Egyenlőtlenségrendszerek megoldáshalmaza

Hajnal Péter

2021. tavasz

Poliéderek

Definíció

Az

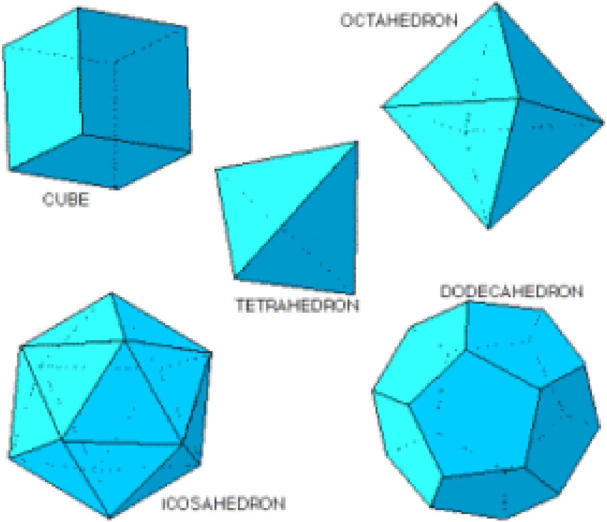
$$Ax \preceq b$$

egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát (zárt, konvex) poliédernek nevezzük.

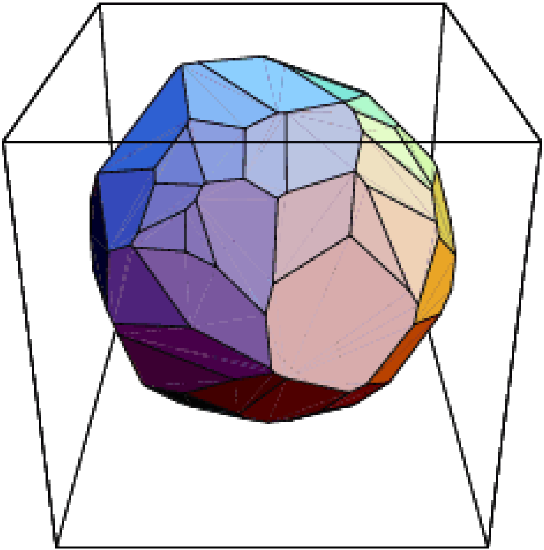
• Egy „veszélyes" definíció. Nagyon egyszerűnek tűnik, de nem az. Mind a mai napig fontos matematikai kutatások középpontjában áll.

• Néhány kép, a konvexitás tárgyalása és egy fontos megjegyzés után óvatosabban közelítjük meg és próbáljuk megérteni ezt a fogalmat.

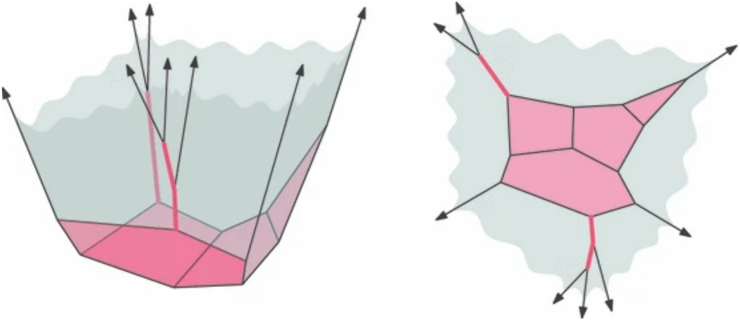
Példák



Példák



Példák



Példa: Kocka

$$\begin{cases} x & \leq 1 \\ y & \leq 1 \\ z & \leq 1 \\ -x & \leq 1 \\ -y & \leq 1 \\ -z & \leq 1 \end{cases}$$

Példa: Oktaéder

$$\begin{cases} x+y+z & \leq 1 \\ x+y-z & \leq 1 \\ x-y+z & \leq 1 \\ x-y-z & \leq 1 \\ -x+y+z & \leq 1 \\ -x+y-z & \leq 1 \\ -x-y+z & \leq 1 \\ -x-y-z & \leq 1 \end{cases}$$

Konvexitás

Definíció

Egy $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ ponthalmaz konvex, ha $A, B \in \mathcal{K}$ esetén

$$[AB] \subset \mathcal{K}.$$

$[AB]$ az A és B pontokat összekötő szakasz. Pontosabban

$$\begin{aligned} [AB] &= \{\lambda A + (1-\lambda)B : 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ &= \{\lambda A + \mu B : \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}. \end{aligned}$$

Vektorok konvex kombinációja

Definíció

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}_+$ nemnegatív számok egy rendszere, amelyre $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N = 1$. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok konvex kombinációja.

Lemma

Legyen $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ egy ponthalmaz. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{K}$ konvex, azaz $\mathcal{C}$ zárt a összekötő szakasz képzésre,

(ii) $\mathcal{K}$ zárt a konvex kombináció képzésre.

Végesen generált konvex halmazok

• $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett konvex kombinációk konvex kombinációja is a $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett konvex kombináció. Ezen egyszerű észrevétel alapján újabb példát adhatunk konvex halmazra.

Példa

$$\langle v_1, v_2, \ldots v_N\rangle_{\text{konvex}} = \left\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}^n_+, \sum_i \lambda_i = 1\right\}.$$

• Könnyű látni, hogy $\langle v_1, v_2, \ldots v_N\rangle_{\text{kúp}}$ a legszűkebb konvex halmaz, amely tartalmazza a $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszert.

Definíció

$\mathcal{K}$ egy végesen generált konvex halmaz, ha elő áll mint $\langle v_1, v_2, \ldots v_N\rangle_{\text{konvex}}$ alakban valamely $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszerre.

• Ez vajon példa-e a konvex poliéderre?

Fourier—Motzkin-elimináció geometriailag

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$. Ekkor $\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\} \subset \mathbb{R}^n$ egy polidéder. Legyen $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ egy projekció.

Ekkor

$$\pi(\mathcal{P})$$

is poliéder.

Bizonyítás

Kezdjük el az $Ax \preceq b$ egyenlőtlenségrenszer megoldhatóságának tesztelését Fourier—Motzkin-eliminációval.

x_1 eliminálásával kezdjük, amely kiküszöbölési lépés után kapott egyenlőtlenségrendszer legyen

$$\widetilde{A}\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \preceq \widetilde{b}.$$

Ez éppen $\pi(\mathcal{P})$ leírása, ahogy ezt láttuk korábban.

Szünet

Lineáris egyenlet

- Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és b adott valós számok. Vizsgáljuk az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

egyenlet megoldáshalmazát.

- Vektor/mátrix írásmódban egyenletünk: legyen adott $a \in \mathbb{R}^n$ n-dimenziós vektor, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ és $b \in \mathbb{R}$ szám

$$a^\mathsf{T}x = b.$$

- Ha mindegyik a_i értéke $0/a = 0 \in \mathbb{R}^n$, akkor egyszerű dolgunk van. $b = 0$ esetén egyenlőségünk szükségszerűen teljesül, azaz mint feltétel semmitmondó, azaz megoldáshalmaza $\mathbb{R}^n$. $b \neq 0$ esetén egyenlőségünk szükségszerűen nem teljesül, azaz mint feltétel kielégíthetetlen, azaz megoldáshalmaza $\emptyset$.
- A továbbiakban feltesszük, hogy $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Példa

Példa

$2x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 3$. Vagy vektor/mátrix jelöléssel $a^T x = b$, ahol

$$n = 4,\ a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ b = 3$$

- Az egyenlet megoldása egyszerű. Az első három változónak tetszőleges értéket adhatunk. x_4, az utolsó változó együtthatója nemnulla, így a megoldás első három komponenséből egyértelműen kifejezhető x_4.

Példa (folytatás)

- Azaz

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma, \quad x_4 = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\alpha + \frac{2}{5}\gamma.$$

Ha α, β, γ végigfut az összes lehetséges értéken, akkor a fent képlet leírja az üsszes megoldást.

- Vektor írásmóddal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

A megoldáshalmaz $n = 2$ esetben

- $n = 2$ esetén
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
által leírt megoldáshalmaz egy egyenes a koordinátasíkon.
- $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges megoldás/pont a megoldáshalmazból.
- $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ egy nemnulla irányvektor.

A megoldáshalmaz $n = 3$ esetben

- $n = 3$ esetén

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

írja le a megoldáshalmazt.

- $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ egy tetszőleges megoldás. $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ két lineárisan független megoldása a homogén egyenletnek (a jobb oldali b helyett 0-t írunk).

- Tehát a megoldáshalmaz elemeihez úgy jutunk, hogy egy tetszőleges pontból kiindulva két független irányba lépkedünk. Geometriailag egy sík pontjait írtuk le.

A megoldáshalmaz az általános esetben

- Az n dimenziós esetben (feltehetjük/feltesszük, hogy $a_n \neq 0$) az általános megoldás

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b}{a_n} \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_1}{a_n} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_2}{a_n} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}.$$

- A formula első vektora egy tetszőleges megoldás. Az α-k után álló vektorok $n-1$ lineárisan független vektor. A továbbiakban ezekre a v_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ jelölést használjuk.

- Vegyük észre hogy, ezen $n-1$ kektor mindegyike merőleges a (nemnulla) $a \in \mathbb{R}^n$ vektorra. Speciálisan $a, v_1, \ldots, v_{n-1}$ $\mathbb{R}^n$ egy bázisa.

Egy tétel és egy definíció

Tétel

Legyen $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{H}$ az $a^\mathsf{T} x = b$ megoldáshalmaza alkalmas $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektorra,

(ii) pontosan $\mathcal{H}$ elemei állnak elő $u + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$ alakban, ahol $u \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$, a v_i-k alkalmas $a \in \mathbb{R}^n$ vektorra merőleges, lineárisan független vektorok és az α_i-k tetszőleges valós számok.

Definíció

$\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ egy hipersík, ha kielégíti a fenti lemma bármelyik/mindkettő feltételét. A lemmában szereplő a vektor a $\mathcal{H}$ hipersík nomálvektora.

Megjegyzések

- Megjegyezzük, hogy egy $\mathcal{H}$ hipersík esetén a normálvektor nem egyértelmű. Egy lehetséges $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nemnulla számszorosa is normálvektor és ez az összes lehetőség.
- v_i-k „nagyon" nem egyértelműek. Tetszőleges módon kiegészítve a normálvektort $\mathbb{R}^n$ egy bázisává egy jó v_i rendszert kapunk.
- Az u vektor és v_i-k választása után az együtthatók egyértelműek.

Megjegyzések (folytatás)

Észrevétel

Egy hipersík konvex halmaz. Azaz, ha u, v két megoldása az $a^\mathsf{T}x = b$ egyenletnek, akkor $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda + \mu = 1$ esetén $\lambda u + \mu v$ is megoldás.

Definíció

Legyen A, B két pont $\mathbb{R}^n$-ben. Az A-t és B-t összekötő egyenes

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{\lambda A + (1-\lambda)B : \lambda \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\lambda A + \mu B : \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}.\end{aligned}$$

Észrevétel

Egy hipersík zárt az összekötő egyenes behúzására.

Megjegyzések: Homogén eset

- A homogén ($b = 0$) esetben $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ biztos megoldás.

Észrevétel

$Ax = 0$ megoldáshalmaza egy origón átmenő hipersík.

Észrevétel

$Ax = 0$ megoldáshalmaza egy nemüres halmaz, amely zárt a számmal való szorzásra és összeadásra.

Lineáris egyenlőtlenség

- Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és b adott valós számok. Vizsgáljuk az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n \leq b$$

egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

- Vektor/mátrix írásmódban egyenletünk: legyen adott $a \in \mathbb{R}^n$ n-dimenziós vektor, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ és $b \in \mathbb{R}$ szám

$$a^\mathsf{T} x \leq b.$$

- Ha mindegyik a_i értéke $0/a = 0 \in \mathbb{R}^n$, akkor egyszerű dolgunk van. $b \geq 0$ esetén egyenlőtlenségünk szükségszerűen teljesül, azaz mint feltétel semmitmondó, azaz megoldáshalmaza $\mathbb{R}^n$. $b < 0$ esetén egyenlőtlenségünk szükségszerűen nem teljesül, azaz mint feltétel kielégíthetetlen, azaz megoldáshalmaza $\emptyset$.
- A továbbiakban feltesszük, hogy $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Példa

Példa

$2x_1 - 2x_3 + 5x_4 \leq 3$, vektor/mátrix jelöléssel $a^{\mathsf{T}}x \leq b$, ahol $n = 4$,
$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $b = 3$

- Az egyenlőtlenségrendszer tartalmazza $2x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 3$ megoldáshalmazát, az

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

alakú vektorok halmazát.

Példa (folytatás)

• A kifejezésben szereplő utolsó három vektor lineárisan független, mindegyik merőleges az *a* vektorra. Így a

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\5\end{pmatrix}$$

képlet $\mathbb{R}^4$ egy tetszőleges pontját/vektorát írja le.

• $\delta=0$ esetén $2x_1-2x_3+5x_4=3$ megoldáshalmazának egy elemét, a $2x_1-2x_3+5x_4=3$ egyenlettel leírt hipersík egy pontját kapjuk.

Példa (folytatás)

- $\delta \neq 0$ esetén δ előjelétől függ, hogy a hipersíktól melyik irányba lépünk el.
- Ha $\delta > 0$, akkor az a vektor irányában lépünk el. Ha $\delta < 0$, akkor az a vektorral ellentétes irányában lépünk el.
- $\mathbb{R}^4$ általános elemére mint

$$x_0 + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x_0 + \delta a$$

gondolunk, ahol x_0 az $a^{\mathsf{T}} x = b$ egyenlet egy megoldása.

- Helyettesítsük be $\mathbb{R}^4$ fenti alakban leírt általános elemét az egyenlőtlenségébe:

$$a^{\mathsf{T}}(x_0 + \delta a) \leq b,$$

Példa (folytatás)

- $a^\mathsf{T} x_0 = b$ miatt egyenlőtlenségünk ekvivalens a következővel:

$$\delta a^\mathsf{T} a \leq 0.$$

- Tehát egyenlőtlenségünk megoldáshalmaza

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ahol α, β, γ tetszőleges valós szám, míg δ tetszőleges nempozitív valós szám.

Egy tétel és egy definíció

Tétel

Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek

(i) $\mathcal{F}$ valamely $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ és $b \in \mathbb{R}$ esetén $a^\mathsf{T} x \leq b$ megoldáshalmaza, azaz $\mathcal{F} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x \leq b\right\}$,

(ii) valamely $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektorra és valamely $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-ra merőleges $g_1, \ldots, g_{n-1}$ lineárisan független vektorokra

$$\mathcal{F} = \{x_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_{n-1} g_{n-1} - \lambda a : \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

Definíció

A fenti lemma valamely/bármely tulajdonságával rendelkező $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt (zárt) féltérnek nevezzük.

Szünet

Homogén lineáris egyenletrendszer

$$\mathcal{E} : Ax = 0$$

egyenletrendszer $M(\mathcal{E})$ megoldáshalmazát vizsgáljuk.

Észrevétel

$M(\mathcal{E})$ véges sok origón átmenő hipersík metszete.

Észrevétel

$M(\mathcal{E})$ zárt a számmal való szorzásra és az összegképzésre.

Definíció

$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz egy lineáris altér $\mathbb{R}^n$-ben ha zárt a számmal való szorzásra és összeadásra.

- Tehát egy homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza

Vektorok lineáris kombinációja

Definíció

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}_+$ valós számok egy rendszere. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok lineáris kombinációja.

Lemma

Legyen $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ egy ponthalmaz. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{L}$ lineáris altér,

(ii) $\mathcal{L}$ zárt a lineáris kombináció képzésre.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

- Az $Ax = b$ egyenletrendszert az $(A|b)$ bővített mátrixszal írjuk le.
- Elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert.
- Az elemi sorműveletek:

(1) Egy sor nemnulla számmal történő szorzása.

(2) Egy sor számszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

- A lépcsős alak kialakítása során egyenletrendszerünk ekvivalens az eredetivel.
- A lépcsős alakból kiolvasható az általános megoldás.

Homogén lineáris egyenletrendszer: Példa

Példa

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Megoldás: x_3, x_4 tetszőlegesen megválasztható:

$$x_3 = \alpha,$$
$$x_4 = \beta,$$

x_1, x_2 és x_5 kifejezhető:

$$x_1 = -\alpha - 2\beta,$$
$$x_2 = \alpha - 3\beta,$$
$$x_5 = 0.$$

Homogén lineáris egyenletrendszer: Példa (folytatás)

Példa (folytatás)

A megoldás vektor írásmódban:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Végesen generált lineáris altér

- $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett lineáris kombinációk lineáris kombinációja is a $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett lineáris kombináció. Ezen egyszerű észrevétel alapján újabb példát adhatunk lineáris altérre.

Példa

$$\langle v_1, v_2, \ldots v_N\rangle_{\text{lineáris}} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}^n\}.$$

- Könnyű látni, hogy $\langle v_1, v_2, \ldots v_N\rangle_{\text{lineáris}}$ a legszűkebb lineáris altér, amely tartalmazza a $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszert.

Egy definíció és egy tétel

Definíció

$\mathcal{L}$ egy végesen generált lineáris altér, ha elő áll mint $\langle v_1, v_2, \ldots v_N\rangle_{\text{lineáris}}$ alakban valamely $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszerre.

Tétel

Legyen $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{L}$ egy $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza,

(ii) $\mathcal{L}$ egy végesen generált lineáris altér.

Formálisan

$$\begin{array}{c}\exists A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k : \mathcal{L} = \{x : Ax = 0\}\\ \Updownarrow \\ \exists G \in \mathbb{R}^{n\times g} : \mathcal{L} = \{G\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^g\}\end{array}.$$

Általános lineáris egyenletrendszer

- Az $\mathcal{E} : Ax = b$ egyenletrendszer $M(\mathcal{E})$ megoldáshalmazát vizsgáljuk.

Észrevétel

$M(\mathcal{E})$ véges sok hipersík metszete.

Emlékeztető

Legyen A, B két pont $\mathbb{R}^n$-ben. Az A-t és B-t összekötő egyenes

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{\lambda A + (1-\lambda)B : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda A + \mu B : \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}.\end{aligned}$$

Definíció

$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ halmaz egy affin altér $\mathbb{R}^n$-ben ha zárt „két pontjának egyenessel való összekötésére” .

- Tehát egy lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza affin altér.

Példa: Lineáris egyenletrendszer:

Példa

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Megoldás: x_3, x_4 tetszőlegesen megválasztható:

$$x_3 = \alpha,$$
$$x_4 = \beta,$$

x_1, x_2 és x_5 kifejezhető:

$$x_1 = -1 - \alpha - 2\beta,$$
$$x_2 = 4 + \alpha - 3\beta,$$
$$x_5 = 2.$$

Lineáris egyenletrendszer: Példa (folytatás)

Példa (folytatás)

A megoldás vektor írásmódban:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorok affin kombinációi

Definíció

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ valós számok egy rendszere, amelyre $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N = 1$. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok affin kombinációja.

Lemma

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ egy ponthalmaz. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{A}$ affin altér, azaz $\mathcal{A}$ zárt a összekötő egyenes képzésre,

(ii) $\mathcal{A}$ zárt az affin kombináció képzésre.

Végesen generált affin altér

• $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett affin kombinációk affin kombinációja is a $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett affin kombináció. Ezen egyszerű észrevétel alapján újabb példát adhatunk affin altérre.

Példa

$$\langle v_1, v_2, \dots v_N\rangle_{\text{affin}} = \left\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}^n, \sum_i \lambda_i = 1\right\}.$$

• Könnyű látni, hogy $\langle v_1, v_2, \dots v_N\rangle_{\text{affin}}$ a legszűkebb affin altér, amely tartalmazza a $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszert.

Egy definíció és egy tétel

Definíció

$\mathcal{A}$ egy végesen generált affin altér, ha elő áll mint $\langle v_1, v_2, \ldots v_N\rangle_{\text{affin}}$ alakban valamely $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszerre.

Tétel

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{A}$ egy $Ax = b$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza,

(ii) $\mathcal{A}$ egy végesen generált affin altér.

Formálisan

$$\exists A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k : \mathcal{A} = \{x : Ax = b\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists G \in \mathbb{R}^{n\times g} : \mathcal{A} = \left\{G\lambda : 1^{\mathsf{T}}\lambda = 1\right\}.$$

Szünet

Poliedrikus kúpok

- Először vizsgáljuk az $Ax \preceq 0$ ($0 \in \mathbb{R}^k$) homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazát. A naív módszer itt is egyszerű. Lássuk a kialakult terminológiát.

Definíció

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy poliedrikus kúp, ha véges sok az origót a határán tartalmazó zárt féltér metszete.

- A fentiek alapján egy poliedrikus kúp mindig tartalmazza $0 \in \mathbb{R}^n$-t.

Példa

$$\mathcal{C} = \{0\} \subset \mathbb{R}^d$$

egy poliedrikus kúp.

Kúpok (konvex)

- Könnyű ellenőrizni, hogy egy $\mathcal{C}$ poliedrikus kúpra $u, v \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén $\lambda v \in \mathcal{C}$ és $u + v \in \mathcal{C}$.

Definíció

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy (konvex) kúp, ha zárt ponthalmaz és $u, v \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén $\lambda v \in \mathcal{C}$ és $u + v \in \mathcal{C}$.

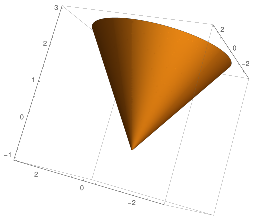
- Azaz a poliedrikus kúp egy példa a kúpra, amely ráadásul zárt is. A fent közölt definícióból egyszerűen levezethető, hogy egy kúp szükségszerűen konvex.
- Ha $\mathcal{C} \neq \{0\} \subset \mathbb{R}^d$ kúp, akkor tartalmaz félegyenest.

Példa

Példa

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0 \right\}$$

egy a z-tengelyre forgásszimmetrikus kúp a 3-dimenziós térben.



- A fenti forgáskúp nem poliedrikus kúp.

Vektorok kúp kombinációja

Definíció

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}_+$ nemnegatív számok egy rendszere. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok kúp kombinációja.

Lemma

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres, zárt ponthalmaz. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{C}$ kúp, azaz $\mathcal{C}$ zárt a nemnegatív számokkal való szorzásra és az összeadásra,

(ii) $\mathcal{C}$ zárt a kúp kombináció képzésre.

Végesen generált kúpok

- $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett kúp kombinációk kúp kombinációja is a $(v_i)_{i\in H}$ vektorrendszerből képzett kúp kombináció. Ezen egyszerű észrevétel alapján újabb példát adhatunk kúpra.

Példa

$$\langle v_1, v_2, \dots v_N\rangle_{\text{kúp}} = \left\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}_+^n\right\}$$

- Könnyű látni, hogy $\langle v_1, v_2, \dots v_N\rangle_{\text{kúp}}$ a legszűkebb kúp, amely tartalmazza a $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszert.

Definíció

$\mathcal{C}$ egy végesen generált kúp, ha elő áll mint $\langle v_1, v_2, \dots v_N\rangle_{\text{kúp}}$ alakban valamely $(v_i)_{i=1}^N$ vektorrendszerre.

- Ez vajon példa a poliedrikus kúpra?

Weyl—Minkowski-tétel

Weyl—Minkowski-tétel

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{C}$ poliedrikus kúp,

(ii) $\mathcal{C}$ végesen generált kúp.

Tétel

(i) (Weyl-tétel) Legyen $\mathcal{G} = \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}$ egy végesen generált kúp. Ekkor alkalmas A mátrixra $\mathcal{G} = \{x : Ax \preceq 0\}$.

(ii) (Minkowski-tétel) Legyen $\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq 0\}$ egy poliedrikus kúp. Ekkor alkalmas G mátrixra $\mathcal{P} = \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}$.

Szünet

Farkas-lemma: Geometriai alak

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy végesen generált kúp. Azaz alkalmas $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixra

$$\mathcal{C} = \left\{ G\lambda : 0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

G oszlopvektorai a kúp generátorai.

• Másképpen $b \in \mathcal{C}_G$ akkor és csak akkor ha $\begin{cases} Gx = b, \\ 0 \preceq x \end{cases}$ megoldható.

• Egy ilyen egyenlőtlenségrendszer negoldhatósága éppen a Farkas-lemma egyik alternatívája. Mi a másik alternatíva?

Farkas-lemma: Geometriai alak (folytatás)

• A Farkas-lemma alapján $\begin{cases} Gx = b, \\ 0 \preceq x \end{cases}$ nem megoldhatósága ekvivalens olyan $\lambda \in \mathbb{R}^n$ vektor létezésével, hogy

$$\lambda^\mathsf{T} G \succeq 0^\mathsf{T}, \text{ míg } \lambda^\mathsf{T} b = -1.$$

• Másképpen fogalmazva a $\mathcal{H} : \lambda^\mathsf{T} x = 0$ origón átmenő hipersík $\mathcal{F}^{\geq} : \lambda^\mathsf{T} x \geq 0$ oldala tartalmazza a $\mathcal{C}$ kúpot, míg a másik $\mathcal{F}^{\leq} : \lambda^\mathsf{T} x \leq 0$ féltere belsejében tartalmazza b-t.

Farkas-lemma: Geometriai forma.

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy végesen generált kúp, $b \notin \mathcal{C}$. Ekkor van olyan $\mathcal{H} : \lambda^\mathsf{T} x = 0$ hipersík, amely szeparálja/elválasztja a kúpot és b-t.

Weyl-tétel bizonyítása

Legyen $\mathcal{G} = \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}$ egy végesen generált kúp.

Legyen

$$\widehat{\mathcal{G}} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} : y = G\lambda, 0 \preceq \lambda \right\}.$$

Nyilván $\widehat{\mathcal{G}}$ egy poliéder.

Nyilván $\mathcal{G}$ a $\widehat{\mathcal{G}}$ projekcióiból megkapható.

Tudjuk, hogy $\mathcal{G}$ egy poliéder és egy kúp.

Lemma

Tudjuk, hogy $\mathcal{C}$ egy poliéder és egy kúp. Ekkor $\mathcal{C}$ egy poliedrikus kúp.

Minkowski-lemma

Lemma

Tegyük fel, hogy

$$\{x : Ax \preceq 0\} = \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

Ekkor

$$\left\{x : G^{\mathsf{T}}x \preceq 0\right\} = \left\{A^{\mathsf{T}}\lambda : 0 \preceq \lambda\right\}.$$

- A Lemma feltételét két tartalmazásként is felfoghatjuk:

$$\{x : Ax \preceq 0\} \supset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

$$\{x : Ax \preceq 0\} \subset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

Minkowski-lemma: Az első feltétel

$$\{x : Ax \preceq 0\} \supset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

- A baloldal elemei G oszlopainak kúp kombinációi. A tartalmazás szerint ezen vektorok mindegyike benne van a bal oldali halmazban.
- Ez azonban ekvivalens azzal, hogy G oszlopai benne vannak a bal oldali halmazban.
- Ez azonban ekvivalens azzal, hogy

AG elemei mind nempozitívak.

Minkowski-lemma: A második feltétel

$$\{x : Ax \preceq 0\} \subset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

- A bal oldal egy b eleme a jobb oldalban is benne van. Azaz $Ab \preceq 0$ esetén a $\begin{cases} G\lambda = b \\ 0 \preceq \lambda \end{cases}$ rendszer megoldható.
- A Farkas-lemma alapján ez ekvivalens módon átfogalmazható: $\begin{cases} Ab \preceq 0 \\ \mu^\mathsf{T} G \preceq 0^\mathsf{T} \\ \mu^\mathsf{T} b = 1 \end{cases}$ rendszernek nincs megoldása.

Minkowski-lemma: A feltételek

- A fentiek alapján a feltételek

$$AG \text{ elemei mind nempozitívak} \quad \text{és} \quad \begin{cases} Ab \preceq 0 \\ \mu^{\mathsf{T}} G \preceq 0^{\mathsf{T}} \\ \mu^{\mathsf{T}} b = 1 \end{cases} \quad \text{nem megoldható.}$$

- Másképpen

$$G^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} \text{ elemei mind nempozitívak} \quad \text{és} \quad \begin{cases} G^{\mathsf{T}} \mu \preceq 0 \\ b^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} \preceq 0^{\mathsf{T}} \\ b^{\mathsf{T}} \mu = 1 \end{cases} \quad \text{nem megoldhat}$$

- A fentiek alapján ez a bizonyítandóval ekvivalens.

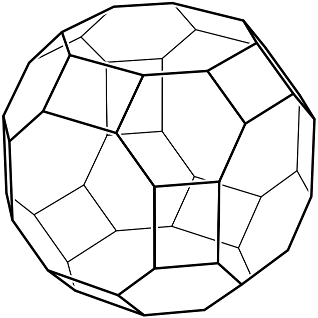
Szünet

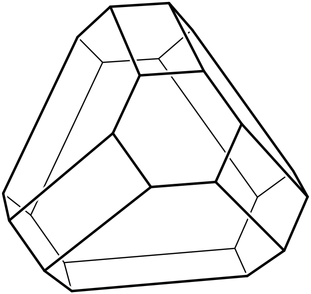
Politópok

Definíció

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ poliédert politópnak nevezzük, ha korlátos.

- A korlátos poliéderek/politópok fontos szerepet játszanak a poliéderek megértésében.





Konvex politópok alaptétele

Tétel

Legyen $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$. Ekkor a következők ekvivalensek

(i) $\mathcal{P}$ egy korlátos poliéder.

(ii) $\mathcal{P}$ véges sok $\mathbb{R}^d$-beli pont konvex burka.

Poliéderek „kúposítása”, homogenizálás

Legyen $\mathcal{P}$ egy poliéder, azaz

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Legyen

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\{ \binom{x}{\lambda} : x \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, Ax \preceq \lambda b, 0 \leq \lambda \right\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Példa

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^\mathsf{T} : x \leq 0, y \leq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\{ (x, y, \lambda)^\mathsf{T} : x \leq 0, y \leq 0, \lambda \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3.$$

Poliéderek „kúposítása”: Az állítás

Észrevétel

(i) $x \in \mathcal{P}$ akkor és csak akkor, ha $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathcal{P}}$.

(ii) $\widehat{\mathcal{P}}$ egy poliedrikus kúp.

Konvex politópok alaptétele: A bizonyítás (i)⇒(ii)

- $\mathcal{P}$ korlátos, így az észrevételben szereplő $\widehat{\mathcal{P}}$ poliedrikus kúp csak 0-t tartalmazza a $\lambda = 0$ hipersíkról.

- Weyl tétele alapján

$$\widehat{\mathcal{P}} = \langle \widehat{g}_1, \widehat{g}_2, \ldots, \widehat{g}_k \rangle_{\text{kúp}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}}$$

- Így

$$\begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathcal{P}}$$

akkor és csak akkor ha

$$g \in \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konvex}}$$

Konvex politópok alaptétele: A bizonyítás (ii)⇒(i)

Feltesszük, hogy $\mathcal{P} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konv}}$. Nyilván $\mathcal{P}$ korlátos. Legyen

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}},$$

végesen generált kúp.

Weyl tétele alapján alkalmas $(A| - b)$ mátrixra

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} : (A| - b) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \preceq 0 \right\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\},$$

azaz $\mathcal{P}$ egy poliéder.

Geometriai halmazok összeadása

Definíció

Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Ekkor

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

az A, B ponthalmazok direkt vagy Minkowski-összege.

Minkowski—Weyl-tétel

Minkowski—Weyl-tétel

(i) Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges poliéder. Ekkor alkalmas $\mathcal{T}$ végesen generált konvex halmazra/politópra és $\mathcal{C}$ végesen generált kúpra

$$\mathcal{P} = \mathcal{T} + \mathcal{C}.$$

(ii) Legyen $\mathcal{T}$ egy végesen generált konvex halmaz/politóp és $\mathcal{C}$ egy végesen generált kúp. Ekkor $\mathcal{T} + \mathcal{C}$ egy poliéder

Minkowski—Weyl-tétel: A bizonyítás: (i)

- $\mathcal{P}$-hez definiáltunk egy $\widehat{\mathcal{P}}$ poliedrikus kúpot.
- Weyl tétele alapján

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} h_\ell \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}},$$

- Ekkor

$$\mathcal{P} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konvex}} + \langle h_1, h_2, \ldots, h_\ell \rangle_{\text{kúp}},$$

Minkowski—Weyl-tétel: A bizonyítás: (ii)

Feltesszük, hogy $\mathcal{P} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konv}} + \langle h_1, h_2, \ldots, h_\ell \rangle_{\text{kúp}}$. Legyen

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} h_\ell \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}},$$

végesen generált kúp.

Weyl tétele alapján alkalmas $(A| - b)$ mátrixra

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} : (A| - b) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \preceq 0 \right\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\},$$

azaz $\mathcal{P}$ egy poliéder.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!