Alapok

Hajnal Péter

2021. tavasz

A kurzus témája

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus egy alternatív elnevezése „Bevezetés az optimalizálásba” lehetne.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus egy alternatív elnevezése „Bevezetés az optimalizálásba” lehetne.

A kurzus egy jelentős része egy rendkívül fontos optinalizálási kérdéssel foglalkozik: lineáris függvényt minimalizálunk lineáris feltételek mellett.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus egy alternatív elnevezése „Bevezetés az optimalizálásba” lehetne.

A kurzus egy jelentős része egy rendkívül fontos optinalizálási kérdéssel foglalkozik: lineáris függvényt minimalizálunk lineáris feltételek mellett. Később minden pontosan le lesz írva.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus egy alternatív elnevezése „Bevezetés az optimalizálásba” lehetne.

A kurzus egy jelentős része egy rendkívül fontos optinalizálási kérdéssel foglalkozik: lineáris függvényt minimalizálunk lineáris feltételek mellett. Később minden pontosan le lesz írva. Ezen probléma neve: Lineáris programozás.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus egy alternatív elnevezése „Bevezetés az optimalizálásba" lehetne.

A kurzus egy jelentős része egy rendkívül fontos optinalizálási kérdéssel foglalkozik: lineáris függvényt minimalizálunk lineáris feltételek mellett. Később minden pontosan le lesz írva. Ezen probléma neve: Lineáris programozás. A programozás ismét egy katonai szakkifejezés: programozni= menedzselni.

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus egy alternatív elnevezése „Bevezetés az optimalizálásba" lehetne.

A kurzus egy jelentős része egy rendkívül fontos optinalizálási kérdéssel foglalkozik: lineáris függvényt minimalizálunk lineáris feltételek mellett. Később minden pontosan le lesz írva. Ezen probléma neve: Lineáris programozás. A programozás ismét egy katonai szakkifejezés: programozni= menedzselni.

A kurzus teljesítéséhez nem kell programozói tudás. De a kurzsus nagy részében központi szerepet kapnak az algoritmusok.

A kurzus menete

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

(2) Lineáris programozás.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

(2) Lineáris programozás. A viszgálat célja a szimplex algoritmus kidolgozása és tárgyalása.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

(2) Lineáris programozás. A viszgálat célja a szimplex algoritmus kidolgozása és tárgyalása. A kurzus ezen részében a matematika és algoritmuselmélet keveredik.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

(2) Lineáris programozás. A viszgálat célja a szimplex algoritmus kidolgozása és tárgyalása. A kurzus ezen részében a matematika és algoritmuselmélet keveredik.

(3) Konkrét optimalizálási eljárások.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

(2) Lineáris programozás. A viszgálat célja a szimplex algoritmus kidolgozása és tárgyalása. A kurzus ezen részében a matematika és algoritmuselmélet keveredik.

(3) Konkrét optimalizálási eljárások. A kurzus algoritmuselméleti része.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

(2) Lineáris programozás. A viszgálat célja a szimplex algoritmus kidolgozása és tárgyalása. A kurzus ezen részében a matematika és algoritmuselmélet keveredik.

(3) Konkrét optimalizálási eljárások. A kurzus algoritmuselméleti része. Ez is tiszta matematika, de nem annyira klasszikus témakör.

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

Lineáris függvények

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

Lineáris függvények

$a(x) = 2x - 3,$

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

Lineáris függvények

$a(x) = 2x - 3,$
$b(x, y) = 2x - 3y + 4,$

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

Lineáris függvények

$a(x) = 2x - 3,$
$b(x, y) = 2x - 3y + 4,$
$c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 - 3x_2 - 4x_5 + 4x_7 - 101,$

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

Lineáris függvények

$a(x) = 2x - 3,$
$b(x, y) = 2x - 3y + 4,$
$c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 - 3x_2 - 4x_5 + 4x_7 - 101,$
$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - x_1 + x_2 - x_3 + \ldots + (-1)^n x_n,$

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

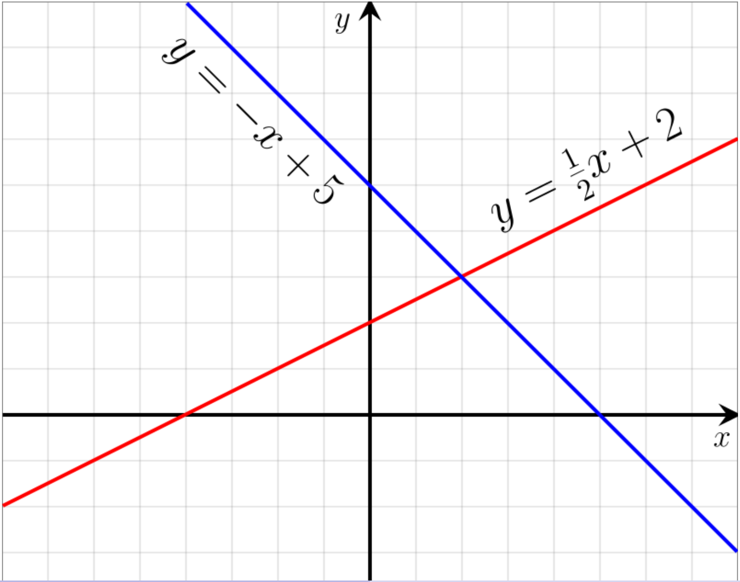
lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

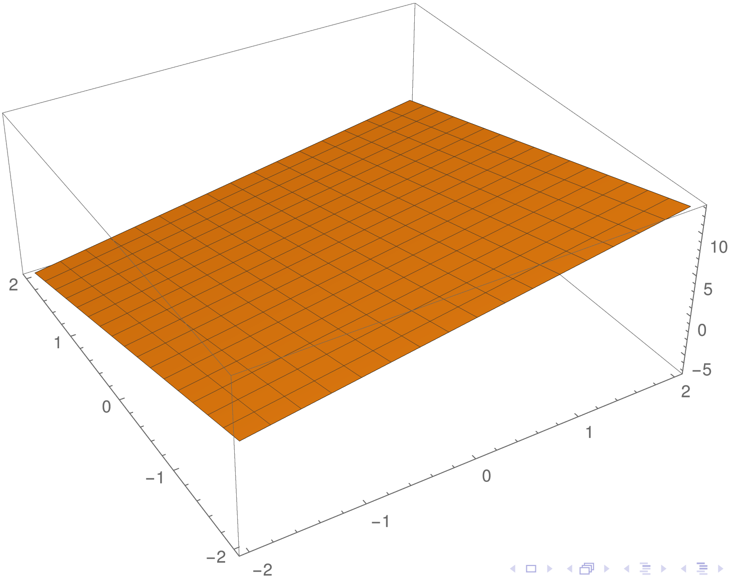
Lineáris függvények

$a(x) = 2x - 3,$
$b(x, y) = 2x - 3y + 4,$
$c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 - 3x_2 - 4x_5 + 4x_7 - 101,$
$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - x_1 + x_2 - x_3 + \ldots + (-1)^n x_n,$
$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i.$

Lineáris függvények: példa



Matematica példa Plot3D[2 x - 3 y + 3, x, -2, 2, y, -2, 2]



Lineáris függvények mint polinomok

Lineáris függvények mint polinomok

Polinom nyelvezet

ℓ lineáris függvény egy legfeljebb első fokú, több-határozatlanú polinom: $\ell \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

α_i számok: együtthatók; β szám: konstans tag.

Ha $\beta = 0$, akkor a polinom/lineáris függvény homogén.

Vektorterek, lineáris leképezések

Vektorterek, lineáris leképezések

Vektorterek nyelvezete

Legyen U és V két $\mathbb{F}$ feletti vektortér.

- $\varphi : U \to V$ leképezés lineáris tulajdonságú, ha minden $u, v \in U$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ esetén $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$.
- $\varphi : U \to V$ leképezés affin tulajdonságú, ha minden $u, v \in U$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{F} : \lambda + \mu = 1$ esetén $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$.

Párhuzamos nyelvezetek

Párhuzamos nyelvezetek

A lineáris jelző kétféle értelemben használt:

	0 képe 0	0 képe tetszőleges
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	homogén lineáris függvény	lineáris függvény
$\varphi : U \to V$	lineáris leképezés	affin leképezés

Párhuzamos nyelvezetek

A lineáris jelző kétféle értelemben használt:

	0 képe 0	0 képe tetszőleges
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	homogén lineáris függvény	lineáris függvény
$\varphi : U \to V$	lineáris leképezés	affin leképezés

A kurzus az első sor terminológiáját használja.

Szünet

Jelölések

Jelölések

Jelölések

Jelölések

Jelölések

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

Jelölések

Jelölések

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok halmaza.

Jelölések

Jelölések

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_{++}$ a pozitív valós számok halmaza.

Jelölések

Jelölések

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_{++}$ a pozitív valós számok halmaza.

$\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

Jelölések

Jelölések

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_{++}$ a pozitív valós számok halmaza.

$\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

$\mathbb{Z}_+$ a nemnegatív egész számok halmaza, a természetes számok halmaza $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Jelölések

Jelölések

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_{++}$ a pozitív valós számok halmaza.

$\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

$\mathbb{Z}_+$ a nemnegatív egész számok halmaza, a természetes számok halmaza $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

$\mathbb{Z}_{++}$ a pozitív egész számok halmaza, $\mathbb{N}_+$.

Vektorok

Vektorok

- $\mathbb{R}^n$ a valós szám n-esek/VEKTOROK halmaza. $v \in \mathbb{R}^n$ esetén az i-edik szám az i-edik koordináta/komponens. Jelölése v_i ($v_i \in \mathbb{R}$).

Vektorok

- $\mathbb{R}^n$ a valós szám n-esek/VEKTOROK halmaza. $v \in \mathbb{R}^n$ esetén az i-edik szám az i-edik koordináta/komponens. Jelölése v_i ($v_i \in \mathbb{R}$).
- $v \in \mathbb{R}^n$ leírása esetén a koordinátákat felsoroljuk és a kapott számokat zárójelbe rakjuk.

Vektorok

- $\mathbb{R}^n$ a valós szám n-esek/VEKTOROK halmaza. $v \in \mathbb{R}^n$ esetén az i-edik szám az i-edik koordináta/komponens. Jelölése v_i ($v_i \in \mathbb{R}$).
- $v \in \mathbb{R}^n$ leírása esetén a koordinátákat felsoroljuk és a kapott számokat zárójelbe rakjuk.
- A koordináták egymásutáni leírása történhet egymás mellé, vagy egymás alá.

Vektorok

• $\mathbb{R}^n$ a valós szám n-esek/VEKTOROK halmaza. $v \in \mathbb{R}^n$ esetén az i-edik szám az i-edik koordináta/komponens. Jelölése v_i ($v_i \in \mathbb{R}$).

• $v \in \mathbb{R}^n$ leírása esetén a koordinátákat felsoroljuk és a kapott számokat zárójelbe rakjuk.

• A koordináták egymásutáni leírása történhet egymás mellé, vagy egymás alá. Az első esetben **sorvektorról**, a második esetben **oszlopvektorról** beszélünk.

Vektorok

- $\mathbb{R}^n$ a valós szám n-esek/VEKTOROK halmaza. $v \in \mathbb{R}^n$ esetén az i-edik szám az i-edik koordináta/komponens. Jelölése v_i ($v_i \in \mathbb{R}$).
- $v \in \mathbb{R}^n$ leírása esetén a koordinátákat felsoroljuk és a kapott számokat zárójelbe rakjuk.
- A koordináták egymásutáni leírása történhet egymás mellé, vagy egymás alá. Az első esetben **sorvektorról**, a második esetben **oszlopvektorról** beszélünk.

Példa

$$(1,0,2,4,-2),\ \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ (11,0,3,-2),\ \begin{pmatrix}2\\2\\0\\11\end{pmatrix},\ (0,2,3,2),\ \begin{pmatrix}53\\22\\-2\\10\\32\end{pmatrix}.$$

Vektorok (folytatás)

Vektorok (folytatás)

- $v \in \mathbb{R}^d$ esetén azt mondjuk, hogy v egy d-dimenziós vektor.

Vektorok (folytatás)

- $v \in \mathbb{R}^d$ esetén azt mondjuk, hogy v egy d-dimenziós vektor.

- $0 \in \mathbb{R}^n$ az n dimenziós nullvektor, azaz az a vektor, amelynek mind az n koordinátája 0.

Vektorok (folytatás)

- $v \in \mathbb{R}^d$ esetén azt mondjuk, hogy v egy d-dimenziós vektor.
- $0 \in \mathbb{R}^n$ az n dimenziós nullvektor, azaz az a vektor, amelynek mind az n koordinátája 0.
- Ebben a kurzusban — ha másképp nem hangsúlyozzuk — minden vetor OSZLOPVEKTOR lesz.

Vektorok (folytatás)

- $v \in \mathbb{R}^d$ esetén azt mondjuk, hogy v egy d-dimenziós vektor.
- $0 \in \mathbb{R}^n$ az n dimenziós nullvektor, azaz az a vektor, amelynek mind az n koordinátája 0.
- Ebben a kurzusban — ha másképp nem hangsúlyozzuk — minden vetor OSZLOPVEKTOR lesz.

Példa

$0 \in \mathbb{R}^5$ esetén a vektor, amiről beszélünk

Vektorok (folytatás)

- $v \in \mathbb{R}^d$ esetén azt mondjuk, hogy v egy d-dimenziós vektor.
- $0 \in \mathbb{R}^n$ az n dimenziós nullvektor, azaz az a vektor, amelynek mind az n koordinátája 0.
- Ebben a kurzusban — ha másképp nem hangsúlyozzuk — minden vetor OSZLOPVEKTOR lesz.

Példa

$0 \in \mathbb{R}^5$ esetén a vektor, amiről beszélünk
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mátrixok

Mátrixok

- $\mathbb{R}^{n\times m}$ a valós, $n \times m$ méretű számtáblázatok/MÁTRIXOK halmaza. Az $n \times m$ méretű táblázat n sorból, m oszlopból áll.

Mátrixok

- $\mathbb{R}^{n \times m}$ a valós, $n \times m$ méretű számtáblázatok/MÁTRIXOK halmaza. Az $n \times m$ méretű táblázat n sorból, m oszlopból áll.
- Egy $v \in \mathbb{R}^n$ vektor felfogható egy $1 \times n$-es mátrixnak, sorvektornak, illetve egy $n \times 1$-es mátrixnak, oszlopvektornak.

Terminológia

Terminológia

- Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ felfogható m oszlopvektor összességének:

$$M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \dots & o_m \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

ahol $o_i \in \mathbb{R}^n$.

Terminológia

- Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ felfogható m oszlopvektor összességének:

$$M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \dots & o_m \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

ahol $o_i \in \mathbb{R}^n$.

- Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ felfogható n sorvektor összességének:

$$M = \begin{pmatrix} \text{---} & s_1^T & \text{---} \\ \text{---} & s_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & s_n^T & \text{---} \end{pmatrix}$$

ahol $s_i \in \mathbb{R}^m$.

Mátrixok szorzása

Mátrixok szorzása

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két mátrix

Mátrixok szorzása

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ két mátrix

(o) Ez a két mátrix akkor és csak akkor szorozható össze, ha $k = \ell$.

Mátrixok szorzása

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két mátrix

(o) Ez a két mátrix akkor és csak akkor szorozható össze, ha $k = \ell$.

(i) Ekkor a szorzat mátrix $n \times m$ méretű lesz, azaz $AB \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Mátrixok szorzása

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két mátrix

(o) Ez a két mátrix akkor és csak akkor szorozható össze, ha $k = \ell$.

(i) Ekkor a szorzat mátrix $n \times m$ méretű lesz, azaz $AB \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

(ii) Továbbá az i-edik sor j-edik eleme

$$(AB)_{i,j} = \sum_{s=1}^{\ell} A_{i,s}B_{s,j}.$$

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két métrix, amelyek összeszorozhatók.

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két métrix, amelyek összeszorozhatók. Az első tényezőt bontsuk sorokra: $s_i \in \mathbb{R}^{\ell}$,

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két métrix, amelyek összeszorozhatók. Az első tényezőt bontsuk sorokra: $s_i \in \mathbb{R}^{\ell}$, a második tényezőt bontsuk oszkopokra: $o_i \in \mathbb{R}^{\ell}$.

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két métrix, amelyek összeszorozhatók. Az első tényezőt bontsuk sorokra: $s_i \in \mathbb{R}^\ell$, a második tényezőt bontsuk oszkopokra: $o_i \in \mathbb{R}^\ell$.

$$A = \begin{pmatrix} — & s_1^T & — \\ — & s_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & s_n^T & — \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \dots & o_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két métrix, amelyek összeszorozhatók. Az első tényezőt bontsuk sorokra: $s_i \in \mathbb{R}^{\ell}$, a második tényezőt bontsuk oszkopokra: $o_i \in \mathbb{R}^{\ell}$.

$$A = \begin{pmatrix} — & s_1^T & — \\ — & s_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & s_n^T & — \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \dots & o_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

- Ekkor $(AB)_{i,j} = s_i^T o_j$, azaz a szorzatmátrixban az i-edik sor j-edik elemét úgy kapjuk meg, ha az A mátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a B mátrix j-edik oszlopával.

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két métrix, amelyek összeszorozhatók. Az első tényezőt bontsuk sorokra: $s_i \in \mathbb{R}^{\ell}$, a második tényezőt bontsuk oszkopokra: $o_i \in \mathbb{R}^{\ell}$.

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} & s_1^T & \text{---} \\ \text{---} & s_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & s_n^T & \text{---} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \dots & o_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

- Ekkor $(AB)_{i,j} = s_i^T o_j$, azaz a szorzatmátrixban az i-edik sor j-edik elemét úgy kapjuk meg, ha az A mátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a B mátrix j-edik oszlopával.

- A szorzatmátrix egy szorzótábla a két tényezőből nyert vektorrendszerekre a skalárszorzatra nézve.

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet

- Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindktettőt sorvektorokra.

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet

- Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindktettőt sorvektorokra. A esetében ezek legyenek $\alpha^T, \beta^T, \ldots$, míg B esetén legyenek $s_i \in \mathbb{R}^m$:

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet

• Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindktettőt sorvektorokra. A esetében ezek legyenek $\alpha^T, \beta^T, \ldots$, míg B esetén legyenek $s_i \in \mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_\ell \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\ell \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_\ell \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \text{---} & s_1^T & \text{---} \\ \text{---} & s_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & s_\ell^T & \text{---} \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet

- Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindktettőt sorvektorokra. A esetében ezek legyenek $\alpha^T, \beta^T, \ldots$, míg B esetén legyenek $s_i \in \mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_\ell \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\ell \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_\ell \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \text{---} & s_1^T & \text{---} \\ \text{---} & s_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & s_\ell^T & \text{---} \end{pmatrix}$$

- Kezdjük el a definíció szerinti mátrixszorzást:

$$(AB)_{1,1} = \alpha_1(s_1^T)_1 + \alpha_2(s_2^T)_1 + \ldots + \alpha_k(s_k^T)_1$$
$$(AB)_{1,2} = \alpha_1(s_1^T)_2 + \alpha_2(s_2^T)_2 + \ldots + \alpha_k(s_k^T)_2$$
$$\vdots$$
$$(AB)_{1,\ell} = \alpha_1(s_1^T)_\ell + \alpha_2(s_2^T)_\ell + \ldots + \alpha_k(s_k^T)_\ell$$

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet (folytatás)

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet (folytatás)

- Azaz a szorzatmátrix első sora

$$\alpha_1 s_1^T + \ldots + \alpha_k s_k^T.$$

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet (folytatás)

- Azaz a szorzatmátrix első sora

$$\alpha_1 s_1^T + \ldots + \alpha_k s_k^T.$$

- Összegezve

$$AB = \begin{pmatrix} — & \alpha_1 s_1^T + \ldots + \alpha_k s_k^T & — \\ — & \beta_1 s_1^T + \ldots + \beta_k s_k^T & — \\ & \vdots & \\ — & \omega_1 s_1^T + \ldots + \omega_k s_k^T & — \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet (folytatás)

- Azaz a szorzatmátrix első sora

$$\alpha_1 s_1^T + \ldots + \alpha_k s_k^T.$$

- Összegezve

$$AB = \begin{pmatrix} — & \alpha_1 s_1^T + \ldots + \alpha_k s_k^T & — \\ — & \beta_1 s_1^T + \ldots + \beta_k s_k^T & — \\ & \vdots & \\ — & \omega_1 s_1^T + \ldots + \omega_k s_k^T & — \end{pmatrix}$$

- Speciálisan a szorzat mátrix mindegyik sora az $s_1^T, \ldots, s_k^T$ vektorok (a második tényezőmátrix sorainak) egy-egy lineáris kombinációja.

Mátrixok szorzása: III. alternatív szemlélet

Mátrixok szorzása: III. alternatív szemlélet

- Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindkettőt oszlopvektorokra.

Mátrixok szorzása: III. alternatív szemlélet

- Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindkettőt oszlopvektorokra. A esetében ezek legyenek $o_i \in \mathbb{R}^n$, míg B esetén legyenek $\alpha^T, \beta^T, \ldots$:

Mátrixok szorzása: III. alternatív szemlélet

- Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindkettőt oszlopvektorokra. A esetében ezek legyenek $o_i \in \mathbb{R}^n$, míg B esetén legyenek $\alpha^T, \beta^T, \ldots$:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \ldots & o_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \omega_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \ldots & \omega_k \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása: III. alternatív szemlélet (folytatás)

Az előzőekhez hasonlóan a szorzat mátrix

$$AB = \begin{pmatrix} \Big| & & \Big| & & \Big| \\ \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \ldots + \alpha_k o_k & \beta_1 o_1 + \beta_2 o_2 + \ldots + \beta_k o_k & \ldots & \omega_1 o_1 + \omega_2 o_2 + \ldots + \omega_k o_k \\ \Big| & & \Big| & & \Big| \end{pmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek mátrixa

Lineáris egyenletrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.

Lineáris egyenletrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & = b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

Lineáris egyenletrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & = b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- Az egyenletrendszer A mátrixa: Az A mátrix/számtáblázat i-edik sorának és j-edik oszlopának találkozásában álló elem az i-edik egyenletben a j-edik változó együtthatója.

Lineáris egyenletrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & = b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- Az egyenletrendszer A mátrixa: Az A mátrix/számtáblázat i-edik sorának és j-edik oszlopának találkozásában álló elem az i-edik egyenletben a j-edik változó együtthatója. Azaz $A_{i,j} = a_{i,j}$.

Lineáris egyenletrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & = b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- Az egyenletrendszer A mátrixa: Az A mátrix/számtáblázat i-edik sorának és j-edik oszlopának találkozásában álló elem az i-edik egyenletben a j-edik változó együtthatója. Azaz $A_{i,j} = a_{i,j}$.
- Megjegyezzük, hogy a mátrix írásmódhoz szükséges az egyenletek/feltételek, illetve változók rendezése/sorbaállítása.

Lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja

Lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja

- Vektor/mátrix írásmódban egyenletünk: Legyen adott $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ $k \times n$ méretű valós mátrix és $b \in \mathbb{R}^k$

$$Ax = b, \text{ ahol } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Az egyenletek/változók sorrendjéről

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.
- Egy alternatív lehetőség a következő:

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.

- Egy alternatív lehetőség a következő: Legyen $\mathcal{E}$ az egyenletek halmaza, $\mathcal{X}$ a változók halmaza. Az A mátrix egy $\mathcal{E} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény.

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.
- Egy alternatív lehetőség a következő: Legyen $\mathcal{E}$ az egyenletek halmaza, $\mathcal{X}$ a változók halmaza. Az A mátrix egy $\mathcal{E} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény.
- $e \in \mathcal{E}$ és $x \in \mathcal{X}$ ($|E| = k$, $|X| = n$) esetén $A(e, x)$ az x változó együtthatója az e egyenletben.

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.

- Egy alternatív lehetőség a következő: Legyen $\mathcal{E}$ az egyenletek halmaza, $\mathcal{X}$ a változók halmaza. Az A mátrix egy $\mathcal{E} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény.

- $e \in \mathcal{E}$ és $x \in \mathcal{X}$ ($|E| = k$, $|X| = n$) esetén $A(e, x)$ az x változó együtthatója az e egyenletben.

- Az $E \times X \to \mathbb{R}$ függvények halmazára egy szokásos jelölés $\mathbb{R}^{E \times X}$.

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.

- Egy alternatív lehetőség a következő: Legyen $\mathcal{E}$ az egyenletek halmaza, $\mathcal{X}$ a változók halmaza. Az A mátrix egy $\mathcal{E} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény.

- $e \in \mathcal{E}$ és $x \in \mathcal{X}$ ($|E| = k$, $|X| = n$) esetén $A(e, x)$ az x változó együtthatója az e egyenletben.

- Az $E \times X \to \mathbb{R}$ függvények halmazára egy szokásos jelölés $\mathbb{R}^{E\times X}$. Ezzel a terminológiával az egyenletrendszer mátrixa $A \in \mathbb{R}^{E\times X}$.

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.
- Egy alternatív lehetőség a következő: Legyen $\mathcal{E}$ az egyenletek halmaza, $\mathcal{X}$ a változók halmaza. Az A mátrix egy $\mathcal{E} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény.
- $e \in \mathcal{E}$ és $x \in \mathcal{X}$ ($|E| = k$, $|X| = n$) esetén $A(e, x)$ az x változó együtthatója az e egyenletben.
- Az $E \times X \to \mathbb{R}$ függvények halmazára egy szokásos jelölés $\mathbb{R}^{E \times X}$. Ezzel a terminológiával az egyenletrendszer mátrixa $A \in \mathbb{R}^{E \times X}$.
- k darab lineáris egyenlet/feltétel és n változó esetén

$$\mathbb{R}^{\mathcal{E} \times \mathcal{X}} \simeq \mathbb{R}^{k \times n}.$$

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq b_2 \\ & \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- A bal oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- A bal oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva. Ahogy egyenletrendszereknél, ezek az együtthatók egy $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrixba foglalhatók össze.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- A bal oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva. Ahogy egyenletrendszereknél, ezek az együtthatók egy $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixba foglalhatók össze.
- A jobb oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq b_2 \\ & \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- A bal oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva. Ahogy egyenletrendszereknél, ezek az együtthatók egy $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrixba foglalhatók össze.
- A jobb oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva. Ahogy egyenletrendszereknél, ezek a konstansok egy $b \in \mathbb{R}^k$ oszlopvektorba foglalhatók össze.

Vektorok, részbenrendezések

Vektorok, részbenrendezések

- Rendezett halmazok esetén nem definiáltuk a direkt szorzatot. Miért?

Vektorok, részbenrendezések

- Rendezett halmazok esetén nem definiáltuk a direkt szorzatot. Miért?

- Részbenrendezett halmazok esetén definiáltuk a direkt szorzatot. Hogyan?

Vektorok, részbenrendezések

- Rendezett halmazok esetén nem definiáltuk a direkt szorzatot. Miért?

- Részbenrendezett halmazok esetén definiáltuk a direkt szorzatot. Hogyan?

Definíció

$(\mathbb{R}^d, \preceq)$ egy részbenrendezés $\mathbb{R}^d$-n, a következő módon:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 \leq y_1$ és $x_1 \leq y_1$ és … és $x_d \leq y_d$.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrix alakja

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrix alakja

- Vektor/mátrix írásmódban egyenlőtlenségrendszerünk: Legyen adott $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ $k \times n$ méretű valós mátrix és $b \in \mathbb{R}^k$

$$Ax \preceq b, \text{ ahol } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Szünet

Formális következtetések/levezetések

Formális következtetések/levezetések

- Adott egyenletek, egyenlőtlenségek esetén megtanultuk, hogyan lehet következtetni, levezetni új összefüggéseket.

Formális következtetések/levezetések

- Adott egyenletek, egyenlőtlenségek esetén megtanultuk, hogyan lehet következtetni, levezetni új összefüggéseket.

- Először összefoglalunk néhány dolgot, amik tárgyalása már általános iskolában elkezdődtek, de számunkra alapvetőek lesznek a későbbiekben.

Mérlegelv

Mérlegelv

Mérlegelv

Egyenlet vagy egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt adva az egyenlet vagy egyenlőtlenség igaz marad.

Mérlegelv

Mérlegelv

Egyenlet vagy egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt adva az egyenlet vagy egyenlőtlenség igaz marad.

- Sőt, ha a hozzáadás után ugyanazt levonjuk (hozzáadjuk az eredeti -1-szeresét), akkor visszajutunk a kiinduló összefüggéshez.

Mérlegelv

Mérlegelv

Egyenlet vagy egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt adva az egyenlet vagy egyenlőtlenség igaz marad.

- Sőt, ha a hozzáadás után ugyanazt levonjuk (hozzáadjuk az eredeti -1-szeresét), akkor visszajutunk a kiinduló összefüggéshez.
- Azaz az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatunk egy tetszőleges s számot vagy kifejezést. Így egy az eredetivel ekvivalens összefüggést kapunk:

$$a^T x = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad a^T x + \mathbf{s} = \alpha + \mathbf{s}$$

Mérlegelv

Mérlegelv

Egyenlet vagy egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt adva az egyenlet vagy egyenlőtlenség igaz marad.

• Sőt, ha a hozzáadás után ugyanazt levonjuk (hozzáadjuk az eredeti -1-szeresét), akkor visszajutunk a kiinduló összefüggéshez.

• Azaz az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatunk egy tetszőleges s számot vagy kifejezést. Így egy az eredetivel ekvivalens összefüggést kapunk:

$$a^T x = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad a^T x + \mathbf{s} = \alpha + \mathbf{s}$$

• Azaz az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadunk egy tetszőleges s számot vagy kifejezést. Így egy az eredetivel ekvivalens összefüggést kapunk:

$$a^T x \leq \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad a^T x + \mathbf{s} \leq \alpha + \mathbf{s}$$

Összegzési elv

Összegzési elv

Összegzési elv

Adott két egyenlet. Az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket összegezve a jobb oldalon álló kifejezések összegét kapjuk.

Összegzési elv

Összegzési elv

Adott két egyenlet. Az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket összegezve a jobb oldalon álló kifejezések összegét kapjuk.

Hasonlóan járhatunk el két egyenlőtlenségnél, amennyiben a relációk azonos irányban állnak

Összegzési elv

Összegzési elv

Adott két egyenlet. Az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket összegezve a jobb oldalon álló kifejezések összegét kapjuk.

Hasonlóan járhatunk el két egyenlőtlenségnél, amennyiben a relációk azonos irányban állnak

Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x = \alpha + \beta.$$

Összegzési elv

Összegzési elv

Adott két egyenlet. Az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket összegezve a jobb oldalon álló kifejezések összegét kapjuk.

Hasonlóan járhatunk el két egyenlőtlenségnél, amennyiben a relációk azonos irányban állnak

Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x = \alpha + \beta.$$

Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x \leq \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x \leq \alpha + \beta.$$

Összegzési elv: más formalizmus

Összegzési elv: más formalizmus

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \quad \text{más írásmódban} \begin{pmatrix} \text{---} & a^T & \text{---} \\ \text{---} & b^T & \text{---} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ azaz}$$

$$Ax = b, \text{ ahol } A \in \mathbb{R}^{2\times n},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}^2,$$

Összegzési elv: más formalizmus

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \quad \text{más írásmódban} \begin{pmatrix} — & a^T & — \\ — & b^T & — \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ azaz}$$

$$Ax = b, \text{ ahol } A \in \mathbb{R}^{2\times n},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}^2,$$

- Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban, ahol $A \in \mathbb{R}^{2\times n}$, $b \in \mathbb{R}^2$:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} b.$$

Összegzési elv: más formalizmus

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \quad \text{más írásmódban} \quad \begin{pmatrix} \text{---} & a^T & \text{---} \\ \text{---} & b^T & \text{---} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ azaz}$$

$$Ax = b, \text{ ahol } A \in \mathbb{R}^{2\times n},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}^2,$$

- Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban, ahol $A \in \mathbb{R}^{2\times n}$, $b \in \mathbb{R}^2$:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} b.$$

- Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban, ahol $A \in \mathbb{R}^{2\times n}$, $b \in \mathbb{R}^2$:

$$Ax \preceq b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} Ax \preceq \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} b.$$

Összegzési elv: Finomságok

Összegzési elv: Finomságok

- Természetesen két egyenlet összegzése után látott egyenletben nem látjuk az összadandókat.

Összegzési elv: Finomságok

- Természetesen két egyenlet összegzése után látott egyenletben nem látjuk az összadandókat. A korábbi következtetések nem fordíthatók meg.

Összegzési elv: Finomságok

- Természetesen két egyenlet összegzése után látott egyenletben nem látjuk az összadandókat. A korábbi következtetések nem fordíthatók meg.

- Egyenlőségek esetén ügyesen dolgozva állíthatunk ekvivalenciát is:

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x = \alpha \\ (a+b)^T x = \alpha + \beta \end{cases} .$$

Miért?

Összegzési elv: Finomságok

- Természetesen két egyenlet összegzése után látott egyenletben nem látjuk az összadandókat. A korábbi következtetések nem fordíthatók meg.

- Egyenlőségek esetén ügyesen dolgozva állíthatunk ekvivalenciát is:

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x = \alpha \\ (a+b)^T x = \alpha + \beta \end{cases}.$$

Miért?

- Egyenlőtlenségek esetén most nem mondunk semmit.

Összegzési elv: Finomságok

- Természetesen két egyenlet összegzése után látott egyenletben nem látjuk az összadandókat. A korábbi következtetések nem fordíthatók meg.

- Egyenlőségek esetén ügyesen dolgozva állíthatunk ekvivalenciát is:

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x = \alpha \\ (a+b)^T x = \alpha + \beta \end{cases}.$$

Miért?

- Egyenlőtlenségek esetén most nem mondunk semmit. Miért?

Szorzási elv

Szorzási elv

Szorzási elv

Adott egy egyenlet. Az egyenletet tetszőleges számmal megszorozhatjuk.

Szorzási elv

Szorzási elv

Adott egy egyenlet. Az egyenletet tetszőleges számmal megszorozhatjuk.

Adott egy egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenséget tetszőleges NEM-NEGATÍV számmal megszorozhatjuk.

Szorzási elv

Szorzási elv

Adott egy egyenlet. Az egyenletet tetszőleges számmal megszorozhatjuk.

Adott egy egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenséget tetszőleges NEM-NEGATÍV számmal megszorozhatjuk.

Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$a^T x = \alpha \Rightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

Szorzási elv

Szorzási elv

Adott egy egyenlet. Az egyenletet tetszőleges számmal megszorozhatjuk.

Adott egy egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenséget tetszőleges NEM-NEGATÍV számmal megszorozhatjuk.

Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$a^T x = \alpha \Rightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$a^T x \leq \alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

Szorzási elv: Ekvivalencia

Szorzási elv: Ekvivalencia

- Mindkét esetben megengedtük a $\lambda = 0$ esetet. Persze a következtetett $0 = 0$, illetve $0 \leq 0$ összefüggések logikailag helyesek.

Szorzási elv: Ekvivalencia

- Mindkét esetben megengedtük a $\lambda = 0$ esetet. Persze a következtetett $0 = 0$, illetve $0 \leq 0$ összefüggések logikailag helyesek. A kiinduló információ elveszett.

Szorzási elv: Ekvivalencia

- Mindkét esetben megengedtük a $\lambda = 0$ esetet. Persze a következtetett $0 = 0$, illetve $0 \leq 0$ összefüggések logikailag helyesek. A kiinduló információ elveszett.

- Egyenlőségeknél, ha $\lambda \neq 0$, illetve egyenlőtlenségeknél, ha $\lambda > 0$, akkor az $\frac{1}{\lambda}$-gyel való szorzás „visszafelé fordítja” a következtetést.

Szorzási elv: Ekvivalencia

- Mindkét esetben megengedtük a $\lambda = 0$ esetet. Persze a következtetett $0 = 0$, illetve $0 \leq 0$ összefüggések logikailag helyesek. A kiinduló információ elveszett.
- Egyenlőségeknél, ha $\lambda \neq 0$, illetve egyenlőtlenségeknél, ha $\lambda > 0$, akkor az $\frac{1}{\lambda}$-gyel való szorzás „visszafelé fordítja" a következtetést.
- Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban HA $\lambda \neq 0$:

$$a^T x = \alpha \Leftrightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

Szorzási elv: Ekvivalencia

- Mindkét esetben megengedtük a $\lambda = 0$ esetet. Persze a következtetett $0 = 0$, illetve $0 \leq 0$ összefüggések logikailag helyesek. A kiinduló információ elveszett.
- Egyenlőségeknél, ha $\lambda \neq 0$, illetve egyenlőtlenségeknél, ha $\lambda > 0$, akkor az $\frac{1}{\lambda}$-gyel való szorzás „visszafelé fordítja" a következtetést.
- Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban HA $\lambda \neq 0$:

$$a^T x = \alpha \Leftrightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

- Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban HA $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$:

$$a^T x \leq \alpha \Leftrightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

A következtetési szabályok teljes kihasználása

A következtetési szabályok teljes kihasználása

- Eddig egy vagy kettő egyenletből/egyenlőtlenségből vontunk le egy következtetést.

A következtetési szabályok teljes kihasználása

- Eddig egy vagy kettő egyenletből/egyenlőtlenségből vontunk le egy következtetést. Természetesen ennyivel nem érjük be: Egy egyenletrendszerből/egyenlőtlenségrendszerből indulunk ki és a logikai következtetéseinket a levezetett összefüggésekre iterálva alkalmazzuk.

A következtetési szabályok teljes kihasználása

- Eddig egy vagy kettő egyenletből/egyenlőtlenségből vontunk le egy következtetést. Természetesen ennyivel nem érjük be: Egy egyenletrendszerből/egyenlőtlenségrendszerből indulunk ki és a logikai következtetéseinket a levezetett összefüggésekre iterálva alkalmazzuk.

- Ha egy $Ax = b$ egyenlőtlenségrendszerből levezethető a $c^T x = d$ egyenlőtlenség, akkor azt írjuk hogy

$$Ax = b \qquad \vdash \qquad c^T x = d.$$

A következtetési szabályok teljes kihasználása

- Eddig egy vagy kettő egyenletből/egyenlőtlenségből vontunk le egy következtetést. Természetesen ennyivel nem érjük be: Egy egyenletrendszerből/egyenlőtlenségrendszerből indulunk ki és a logikai következtetéseinket a levezetett összefüggésekre iterálva alkalmazzuk.

- Ha egy $Ax = b$ egyenlőtlenségrendszerből levezethető a $c^T x = d$ egyenlőtlenség, akkor azt írjuk hogy

$$Ax = b \qquad \vdash \qquad c^T x = d.$$

- Ha egy $Ax \preceq b$ egyenlőtlenségrendszerből levezethető a $c^T x \leq d$ egyenlőtlenség, akkor azt írjuk hogy

$$Ax \preceq b \qquad \vdash \qquad c^T x \leq d.$$

Egy fontos jelölés

A formális definíciót csak egyenlőtlenségek esetére mondjuk ki.

Egy fontos jelölés

A formális definíciót csak egyenlőtlenségek esetére mondjuk ki.

Definíció: Levezetés

$Ax \preceq b \vdash c^T x \leq d$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $\{c_i^T x \leq d_i\}_{i=1}^{\ell}$ egyenlőtlenségsorozat

$$c_1^T x \leq d_1, c_2^T x \leq d_2, c_3^T x \leq d_3, \ldots, c_\ell^T x \leq d_\ell,$$

amelyben minden elem

- vagy a kiinduló egyenlőtlenségrendszer egy eleme,
- vagy korábbi kettő összege,
- vagy egy korábbi nem-negatív számszorosa,

továbbá az utolsó egyenlőtlenség a levezetendő.

Példa

Példa

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} & a_1^T & \text{---} \\ \text{---} & a_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_k^T & \text{---} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Példa

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} & a_1^T & \text{---} \\ \text{---} & a_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_k^T & \text{---} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

A kiinduló egyenlőtlenségrendszer mátrix jelöléssel az alábbi: $Ax \preceq b$.

Példa

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} — & a_1^T & — \\ — & a_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_k^T & — \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

A kiinduló egyenlőtlenségrendszer mátrix jelöléssel az alábbi:
$Ax \preceq b$.
Klasszikusan, vagy vektor jelöléssel:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_n \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1^T x \le b_1 \\ a_2^T x \le b_2 \\ \vdots \\ a_k^T x \le b_k \end{cases}.$$

Példa (folytatás)

Példa (folytatás)

Az i-edik egyenlőtlenséget szorozzuk egy-egy $p_i \geq 0$ számmal:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 && / \cdot p_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 && / \cdot p_2 \\
&\vdots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &\leq b_k && / \cdot p_k
\end{aligned}$$

Példa (folytatás)

Az i-edik egyenlőtlenséget szorozzuk egy-egy $p_i \geq 0$ számmal:

$$\begin{array}{cr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 & / \cdot p_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 & / \cdot p_2 \\ \vdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k & / \cdot p_k \end{array}$$

Majd az így kapott egyenlőtlenségeket adjuk össze

$$\begin{array}{l} (p_1 a_{11} + \cdots + p_k a_{k1})x_1 \\ +(p_1 a_{12} + \cdots + p_k a_{k2})x_2 \\ \vdots \\ +(p_1 a_{1n} + \cdots + p_k a_{kn})x_n \leq p_1 b_1 + \cdots + p_k b_k \end{array}$$

Példa (folytatás)

Példa (folytatás)

Azaz $Ax \preceq b$-nek következménye

$$p^T Ax = (p^T A)x \leq p^T b,$$

ahol

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \quad \text{és} \quad p \succeq 0 \in \mathbb{R}^k.$$

Példa (folytatás)

Azaz $Ax \preceq b$-nek következménye

$$p^T Ax = (p^T A)x \leq p^T b,$$

ahol

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \quad \text{és} \quad p \succeq 0 \in \mathbb{R}^k.$$

Észrevétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}, b \in \mathbb{R}^k, 0 \preceq p \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad p^T Ax \preceq p^T b.$$

Példa (folytatás)

Azaz $Ax \preceq b$-nek következménye

$$p^T Ax = (p^T A)x \leq p^T b,$$

ahol

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \quad \text{és} \quad p \succeq 0 \in \mathbb{R}^k.$$

Észrevétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k, 0 \preceq p \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad p^T Ax \preceq p^T b.$$

Észrevétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k, p \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$Ax = b \quad \vdash \quad p^T Ax = p^T b.$$

A fenti példák univerzálisak

A fenti példák univerzálisak

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d.$$

A fenti példák univerzálisak

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d.$$

Ekkor alkalmas $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

A fenti példák univerzálisak

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d.$$

Ekkor alkalmas $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax = b \quad \vdash \quad c^T x = d.$$

A fenti példák univerzálisak

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d.$$

Ekkor alkalmas $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax = b \quad \vdash \quad c^T x = d.$$

Ekkor alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

Univerzalitás: Bizonyítás

Univerzalitás: Bizonyítás

- Csak az egyenlőtlenség esetét igazoljuk.

Univerzalitás: Bizonyítás

- Csak az egyenlőtlenség esetét igazoljuk.
- Az

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d$$

feltétel „mögött" egy

$$c_1^T x \leq d_1, \quad c_2^T x \leq d_2, \quad c_3^T x \leq d_3, \quad \ldots, \quad c_\ell^T x \leq d_\ell$$

egyenlőtlenségsorozat áll.

Univerzalitás: Bizonyítás

- Csak az egyenlőtlenség esetét igazoljuk.
- Az

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d$$

feltétel „mögött” egy

$$c_1^T x \leq d_1, \quad c_2^T x \leq d_2, \quad c_3^T x \leq d_3, \quad \ldots, \quad c_\ell^T x \leq d_\ell$$

egyenlőtlenségsorozat áll.

- Belátjuk, hogy minden $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ esetén alkalmas $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^k$-ra

$$c_i^T = \lambda_i^T A, \quad d = \lambda_i^T b.$$

Univerzalitás: Bizonyítás

- Csak az egyenlőtlenség esetét igazoljuk.
- Az
$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d$$
feltétel „mögött” egy
$$c_1^T x \leq d_1, \quad c_2^T x \leq d_2, \quad c_3^T x \leq d_3, \quad \ldots, \quad c_\ell^T x \leq d_\ell$$
egyenlőtlenségsorozat áll.
- Belátjuk, hogy minden $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ esetén alkalmas $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^k$-ra
$$c_i^T = \lambda_i^T A, \quad d = \lambda_i^T b.$$
- Teljes indukcióval bizonyítunk.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott. Természetesen könnyen kiterjeszthető szigorú egyenlőtlenségek kezelésére is.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott. Természetesen könnyen kiterjeszthető szigorú egyenlőtlenségek kezelésére is. Az alábbiakban vázoljuk a „vegyes” rendszerek alapjait.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott. Természetesen könnyen kiterjeszthető szigorú egyenlőtlenségek kezelésére is. Az alábbiakban vázoljuk a „vegyes" rendszerek alapjait.

- A szigorú egyenlőtlenségek standard formája (mérleg-elv) a következő:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n < \beta, \qquad \alpha^T x < \beta.$$

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott. Természetesen könnyen kiterjeszthető szigorú egyenlőtlenségek kezelésére is. Az alábbiakban vázoljuk a „vegyes" rendszerek alapjait.

- A szigorú egyenlőtlenségek standard formája (mérleg-elv) a következő:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n < \beta, \qquad \alpha^T x < \beta.$$

Fontos különbség

Szigorú egyenlőtlenségek esetén szorzási-elv CSAK pozitív számra engedett!

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott. Természetesen könnyen kiterjeszthető szigorú egyenlőtlenségek kezelésére is. Az alábbiakban vázoljuk a „vegyes” rendszerek alapjait.

- A szigorú egyenlőtlenségek standard formája (mérleg-elv) a következő:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n < \beta, \qquad \alpha^T x < \beta.$$

Fontos különbség

Szigorú egyenlőtlenségek esetén szorzási-elv CSAK pozitív számra engedett! Amikor is az átalakítás ekvivalencia.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott. Természetesen könnyen kiterjeszthető szigorú egyenlőtlenségek kezelésére is. Az alábbiakban vázoljuk a „vegyes” rendszerek alapjait.

- A szigorú egyenlőtlenségek standard formája (mérleg-elv) a következő:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n < \beta, \qquad \alpha^T x < \beta.$$

Fontos különbség

Szigorú egyenlőtlenségek esetén szorzási-elv CSAK pozitív számra engedett! Amikor is az átalakítás ekvivalencia. Azaz a fordított irányú következtetés is korrekt.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Összeadási elv

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Összeadási elv

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x \leq \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x \leq \alpha + \beta.$$

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Összeadási elv

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x \leq \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x \leq \alpha + \beta.$$

$$\begin{cases} a^T x < \alpha \\ b^T x < \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x < \alpha + \beta.$$

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Összeadási elv

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x \leq \beta \end{cases} \quad \Rightarrow (a+b)^T x \leq \alpha + \beta.$$

$$\begin{cases} a^T x < \alpha \\ b^T x < \beta \end{cases} \quad \Rightarrow (a+b)^T x < \alpha + \beta.$$

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x < \beta \end{cases} \quad \Rightarrow (a+b)^T x < \alpha + \beta.$$

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Levezetés

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Levezetés

Definíció: Levezetés

$$\begin{cases} Ax & \leq b \\ A'x & < b' \end{cases} \quad \vdash_{+} \quad c^T x \leq d \quad / \quad c^T x < d$$

akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan egyenlőtlenségsorozat

$$c_1^T x \rho_1 d_1, \quad c_2^T x \rho_2 d_2, \quad c_3^T x \rho_3 d_3, \quad \ldots, \quad c_\ell^T x \rho_\ell d_\ell,$$

ahol $\rho_i \in \{\leq, <\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ és amely sorozatban minden elem

- vagy a kiinduló egyenlőtlenségrendszer egy eleme,
- vagy korábbi kettő összege,
- vagy egy korábbiból kapott a szorzási-elv alkalmazásával,
- vagy $0^T x = 0 < 1$ axióma,

továbbá az utolsó egyenlőtlenség a levezetendő.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Univerzalitás

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Univerzalitás

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $A' \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$, $b' \in \mathbb{R}^\ell$.

(1)

$$\begin{cases} Ax & \preceq b \\ A'x & \prec b' \end{cases} \quad \models_{+} \quad c^T x \leq d$$

pontosan akkor teljesül, ha $Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d$, azaz alkalmas $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

(2)

$$\begin{cases} Ax & \preceq b \\ A'x & \prec b' \end{cases} \quad \models_{+} \quad c^T x < d$$

pontosan akkor teljesül, ha alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}^k_+$ és $\mu \in \mathbb{R}^\ell_+ - \{0\}$ vektorokra

$$c^T = \lambda^T A + \mu^T A', \quad d = \lambda^T b + \mu^T b'.$$

Megoldáshalmazok: A geometriai szemlélet

Megoldáshalmazok: A geometriai szemlélet

Amit eddig csináltunk az formális okoskodás, következtetés.

Megoldáshalmazok: A geometriai szemlélet

Amit eddig csináltunk az formális okoskodás, következtetés. Az egyenlőtlenségek/egyenlőségek csak számokból és betűkből összeállított sorozatok voltak és formálisan újabbakat írtunk fel mint kikövetkeztetettek.

Megoldáshalmazok: A geometriai szemlélet

Amit eddig csináltunk az formális okoskodás, következtetés. Az egyenlőtlenségek/egyenlőségek csak számokból és betűkből összeállított sorozatok voltak és formálisan újabbakat írtunk fel mint kikövetkeztetettek. Most szemléletet váltunk.

Megoldáshalmazok: A geometriai szemlélet

Amit eddig csináltunk az formális okoskodás, következtetés. Az egyenlőtlenségek/egyenlőségek csak számokból és betűkből összeállított sorozatok voltak és formálisan újabbakat írtunk fel mint kikövetkeztetettek. Most szemléletet váltunk.

Definíció

Legyen $\mathcal{E} : Ax \preceq b$ egy egyenlőtlenségrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$M(\mathcal{E}) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \preceq b\},$$

az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.

A következmény fogalma

A következmény fogalma

Definíció

Legyen $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ két egyenlőtlenségrendszer. Ha

$$M(\mathcal{E}) \subset M(\mathcal{E}'),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye.

A következmény fogalma

Definíció

Legyen $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ két egyenlőtlenségrendszer. Ha

$$M(\mathcal{E}) \subset M(\mathcal{E}'),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye.

Jelölés

Ha $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$$

A következmény fogalma

Definíció

Legyen $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ két egyenlőtlenségrendszer. Ha

$$M(\mathcal{E}) \subset M(\mathcal{E}'),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye.

Jelölés

Ha $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$$

„Nyilvánvaló” tény

Ha $\mathcal{E} \vdash \mathcal{E}'$, akkor $\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$,

A következmény fogalma

Definíció

Legyen $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ két egyenlőtlenségrendszer. Ha

$$M(\mathcal{E}) \subset M(\mathcal{E}'),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye.

Jelölés

Ha $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$$

„Nyilvánvaló” tény

Ha $\mathcal{E} \vdash \mathcal{E}'$, akkor $\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$, sőt ha $\mathcal{E} \vdash_{+} \mathcal{E}'$, akkor $\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$.

Példa

Példa

Példa

Legyen

$$\mathcal{E}:\begin{cases}-x+y\leq 1\\ 2x+y\leq 2\end{cases}\quad,\quad \mathcal{E}':2x+4y<8$$

Példa: Algebrai szemlélet

Példa: Algebrai szemlélet

Súlyozzuk az egyenlőtlenségeket:

$$
\begin{aligned}
-x + y &\leq 1 \qquad && / \cdot 2 \\
2x + y &\leq 2 \qquad && / \cdot 2 \\
0 &< 1 \qquad && / \cdot 2
\end{aligned}
$$

Példa: Algebrai szemlélet

Súlyozzuk az egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} -x + y &\leq 1 \qquad && / \cdot 2 \\ 2x + y &\leq 2 \qquad && / \cdot 2 \\ 0 &< 1 \qquad && / \cdot 2 \end{aligned}$$

Összegezzük:

$$2x + 4y < 8$$

Példa: Algebrai szemlélet

Súlyozzuk az egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} -x + y &\leq 1 & \qquad / \cdot 2 \\ 2x + y &\leq 2 & \qquad / \cdot 2 \\ 0 &< 1 & \qquad / \cdot 2 \end{aligned}$$

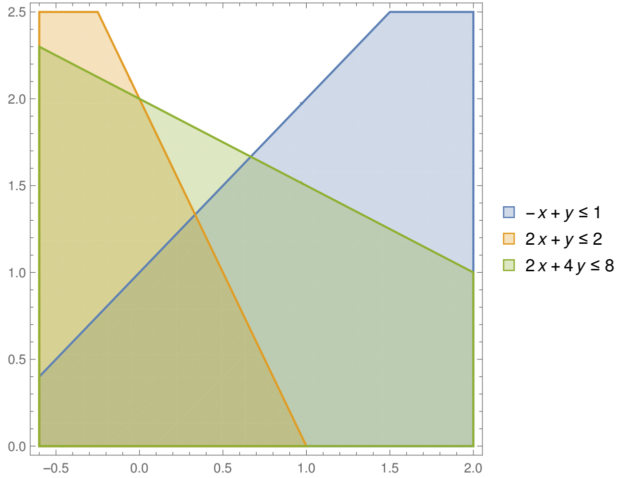
Összegezzük:

$$2x + 4y < 8$$

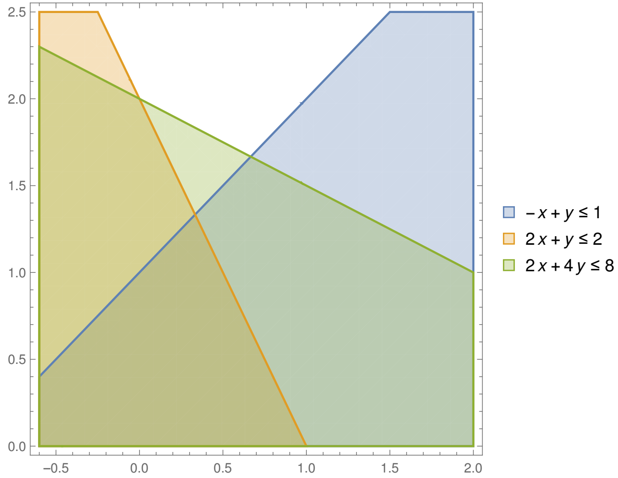
Tehát

$$\mathcal{E} \vdash \mathcal{E}'.$$

Példa: Geometriai szemlélet



Példa: Geometriai szemlélet



A kép alapján

$$\mathcal{E}\models\mathcal{E}'.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!