akkor a pivot szabály alapján meghatározunk egy $x_i \in P$ változót.

(Q): Meghatározzuk a $Q_0(x_i)$ halmazt. Ha $Q_0(x_i) = \emptyset$, akkor leállunk; LP feladatunk nem korlátos. Ha $Q_0(x_i) \neq \emptyset$, akkor a pivot szabály alapján meghatározunk egy $x_j \in Q_0(x_i)$ változót.

(Pivot): Elvégezzük az x_i/x_j pivot-ot, kiszámoljuk az $\mathcal{S}_{\text{új}}$ új szótárt és az ehhez tartozó $x_{\text{új}}$ új bázismegoldást. $\mathcal{S}_{\text{akt}} \leftarrow \mathcal{S}_{\text{új}}$, $x_{\text{akt}} \leftarrow x_{\text{új}}$. Visszalépünk (P)-hez.

Kérdések

- Lehet-e végtelen ciklus?

Tétel

Van olyan pivot szabály és kiinduló szótár, ami ciklizálásba vezet.

- Van-e olyan pivot szabály, ami kizárja a ciklizálást?

Tétel

A Bland-szabály kizárja a ciklizálást.

- Hogyan lehet lehetséges bázismegoldást találni? A következő alkalommal látjuk, nem is olyan nehéz.

Szünet

Ciklizálás: Példa

Szabály: P azon elemét vesszük, amely együtthatója a legnagyobb. Ha több ilyen van akkor ezek közül a legkisebb indexűt vesszük, legyen ez x_i. $Q_0(x_i)$-ből vegyük ki a legkisebb indexűt. A fenti szabály alig különbözik a Bland szabálytól.

Kiinduló szótárunk legyen

$$
\left[\begin{array}{rrrrrr}
\text{bázis} & \text{konstans} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
x_5 & 0 & -0.5 & 5.5 & 2.5 & -9 \\
x_6 & 0 & -0.5 & 1.5 & 0.5 & -1 \\
x_7 & 1 & -1 & & & \\
\hline
c(x) & 0 & 10 & -57 & -9 & -24
\end{array}\right]
$$

Azaz a kiinduló bázis megoldásunk
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, $x_7 = 1$.

Ciklizálás: Példa (folytatás)

Kiemeltem a zöld együttható feletti negatív együtthatókat. Kettő degenrált pivotba kényszerít. Ezek sötétebbek:

bázis	konstans	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	0	-0.5	5.5	2.5	-9
x_6	0	-0.5	1.5	0.5	-1
x_7	1	-1			
$c(x)$	0	10	-57	-9	-24

Az új szótár némi számolás után:

bázis	konstans	x_5	x_2	x_3	x_4
x_1	0	-2	11	5	-18
x_6	0	1	-4	-2	8
x_7	1	2	-11	-5	18
$c(x)$	0	-20	53	41	-204

Ciklizálás: Példa (folytatás)

$$\begin{bmatrix} \text{bázis} & \text{konstans} & x_5 & \boxed{x_2} & x_3 & x_4 \\ x_1 & 0 & -2 & 11 & 5 & -18 \\ \boxed{x_6} & 0 & 1 & \boxed{-4} & -2 & 8 \\ x_7 & 1 & 2 & \boxed{-11} & -5 & 18 \\ \hline c(x) & 0 & -20 & \boxed{53} & \boxed{41} & -204 \end{bmatrix}$$

Az új szótár némi számolás után:

$$\begin{bmatrix} \text{bázis} & \text{konstans} & x_5 & x_6 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 0 & 0.75 & -2.75 & -0.5 & 4 \\ x_2 & 0 & 0.25 & -0.25 & -0.5 & 2 \\ x_7 & 1 & -0.75 & 2.75 & 0.5 & -4 \\ \hline c(x) & 0 & -6.75 & -13.25 & 14.5 & -98 \end{bmatrix}$$

Ciklizálás: Példa (folytatás)

bázis	konstans	x_5	x_6	x_3	x_4
x_1	0	0.75	-2.75	-0.5	4
x_2	0	0.25	-0.25	-0.5	2
x_7	1	-0.75	2.75	0.5	-4
$c(x)$	0	-6.75	-13.25	14.5	-98

Az új szótár kiszámolva a pivot után:

bázis	konstans	x_5	x_6	x_1	x_4
x_3	0	1.5	-5.5	-2	8
x_2	0	-0.5	2.5	1	-2
x_7	1			-1	
$c(x)$	0	15	-93	-29	18

Ciklizálás: Példa (folytatás)

bázis	konstans	x_5	x_6	x_1	x_4
x_3	0	1.5	-5.5	-2	8
x_2	0	-0.5	2.5	1	-2
x_7	1			-1	
$c(x)$	0	15	-93	-29	18

Az új szótár kiszámolva a pivot után:

bázis	konstans	x_5	x_6	x_1	x_2
x_3	0	-0.5	4.5	2	-4
x_4	0	-0.25	1.25	0.5	-0.5
x_7	1			-1	
$c(x)$	0	10.5	-70.5	-20	-9

Ciklizálás: Példa (folytatás)

$$\begin{bmatrix} \text{bázis} & \text{konstans} & \boxed{x_5} & x_6 & x_1 & x_2 \\ \boxed{x_3} & 0 & -0.5 & 4.5 & 2 & -4 \\ x_4 & 0 & -0.25 & 1.25 & 0.5 & -0.5 \\ x_7 & 1 & & & -1 & \\ \hline c(x) & 0 & 10.5 & -70.5 & -20 & -9 \end{bmatrix}$$

Az új szótár kiszámolva a pivot után:

$$\begin{bmatrix} \text{bázis} & \text{konstans} & x_3 & x_6 & x_1 & x_2 \\ x_5 & 0 & -2 & 9 & 4 & -8 \\ x_4 & 0 & 0.5 & -1 & -0.5 & 1.5 \\ x_7 & 1 & & & -1 & \\ \hline c(x) & 0 & -21 & 24 & 22 & -93 \end{bmatrix}$$

Ciklizálás: Példa (folytatás)

bázis	konstans	x_3	x_6	x_1	x_2
x_5	0	-2	9	4	-8
x_4	0	0.5	-1	-0.5	1.5
x_7	1			-1	
$c(x)$	0	-21	24	22	-93

Visszatért az első bázis. A szótárnak is imétlődnie kell. Azért számoljuk ki. Az új szótár kiszámolva a pivot után:

bázis	konstans	x_3	x_4	x_1	x_2
x_5	0	2.5	-9	-0.5	5.5
x_6	0	0.5	-1	-0.5	1.5
x_7	1			-1	
$c(x)$	0	-9	-24	10	-57

A szótár tartalmaz sorrend változást, de matematikai tartalma ugyanaz mint a kiindulóé.

Ciklizálás: Példa (folytatás)

- Azt tapasztaljuk, hogy folyamatosan degenerált pivotokat ad a szabály és végül visszaérünk a kiinduló szótárhoz (a változók sorrendje nem számít).
- Minden előrehaladás nélkül egy végtelen ciklusba kerültünk.
- Történt ez úgy, hogy a kiinduló szótárban $x_1 = x_3 = 1, x_2 = x_4 = 0$ értékadással egy jobb megoldáshoz jutunk.
- Algoritmusunk ciklizálhat egy nem optimális bázismegoldással.
- Fontos milyen szabállyal dolgozunk.

Szünet

Tétel

Tétel

A Bland-szabályt alkalmazó szimplex módszer nem ciklizál.

Bizonyítás: Indirekt feltevés

- A természetes kezdés: Indirekt bizonyítás.
- Tegyük fel, hogy a futás során a bázisok változása

$$B_0 \to B_1 \to B_2 \to \ldots \to B_{\ell-1} \to B_\ell = B_0 \to B_1 \to B_2 \to \ldots$$

ciklikus.

- Minden $B_i \to B_{i+1}$ pivotnál két változó kategóriája változik. Egy bázisbeliből külső változóvá válik, egy pedig külső változóból bázisbelivé változik.

Bizonyítás: Jelölések

Definíció

Legyen $\mathcal{M}$ azon változók halmaza, amely a ciklus során valamelyik pivotnál változtatják kategóriájukat. Az $\mathcal{M}$-beli változókat „mozgó” változóknak nevezzük.

Jelölés

Legyen $x_M \in \mathcal{M}$ a legnagyobb indexű mozgó változó.

Bizonyítás: Jelölések (folytatás)

- A ciklus jellege garantálja, hogy lesz a ciklusban olyan bázis, amelyben x_M bázisbeli és a következő pivotnál kikerül.

Jelölés

Legyen B^{ki} egy ilyen bázis. Legyen x_μ az a változó, amely a $B^{\text{ki}} \to B'$ pivotnál „helyet cserél” x_M-mel.

$$x_\mu \in \mathcal{M}, \qquad \mu < M.$$

- Ugyancsak a ciklus jellege garantálja, hogy lesz a ciklusban olyan bázis, amelyben x_M külső és a következő pivotnál bekerül.

Jelölés

Legyen B^{be} egy ilyen bázis.

Bizonyítás: Két szótár

- A B^{ki} bázishoz tartozik egy szótár$^{\text{ki}}$:

$$\begin{aligned} x_i =& b_i^{\text{ki}} + \sum_{x_j \in K^{\text{ki}}} a_{ij}^{\text{ki}} x_j, \qquad \text{minden } x_i \in B^{\text{ki}} \text{ esetén},\\ c(x) =& c^{\text{ki}} + \sum_{x_j \in K^{\text{ki}}} c_j^{\text{ki}} x_j = c^{\text{ki}} + \sum_{x_j} c_j^{\text{ki}} x_j. \end{aligned}$$

- A B^{be} bázishoz hasonlóan tartozik egy szótár$^{\text{be}}$:

$$\begin{aligned} x_i =& b_i^{\text{be}} + \sum_{x_j \in K^{\text{be}}} a_{ij}^{\text{be}} x_j, \qquad \text{minden } x_i \in B^{\text{be}} \text{ esetén},\\ c(x) =& c^{\text{be}} + \sum_{x_j \in K^{\text{be}}} c_j^{\text{be}} x_j = c^{\text{be}} + \sum_{x_j} c_j^{\text{be}} x_j. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Észrevételek

Észrevétel

A ciklus csak degenerált pivotokból állhat. Így a célfüggvény értéke a cikluson belül nem változik.

$$c^{\mathrm{ki}} = c^{\mathrm{be}} (= c).$$

Észrevétel

A két szótár lineáris egyenletei egymásból ekvivalens átalakításokkal kaphatók.

Speciálisan, ha veszünk egy megoldást az egyik alapján az a másiknak is megoldása.

Speciálisan, ha veszünk egy megoldást akkor a két szótár egy-egy célfüggvénye egyenlősége levezethető a szótárból.

Bizonyítás: A központi összefüggés

Jelölés: $\widetilde{x}$

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_\nu =& 0, \text{ ha } x_\nu \in K^{\text{ki}} - \{x_\mu\}\\ \widetilde{x}_\mu =& t,\\ \widetilde{x}_\beta =& b_\beta + a^{\text{ki}}_{\beta\mu} t, \text{ ha } x_\beta \in B^{\text{ki}}.\end{aligned}$$

Speciálisan

$$c + c^{\text{ki}}_\mu t = c + c^{\text{be}}_\mu t + \sum_{x_\beta \in B^{\text{ki}}} c^{\text{be}}_\beta (b_\beta + a^{\text{ki}}_{\beta\mu} t).$$

Speciálisan

$$c^{\text{ki}}_\mu = c^{\text{be}}_\mu + \sum_{x_\beta \in B^{\text{ki}}} c^{\text{be}}_\beta a^{\text{ki}}_{\beta\mu}.$$

Bizonyítás: További észrevételek

Észrevétel

$$c_\mu^{\mathrm{ki}} > 0.$$

Észrevétel

$$c_\mu^{\mathrm{be}} \leq 0.$$

Következmény

Alkalmas $x_m \in B^{\mathrm{ki}}$ esetén

$$c_m^{\mathrm{be}} a_{m\mu}^{\mathrm{ki}} > 0.$$

Bizonyítás: További észrevételek (folytatás)

Észrevétel

$c_m^{\text{be}} \neq 0$, azaz $x_m \in K^{\text{be}}$.

$$x_m \in \mathcal{M}, \qquad m \leq M.$$

Észrevétel

$$c_M^{\text{be}} > 0, \qquad a_{M\mu}^{\text{ki}} < 0.$$

Tehát $M \neq m$, azaz $m < M$.

Bizonyítás: Az ellentmondás

- Tudjuk, hogy

$$c_m^{\text{be}} a_{m\mu}^{\text{ki}} > 0,$$

c_m^{be} és $a_{m\mu}^{\text{ki}}$ előjele azonos.

- c_m^{be} előjele nem lehet pozitív, mert akkor az x_m változó B^{be} pivotjánál egy szóbajövő belépő elem lenne. Bland-szabály nem x_M-et mozgatná be.

- Tehát c_m^{be} és $a_{m\mu}^{\text{ki}}$ is negatív. $a_{m\mu}^{\text{ki}}$ negativitása miatt az x_m változó B^{ki} pivotjánál egy szóbajövő kilépő elem lenne. Bland-szabály nem mozgathatja az x_M változót ki.

Szünet

Emlékeztető

Az LP feladat szimplex alakja

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax = b$
	$x \succeq 0$,

ahol $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és A rangja k, sőt tartalmaz egy $k \times k$ egységmátrixot részmátrixként.

Az A-ra vonatkozó feltételek (független sorok, egységmátrix részmátrixként) nem igazán korlátozóak. Azt garantálta, hogy számolás nélkül felírhattuk a szótár alakot.

Egy sokkal korlátozóbb feltételünk is volt: $b \succeq 0$.

Ez garantálta, hogy a kezdő szótár alapján bázismegoldásunk volt.

Most azt nézzük meg mit tehetünk, ha ez nem teljesül.

A megoldás: Két fázis

Az első fázis

Egy bázismegoldás keresése.

Az első fázis kétféleképpen érhet véget:

(I1) feltételrendszerünk ellentmondásos, $\mathcal{L} = \emptyset$,

(I2) kapunk egy bázismegoldást.

A második fázis

Az első fázis bázis megoldásával kezdve a korábban megismert szimplex módszert alkalmazzuk.

Ha a ciklizálást kiküszöböljük, akkor a leállásra két lehetőségünk van:

(II1) azt kapjuk a célfüggvény nem felülről korlátos,

(II2) eljutunk egy bázismegoldáshoz, ami optimális.

Az első fázis

- Egy kis szikra kell: A könnyú elindulásos alakra visszavezetjük a kiinduló bázosmegoldás keresését.
- Vegyük az LP feladat $Ax = b$ egyenletrendszerét.
- Ebben könnyű elérni $b \succeq 0$-t: A negatív konstansú egyenleteket -1-gyel megszorozzuk. (Sajnos az egységmátrix eltünt.)
- Emlékezzünk: Az előjeles poliedrikus formából indulva az egységmátrix a slack-változókkal automatikusan megjelent. Alkalmazzunk hasonló trükköt.
- Minden egyenlethez vezessünk be egy új változót, ami a baloldalon 1 együtthatóval plusz tagként szerepel az ő egyenletében.
- Az új változókra is tegyük fel a nemnegatívitást. Ez az az alak amivel eltudjuk indítani az egyszerűsített szimplex módszert.
- Ha mindegyik új változót „lenullázzuk" egy bázismegoldásban. Akkor az új változókat „elfelejthetjük".

Példa

Maximalizáljuk	$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4$-t
Feltéve, hogy	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7$
	$2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -1$
	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$$

A jobb oldali konstansok nemnegtívvá tétele:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

- Az új változók bevezetése:

$$\begin{cases} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 + y_1 \qquad = 7 \\ -2x_1 + \ \ x_2 + x_3 + 3x_4 \qquad + y_2 = 1 \end{cases}$$

- Szótáralak

$$\left[\begin{array}{rrrrrr} & \text{konstans} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & 7 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ y_2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ \hline c(x) & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Jó-jó, de a kiinduló bázismegoldásban $y_1 = 7$, $y_2 = 1$. Mi $y_1 = y_2 = 0$-t szeretnénk.

A trükk

Az új célfüggvény: minimalizáljuk $y_1 + y_2$-t.

A Főtétel

Tétel

Vegyük a szimplexalakot és érjük el, hogy az egyenlőség feltételek jobb oldalán nem-negatív számok szerepeljenek.

Az i-edik egyenlethez rendeljünk egy y_i új nemnegatív változót.

Az i-edik egyenlet bal oldalába írjunk be egy $+y_i$ tagot.

Minimalizáljuk az $c_I = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ kifejezést.

(i) Ha a c_I értéket 0-vá tudjuk tenni, akkor az x_i komponensek adnak egy bázismegoldást (ezt kerestük).

(ii) Ha a minimumérték pozitív lesz, akkor nincs lehetséges megoldása a feltételrendszerünknek.

Persze maximalizálási feladatokra írtuk le a szimplex módszert. Így valójában $-y_1 - y_2 - \ldots$-t fogjuk maximálizálni.

Példa (folytatás)

Az új szótár a régi és az új célfüggvénnyel

$$
\left[
\begin{array}{r|rrrrr}
 & \text{konstans} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
y_1 & 7 & -1 & -2 & -1 & -1 \\
y_2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\
\hline
c(x) & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
c_I(x) & -8 & -1 & 3 & 2 & 4
\end{array}
\right]
$$

Elkezdhetünk dolgozni, egyelőre az új célfüggvényt figyelembe véve.

Példa (folytatás)

$$
\begin{array}{c|rrrrr}
 & \text{konstans} & x_1 & \boxed{x_2} & x_3 & x_4 \\
\hline
y_1 & 7 & -1 & -2 & -1 & -1 \\
\boxed{y_2} & 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\
\hline
c(x) & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
c_I(x) & -8 & -1 & 3 & 2 & 4
\end{array}
$$

Pivot$\rightarrow$

$$
\begin{array}{c|rrrrr}
 & \text{konstans} & x_1 & y_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
y_1 & 5 & -5 & 2 & 1 & 5 \\
x_2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\
\hline
c(x) & -1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\
\hline
c_I(x) & -5 & 5 & -3 & -1 & -5
\end{array}
$$

Példa (folytatás)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & \text{konstans} & \boxed{x_1} & y_2 & x_3 & x_4 \\
\boxed{y_1} & 5 & \boxed{-5} & 2 & 1 & 5 \\
x_2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\
\hline
c(x) & -1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\
\hline
c_I(x) & -5 & \boxed{5} & -3 & -1 & -5
\end{array}$$

Pivot$\rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & \text{konstans} & y_1 & y_2 & x_3 & x_4 \\
x_1 & 1 & -1/5 & 2/5 & 1/5 & 1 \\
x_2 & 3 & -2/5 & -1/5 & -3/5 & -1 \\
\hline
c(x) & -4 & 3/5 & -1/5 & 7/5 & 1 \\
\hline
c_I(x) & 0 & -1 & -1 & 0 & 0
\end{array}$$

Példa (folytatás)

$$\left[\begin{array}{r|rrrrr} & \text{konstans} & y_1 & y_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & -1/5 & 2/5 & 1/5 & 1 \\ x_2 & 3 & -2/5 & -1/5 & -3/5 & -1 \\ \hline c(x) & -4 & 3/5 & -1/5 & 7/5 & 1 \\ \hline c_I(x) & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az új változók „elfelejtése", az új célfüggvény elhagyása

$$\left[\begin{array}{r|rrr} & \text{konstans} & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1/5 & 1 \\ x_2 & 3 & -3/5 & -1 \\ \hline c(x) & -4 & 7/5 & 1 \end{array}\right]$$

Bázis: $B = \{x_1, x_2\}$, bázismegoldás $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 3, 0, 0)$.
Elindulhat a valódi keresés az optimális bázismegoldás után.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!