# Egyenlőtlenségrendszerek megoldhatósága, Fourier—Motzkin-ellimináció

Hajnal Péter

2021. tavasz

# Az alapkérdés

- Adott $Ax \preceq b$ egyenlőtlenségrendszer megoldható-e?

- Ez egy igen/nem kérdés. Leegyszerűsítése a megoldáskeresésnek, illetve a teljes megoldáshalmaz leírásának.

- Mit tudunk lineáris egyenletrendszerek esetéről? Azaz mikor oldható meg egy egyenletrendszer? Azaz mikor NEM oldható meg egy egyenletrendszer? (Nem megoldhatóság: $Ax = b \quad \models \quad 0^{\mathsf{T}} x = 1$.)

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.
- Az $Ax = b$ egyenletrendszert az $(A|b)$ bővített mátrixszal írjuk le.

- Elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert.

- Az elemi sorműveletek:

(1) Egy sor nem-nulla számmal történő szorzása.

(2) Egy sor számszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

- A lépcsős alak kialakítása során egyenletrendszerünk ekvivalens az eredetivel.

- A lépcsős alakból kiolvasható kérdésünkre a válasz.

# Lépcsős alakú egyenletrendszer: Példa

## Példa

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Megoldható: $x_3, x_4$-nek tetszőleges érték adható, $x_1, x_2, x_5$ meghatározható.

## Példa

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

NEM megoldható: A negyedik egyenlet egy ellentmondás.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága: Tételek

## Kronecker—Capelli-tétel

A következők ekvivalensek:

(i) $Ax = b$ megoldható,

(ii)
$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b).$$

## Tétel

A következők ekvivalensek:

(i) $Ax = b$ NEM megoldható,

(ii)
$$\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(\text{A—b}),$$

(iii) $Ax = b \quad \vdash \quad 0 = 1.$

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.
- A (2) elemi sorművelet után kapott egyenlőtlenségrendszer nem lesz ekvivalens az eredetivel. BAJ.
- Csak összeadásokkal a „kiejtés” nem mindig oldható meg. BAJ.
- Új ötletekre van szükség. Lássuk az egy változó esetét.

# Szünet

# Egy változó esete

Legyen most $n = 1$, azaz egyetlen valós változóval, az $x$-szel dolgozunk. Ekkor egyenlőtlenségrendszerünk:

$$\begin{cases} a_1 x \leq b_1 \\ a_2 x \leq b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_k x \leq b_k \end{cases}$$

Könnyen meggondolható, hogy $a_i = 0$-nak nincs sok értelme. Ezek után feltesszük, hogy $a_i \neq 0$ minden $i$-re.

# Egy változó esete: Levezetés I

- A szorzási elv miatt ez ekvivalens az alábbival:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{|a_1|}x \leq \dfrac{b_1}{|a_1|} \\ \dfrac{a_2}{|a_2|}x \leq \dfrac{b_2}{|a_2|} \\ \vdots \\ \dfrac{a_k}{|a_k|}x \leq \dfrac{b_k}{|a_k|} \end{cases}$$

- Így a bal oldalon $x$ együtthatói 1-esek vagy -1-esek.

# Egy változó esete: Levezetés II

• Változtassuk meg az egyenlőtlenségek sorrendjét úgy, hogy először azok szerepeljenek, amelyekben $x$ együtthatója 1, utána pedig a maradék, ahol $x$ együtthatója $-1$:

$$\left\{\begin{array}{r} x \leq \beta_{i_1} \\ \vdots \\ x \leq \beta_{i_s} \\ \hline -x \leq \gamma_{j_1} \\ \vdots \\ -x \leq \gamma_{j_t} \end{array}\right.$$

ahol $\beta_{ik}$ és $\gamma_{jl}$ a megfelelő fenti valós számok, továbbá $s+t=k$, $\{i_1,\dots,i_s\}\cup\{j_1,\dots,j_t\}=\{1,\dots,k\}$.

# Egy változó esete: Átírások

- Ez ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{cases} x \le \min\limits_{k=1,\dots,s} \beta_{i_k} \\ -x \le \min\limits_{l=1,\dots,t} \gamma_{j_l} \end{cases}$$

- Tovább átalakítva:

$$-\min_{l} \gamma_{j_l} \le x \le \min_{k} \beta_{i_k}$$

- A végső formánk az alábbi lesz:

$$\max_{\ell} -\gamma_{j_\ell} \le x \le \min_{k} \beta_{i_k}$$

- A későbbiekben feltesszük, hogy $s, t \neq 0$. Ha valamelyik 0 lenne, akkor a megoldhatóság nyilvánvaló. Sőt a teljes megoldáshalmazt látnánk.

# Megoldhatóság

- Az eredeti egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha

$$\max_{\ell} -\gamma_{j_\ell} \leq \min_{k} \beta_{i_k}$$

- Ekvivalens módon:

$$-\gamma_{j_\ell} \leq \beta_{i_k} \qquad \text{minden } k \in \{1, \ldots, s\}, \quad \ell \in \{1, \ldots, t\} \text{ esetén.}$$

- Ez $s \cdot t$ darab egyenlőtlenség, ami átrendezhető az alábbi módon:

$$0 \leq \gamma_{j_\ell} + \beta_{i_k} \qquad \text{minden } k \in \{1, \ldots, s\}, \quad \ell \in \{1, \ldots, t\} \text{ esetén.}$$

- Vegyük észre, hogy az $s \cdot t$ darab megoldhatósági feltételt le is vezethettük volna: ha összeadtuk volna a $\pm 1$ $x$-együtthatójú rendszer, egy a vonal feletti és egy, a vonal alatti tetszőleges egyenlőtlenségét.

# Összefoglalás

- A megoldhatág eldöntésének elókészületi lépései:

(1) Normalizáljuk az egyenleteinket, hogy a bal oldali $x$-ek együtthatói $\pm 1$ legyenek.

(2) A $+1$ együtthatós egyenlőtlenségeket adjuk hozzá az összes $-1$ együtthatós egyenlőtlenséghez.

(3) Az $s \cdot t$ összeg-egyenlőtlenség bal oldalai mind 0-k. „$x$ kiesett".

- Döntés a megoldhatóságról:

(1) Ha minden jobb oldal nem negatív, akkor egyenletrendszerünk megoldható.

(2) Ha valamelyik jobb oldal negatív, akkor egyenletrendszerünk nem megoldható.

- Tegyük fel, hogy nem megoldhatóság van. Azaz alkalmas $k, \ell$ indexekre $0 > \gamma_{j_\ell} + \beta_{i_k}$. Ekkor az eredeti $\mathcal{E}$ rendszerből levezethetjük, hogy $0 \leq \gamma_{j_\ell} + \beta_{i_k}$. Illetve számmal szorzás után kapjuk, hogy $\mathcal{E} \quad \vdash \quad 0 \leq -1$.

# Szünet

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás

- Az általános esetben egyváltozós gondolatot fogjuk használni a változók számának csökkentésére.
- Vegyük a kezdeti $Ax \preceq b$ egyenlőtlenségrendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x$ n-változós, $b$ pedig $k$-változós vektorok.
- Rendezzük úgy, hogy előrevesszük azokat az egyenlőtlenségeket, melyekben $x_1$ együtthatója pozitív, majd következzenek azok, amelyekben $x_1$ nem szerepel, azaz együtthatója 0, végül pedig a negatív együtthatósok.
- Tegyük fel, hogy $s_+$ darab sorban $x$ együtthatója pozitív, $s_0$ darab sorban 0 és $s_-$ darab sorban negatív. Nyilván teljesül, hogy $s_+ + s_0 + s_- = k$.

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás (folytatás)

- Ekkor az együtthatómátrix a következőképpen fog kinézni:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_+ \\ \hline A_0 \\ \hline A_- \end{array}\right)$$

- Ahol

$$A_+ \in \mathbb{R}^{s_+ \times n} \qquad A_0 \in \mathbb{R}^{s_0 \times n} \qquad A_- \in \mathbb{R}^{s_- \times n} \qquad (s_+ + s_0 + s_- = k)$$

# Fourier-Motzkin elimináció: Normálás

- Az $i$-edik egyenletet, ha a hozzátartozó sor $A_+$-ban vagy $A_-$-ban van, elosztjuk $|a_{i1}|$-gyel, ha $A_0$-ban van, változatlanul hagyjuk.
- Ezek után kapjuk a következőt:

$$\widetilde{A}x \preccurlyeq \widetilde{b} = \begin{cases} \widetilde{A_+}x \preccurlyeq \widetilde{b_+} \\ \widetilde{A_0}x \preccurlyeq \widetilde{b_0} \\ \widetilde{A_-}x \preccurlyeq \widetilde{b_-} \end{cases}$$

- Megjegyezzük, hogy $\widetilde{A_0} = A_0$, $\widetilde{b_0} = b_0$. Továbbá írjuk a következő alakba a fenti részmátrixokat:

$$\widetilde{A}_+ = \begin{pmatrix} 1 & \\ \vdots & \overline{A}_+ \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \widetilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \overline{A}_0 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \widetilde{A}_- = \begin{pmatrix} -1 & \\ \vdots & \overline{A}_- \\ -1 & \end{pmatrix}$$

# Fourier-Motzkin elimináció: $x_1$ eliminációja

- Hagyjuk le $x$-ből az $x_1$ változót, kapjuk $x_-$-t:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \to \quad x_- = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

- Először is a középső egyenleteket meghagyjuk:

$$A_0 x \preceq b_0 \quad \equiv \quad \widetilde{A_0} x \preceq \widetilde{b_0} \quad \equiv \quad \overline{A_0} x_- \preceq \widetilde{b_0}.$$

- Másodszor veszünk egy darab egyenlőtlenséget az $\widetilde{A}_+ x \preccurlyeq \widetilde{b}_+$-ból — erre $s_+$ lehetőségünk van —, és veszünk egy egyenlőtlenséget $\widetilde{A}_- x \preccurlyeq \widetilde{b}_-$-ből ($s_-$ lehetőség). Adjuk össze ezt a két kiválasztott egyenlőtlenséget. Tegyük meg az iméntieket az összes lehetséges módon. Így sikerült eliminálnunk az $x_1$ változót, az új egyenlőtlenségrendszerünk $s_0 + s_+ s_-$ egyenlőtlenséget tartalmaz.

# Fourier-Motzkin elimináció: A tétel

- Legyen $\mathcal{E} : Ax \preceq b$ az eredeti egyenlőtlenségrendszer.
- Legyen $\mathcal{E}'$ az $x_1$ eliminációja után kapott egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} \widetilde{A}_0 x_{-} \preceq \widetilde{b}_0 \\ \widehat{A} x_{-} \preceq \beta \end{cases}$$

Az $\widetilde{A}_0 x \preccurlyeq \widetilde{b}_0$ egyenlőtlenségrendszer tehát azon egyenlőtlenségeket írja le, amelyekben nem történt változtatás. Az $\widehat{A} x_{-} \preccurlyeq \beta$ egyenlőtlenségrendszer azokat az egyenlőtlenségeket tartalmazza, amelyeket úgy kaptunk, hogy az aktuálisan kiválasztott két „régi'' egyenlőtlenséget összeadtuk.

**Tétel**

$\mathcal{E}$ akkor és csak akkor megoldható, ha $\mathcal{E}'$ megoldható.

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás

- A ($\Rightarrow$) irány triviális: $\mathcal{E}'$ egyenlőtlenségeit levezettük. Egy megoldása $\mathcal{E}$-nek magoldás maradt.
- A fordított, ($\Leftarrow$) irány érdekesebb: Feltesszük, hogy $\mathcal{E}'$ megoldható, vagyis létezik $(x_2^0, x_3^0, \cdots, x_n^0)$ megoldás. Helyettesítsük be ezt a megoldást $\mathcal{E}$-be.
- $A_0 x \preceq b_0$ nyilván teljesül, hiszen ez része $\mathcal{E}'$-nek is.
- A maradék egyenlőtlenségrendszert kell jobban mebgnézni.

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

$$\left\{\begin{array}{r}
x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{1n}x_n^0 \leq \widetilde{b}_1 \\
\vdots \\
x_1 + \widetilde{a}_{s_+,2}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{s_+,n}x_n^0 \leq \widetilde{b}_{s_+} \\
\hline
-x_1 + \widetilde{a}_{s_++s_0+1,2}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{s_++s_0+1,n}x_n^0 \leq \widetilde{b}_{s_++s_0+1} \\
\vdots \\
-x_1 + \widetilde{a}_{s_++s_0+s_-,2}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{s_++s_0+s_-,n}x_n^0 \leq \widetilde{b}_{s_++s_0+s_-}
\end{array}\right.$$

Azaz

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1 \leq \widetilde{b}_1 - \widetilde{a}_{12}x_2^0 - \cdots - \widetilde{a}_{1n}x_n^0 \\
\quad\vdots \\
x_1 \leq \widetilde{b}_{s_+} - \widetilde{a}_{s_+,2}x_2^0 - \cdots - \widetilde{a}_{s_+,n}x_n^0 \\
\hline
-x_1 \leq \widetilde{b}_{s_++s_0+1} - \widetilde{a}_{s_++s_0+1,2}x_2^0 - \cdots - \widetilde{a}_{s_++s_0+1,n}x_n^0 \\
\quad\vdots \\
-x_1 \leq \widetilde{b}_{s_++s_0+s_-} - \widetilde{a}_{s_++s_0+s_-,2}x_2^0 - \cdots - \widetilde{a}_{s_++s_0+s_-,n}x_n^0
\end{array}\right.$$

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

- Amit látunk egy egyváltozós egyenletrendszer $s_+ + s_-$ darab egyenlőtlenséggel.
- Láttuk, hogy ennek megoldhatósága ekvivalens $s_+ \cdot s_-$ összeg egyenlőtlenség (mely csak számokat tartalmaznak) teljesülésével:

$$0 \leq \widetilde{b}_i - \widetilde{a}_{i2}x_2^0 - \cdots - \widetilde{a}_{in}x_n^0 + \widetilde{b}_j - \widetilde{a}_{j2}x_2^0 - \cdots - \widetilde{a}_{jn}x_n^0.$$

- Rendezve:

$$(\widetilde{a}_{i2}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{in}x_n^0) + (\widetilde{a}_{j2}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{jn}x_n^0) \leq \widetilde{b}_i + \widetilde{b}_j.$$

- Ami két egyenlőtlenség összege

$$x + \widetilde{a}_{i2}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{in}x_n^0 \leq \widetilde{b}_i, \quad -x + \widetilde{a}_{j2}x_2^0 + \cdots + \widetilde{a}_{jn}x_n^0 \leq \widetilde{b}_j.$$

- Ezeket tudjuk, hiszen $\mathcal{E}'$ egy megoldásával dolgozunk.

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input: $\mathcal{E}$ egyenlőtlenségrendszer ($Ax \preceq b$). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicinalizálás) $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ // nem eliminált változók,
$\mathcal{A} : Ax \preceq b$ // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg $X \neq \emptyset$

- Válasszunk $x \in X$ változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk $x$ együtthatójának előjele szerint $\rightarrow \mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_-$.
- (Normálás) Pozitív számmal szorozzuk egyenlőtlenségeinket, hogy $x$ együtthatói $\{-1, 0, 1\}$-beliek legyenek$\rightarrow \mathcal{A}'_+$, $\mathcal{A}'_0$, $\mathcal{A}'_-$.
- (Eliminálás) $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}'_0$ és azok az egyenlőtlenségek, amik egy $\mathcal{A}'_+$-beli és egy $\mathcal{A}'_-$-beli összege.
- (Változó update) $X \leftarrow X - \{x\}$.

Vissza (Ciklus)-hoz.

Ha $\mathcal{A}$-ban minden jobb oldal nemnegatív, akkor Output="$\mathcal{E}$ megoldható".
Ha $\mathcal{A}$-ban van negatív jobb oldal, akkor Output="$\mathcal{E}$ nem megoldható".

# Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x-y \leq 1 \\ 2x+y \leq 2 \\ -x+2y \leq 3 \\ x-y \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y \leq 2 \\ x-y \leq -1 \\ -x-y \leq 1 \\ -x+2y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}y \leq 1 \\ x-y \leq -1 \\ -x-y \leq 1 \\ -x+2y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ \frac{5}{2}y \leq 4 \\ -2y \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}y \leq 4 \\ y \leq 2 \\ -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ -2y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{8}{5} \\ y \leq 2 \\ -y \leq 4 \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

Megoldható:

$$0 \leq y \leq \frac{8}{5}$$

# Fourier—Motzkin-elimináció: Példa (folytatás)

Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer megoldható. Legyen $y^0 = 1$. Ekkor behelyettesítünk az előző (eredeti fekete) egyenlőtlenségrendszerbe $y^0 = 1$-et:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} \cdot 1 \leq 1 \\ x - 1 \leq -1 \\ -x - 1 \leq 1 \\ -x + 2 \cdot 1 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq 0 \\ x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

# Fourier—Motzkin-elimináció: Példa (folytatás)

- Ha $x$-et ennek megfelelően választjuk, akkor találtunk egy megoldást az eredeti egyenlőtlenség-rendszerhez. Például $(x^0, y^0) = (-\frac{1}{2}, 1)$.
- Ellenőrizhetjük, hogy valóban teljesül-e az összes feltétel:

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq 1 \\ 0 \leq 2 \\ \dfrac{5}{2} \leq 3 \\ -\dfrac{3}{2} \leq -1 \end{cases}$$

Azt látjuk, hogy minden egyenlőtlenség igaz, azaz minden feltétel teljesül, így a Fourier-Motzkin elimináció segítségével találtunk egy megoldást.

# Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x + y \leq -4 \\ -x + y \leq -5 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x + \frac{1}{2}y \leq -2 \\ -x + y \leq -5 \\ -x - \frac{2}{3}y \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -5 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -5 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -5 \\ y \leq -\frac{14}{3} \\ -y \leq -3 \\ -y \leq -24 \end{cases}$$

NEM megoldható: $24 \leq y \leq -5$

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható. A Fourier—Motzkin.elimináció algvégzését elemezve egy formális levezetés is látható.
- Az ellentmondás előtt láttuk, hogy $y \leq -5$ és $-y \leq -3$. Ezek összege $0 \leq -8$. Ennek $\frac{1}{8}$-szorosa a standad $0 \leq -1$ ellentmondás.
- $y \leq -5$ az $x \leq 0$ és $-x + y \leq -5$ kiinduló egyenlőtlenségek összege volt.
- $-y \leq -3$ az $-\frac{2}{3}y \leq -2$ egyenlőtlenség $\frac{3}{2}$-szerese. Amely egyenlőtlenség $x \leq 0$ és $-x - \frac{2}{3}y \leq -2$ összege. Ezek közül az első egy eredeti egyenlőtlenség, a második az eredeti $-3x - 2y \leq -6$ egyenlőtlenség $\frac{1}{3}$-szorosa.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Összegezve:

$$\begin{aligned} x &\leq 0 & &/ \cdot \frac{5}{16} \\ -x + y &\leq -5 & &/ \cdot \frac{2}{16} \\ 2x + y &\leq -4 & &/ \cdot 0 \\ -3x - 2y &\leq -6 & &/ \cdot \frac{1}{16} \\ \hline 0 &\leq -1 & & \end{aligned}$$

- Azaz

$$\left\{ \begin{aligned} x &\leq 0 \\ -x + y &\leq -5 \\ 2x + y &\leq -4 \\ -3x - 2y &\leq -6 \end{aligned} \right. \quad \vdash \quad 0 \leq -1,$$

így az egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

# Vége van!

Köszönöm a figyelmet!