GRAPHOK ÉS MATRIXOK.[1]

Legyen a (véges) G graph *páros körüljárású*. Ez annyit jelent, hogy G minden zárt vonala páros számú élből áll, vagy — másképp kifejezve — hogy G szögpontjait úgy lehet két osztályba, Π_1-be és Π_2-be, sorozni, hogy G minden éle egy Π_1-pontot egy Π_2-ponttal kössön össze. Legyen M a maximális száma a G oly éleinek, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk. Ha G-nek $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ szögpontjai oly tulajdonságúak, hogy G minden éle e pontok valamelyikébe fut, azt mondjuk, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ *kimerítik* a G éleit.

Bebizonyítjuk, hogy *G élei M szögponttal kimeríthetők.*

Legyen az M élből álló

$$K = (P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_MQ_M)$$

élhalmaz — az M definiciójának megfelelően — a G-nek M-számú oly éle, hogy a P_i, Q_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ pontok különbözők. Itt a P_i-k a Π_1-hez, a Q_i-k a Π_2-höz tartozzanak és pedig legyen

$$\Pi_1' = (P_1, P_2, \ldots, P_M), \quad \Pi_2' = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_M),$$

úgy hogy Π_1' a Π_1-nek és Π_2' a Π_2-nek részhalmaza. Bizonyításunkat a «*K-út*» fogalmára alapítjuk.

A G-nek egy (többszörös pont nélküli, nyílt) útját, $A_1A_2 \ldots A_{2r}$-et, *K-út*nak nevezzük, ha második, negyedik, ..., 2ν-edik, ..., végül utolsóelőtti éle, azaz az $A_2A_3, A_4A_5, \ldots, A_{2\nu}A_{2\nu+1}, \ldots, A_{2r-2}A_{2r-1}$ élek valamennyien K-hoz tartoznak. Először is kimutatjuk a következő segédtételt:

G-nek semmiféle K-útja sem köti össze $\Pi_1 - \Pi_1'$ egy pontját $\Pi_2 - \Pi_2'$ valamely pontjával.

[1] Az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat 1931. márc. 26.-i ülésén tartott előadás.

Ha ugyanis U egy ilyen út volna, akkor eltávolítva K-ból az U-nak K-beli éleit és hozzávéve U-nak K-ba nem tartozó éleit (az utóbbiak száma 1-gyel nagyobb), $M+1$ oly élt nyernénk, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk. És ez ellentmond M maximális voltának.

Most már következőképen definiáljuk a $\Pi_1'+\Pi_2'$-nek egy $\Pi'=(R_1, R_2,\ldots, R_M)$ részhalmazát: α az $1, 2,\ldots, M$ számok bármelyike lévén, legyen $R_\alpha = Q_\alpha$, ha valamely K-út $\Pi_1-\Pi_1'$ valamely pontját Q_α-val köti össze; ha ilyen K-út nincs, legyen $R_\alpha=P_\alpha$. Ily módon Π' a K minden élének egy-egy végpontját tartalmazza. Kimutatjuk, hogy az M pontból álló Π' halmaz pontjai kimerítik a G éleit, vagyis, hogy — PQ egy tetszőleges éle lévén G-nek (hol P a Π_1-be, Q a Π_2-be tartozik) — vagy P, vagy Q pontja Π'-nek. A bizonyításnál négy esetet különböztetünk meg.

1. eset. P tartozzék $\Pi_1-\Pi_1'$-be, Q pedig $\Pi_2-\Pi_2'$-be. Hozzávéve K-hoz ezt a PQ élt, $M+1$ oly élt nyernénk, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk. Ez ellentmond M maximális voltának, úgy, hogy ez az 1. eset lehetetlen.

2. eset. P tartozzék $\Pi_1-\Pi_1'$-be, Q pedig Π_2'-be. Ekkor $Q=Q_\alpha$, hol $\alpha=1, 2,\ldots$, vagy M és a PQ él önmagában egy K-utat alkot, mely $\Pi_1-\Pi_1'$-nek P pontját $Q=Q_\alpha$-val köti össze. Tehát $Q=Q_\alpha$ a Π'-be tartozik.

3. eset. P tartozzék Π_1'-be, Q pedig $\Pi_2-\Pi_2'$-be. Ekkor $P=P_\alpha$, hol $\alpha=1, 2,\ldots$, vagy M. Ha volna oly K-út, mely $\Pi_1-\Pi_1'$ valamely P_0 pontját Q_α-val, köti össze, akkor hozzáfűzve ezen úthoz a $Q_\alpha P_\alpha$ és $P_\alpha Q$ éleket, oly K-utat nyernénk, mely P_0-t Q-val köti össze; a segédtétel szerint azonban ez lehetetlen. Nincs tehát olyan K-út, mely $\Pi_1-\Pi_1'$ valamely pontját Q_α-val köti össze. Tehát $P=P_\alpha$ a Π'-be tartozik.

4. eset. P tartozzék Π_1'-be, Q pedig Π_2'-be. Legyen például $P=P_\alpha$, $Q=Q_\beta$. Ha $\alpha=\beta$, akkor természetesen vagy $P=P_\alpha$ vagy $Q=Q_\alpha$ a Π'-be tartozik. Feltehetjük tehát, hogy $\alpha \neq \beta$. Vagy $P=P_\alpha$ tartozik Π'-be, vagy van egy K-út, mely $\Pi_1-\Pi_1'$ valamely P_0 pontját Q_α-val köti össze; utóbbi esetben, hozzávéve e K-úthoz a $Q_\alpha P_\alpha$ és $P_\alpha Q_\beta$ éleket, oly K-utat nyerünk, mely P_0-t Q_β-val köti össze, úgy, hogy ez esetben $Q = Q_\beta$ tartozik Π'-be.

Ezzel valóban kimutattuk, hogy, ha egy páros körüljárású graphban maximálisan M számú oly él van, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk, akkor G élei M szögponttal kimeríthetők. Ha tehát m a minimális száma az oly szögpontoknak, melyek G éleit kimerítik, akkor $m \leq M$.

Világos, hogy fordítva is: $m \geq M$. Ha t. i. $e_1, e_2, \ldots, e_M$ oly élek, melyeknek páronként nincs közös végpontjuk és az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ szögpontok a graph éleit kimerítik, akkor az $e_1, e_2, \ldots, e_M$ élek mindegyike az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ pontok valamelyikében végződik; közös végpontjuk ezen éleknek nem lévén, valóban $m \geq M$.

Ezzel kimutattuk, hogy $m = M$. Összefoglalva főeredményünk így fogalmazható:

Páros körüljárású graphban az éleket kimerítő szögpontok minimális száma megegyezik a páronként közös végpontot nem tartalmazó élek maximális számával.

Áttérve e tétel matrixokra való alkalmazására, legyen

$$\| a_{ik} \| \qquad (i=1, 2, \ldots, p;\ k=1, 2, \ldots, q)$$

egy tetszőleges matrix, hol egy-egy elemet illetően csak az fog tekintetbe jönni, hogy eltűnik-e vagy nem. E matrixnak a következő módon egy páros körüljárású graphot feleltetünk meg. A p-számú sor mindegyikének a $P_1, P_2, \ldots, P_p$ pontok egyikét, a q-számú oszlop mindegyikének a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ pontok egyikét feleltetjük meg; továbbá akkor és csak akkor vezetünk be egy P_iQ_k élt, ha a *megfelelő* a_{ik} elem nem tűnik el. Más éleket nem vezetünk be. Így egy páros körüljárású G graph keletkezik.

Az, hogy bizonyos szögpontok a G éleit kimerítik, világosan azt jelenti, hogy az ezen szögpontoknak megfelelő sorok és oszlopok (közös néven: *vonalak*) összeségükben a matrix minden el nem tűnő elemét tartalmazzák. Az pedig, hogy bizonyos éleknek páronként nincs közös végpontjuk, azt jelenti, hogy az ezen éleknek megfelelő elemek páronként nem feküsznek ugyanazon vonalban.

Eredményünk matrixokra megfogalmazva tehát így mondható ki:

Bármely matrixra az oly vonalak minimális száma, melyek összességükben az összes el nem tűnő elemeket tartalmazzák, megegyezik az oly el nem tűnő elemek maximális számával, melyek páronként nem feküsznek egy vonalban.

Világos, hogy itt az «el nem tűnő» jelző az elemek bármily tulajdonságával helyettesíthető; ezért e tétel a matrixok (kétméretű táblák) egy tisztán kombinatorikus tulajdonságát fejezi ki, hol az elemek tetszőleges tárgyak (nem csak számok) lehetnek.

Megemlítjük végül, hogy eredményeink szorosan összefüggnek Frobeniusnak determinánsokra és Mengernek graphokra vonatkozó némely vizsgálatával. E kapcsolatokra másutt fogunk kiterjeszkedni.

Kőnig Dénes.

GRAPHEN UND MATRICES.

Es wird folgender Satz bewiesen:

Für jeden paaren Graphen ist die Minimalzahl derjenigen Knotenpunkte, welche die Kanten des Graphes erschöpfen, gleich der Maximalzahl von Kanten, welche paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen.

Wir sagen hier, dass die Knotenpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ die Kanten eines Graphes «erschöpfen», wenn jede Kante des Graphes in einem der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ endet.

In die Sprache der Matrices übersetzt besagt der Satz:

Für jede Matrix ist die Minimalzahl derjenigen Reihen (Zeilen und Spalten), welche in ihrer Gesamtheit sämtliche nichtverschwindende Elemente der Matrix enthalten, gleich der Maximalzahl paarweise reihenfremder nichtverschwindender Elemente der Matrix.

Dénes Kőnig.