A FOURIER-FÉLE MECHANIKAI ELV ALKALMAZÁSÁNAK ALGEBRAI ALAPJA.

FARKAS GYULA l. tagtól.

Már két közleményben következtettem ezt. Most ebben a harmadikban aránylag igen egyszerű módon teszem, a melynél egyszerűbbet találni aligha lehetséges, a mennyiben t. i. számon tartjuk, hogy akárhány egymástól független homogen, lineáris egyenlőtlenség rendelhető össze, mihelyt a vezérmennyiségek száma kettőnél nagyobb. Nem számol ezzel az eshetőséggel egy újabb időben közölt e tárgyú német dolgozat sem (HENNEBERG, Crelle Jour. 1894). Pedig leginkább ennek az általánosságnak a szempontjából hasznos az alkalmazás általános analytikai módszere.

Legyen

$$\begin{array}{l} A_{11}u_1+A_{12}u_2+\cdots+A_{1n}u_n\equiv\theta_1\geqq 0 \\ A_{21}u_1+A_{22}u_2+\cdots+A_{2n}u_n\equiv\theta_2\geqq 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \tag{1}$$

egyenlőtlenségi rendszerünk, és ennek minden megoldásában teljesüljön:

$$A_1u_1+A_2u_2+\cdots+A_nu_n\equiv\vartheta\geqq 0. \tag{2}$$

A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapját a következő tantétel képezi: mindig léteznek olyan nem negativ, az u vezérmennyiségektől független multiplicatorok λ, hogy

$$\vartheta\equiv\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\cdots \tag{3}$$

E tantétel lehető legegyszerűbb, egészen szigorú és teljes bebizonyítását szándékozom adni a következőkben.

*

A (2)-ben lévő A_n coëfficiens legyen 0-tól különböző. Számítsuk ki a (2)-ből az u_n vezérmennyiséget, mint a többi u és mint ϑ függvényét, azután (1)-ben helyettesítsük mindenütt ezzel a függvénynyel. Ez is megtörténvén, oszszuk el az egyes egyenlőtlenségeket a ϑ bennük lévő coëfficiensének absolut értékével (a mennyiben az 0-tól különbözik). Az eljárás eredménye legyen:

$$\begin{array}{rr} \vartheta+p_1 \equiv \theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta+p_2 \equiv \theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ -\vartheta+q_1 \equiv \theta_{q_1} \geqq 0, & -\vartheta+q_2 \equiv \theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \end{array} \qquad (1)'$$

a hol $p_1, p_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ az $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ vezérmennyiségek lineáris homogen, egész függvényeit jelentik.

A föltevés szerint e rendszernek minden megoldásában, azaz minden őt kielégítő $\vartheta, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ értékrendszerben

$$\vartheta \geqq 0. \qquad (2)'$$

Az (1)' első sorában szükségképen létezik legalább egy egyenlőtlenség, mert ha az első sor nem léteznék, akkor lehetne $\vartheta < 0$.

Most az (1)' rendszer helyett egy mást irok fel, a mely abban különbözik ettől, hogy ennek a harmadik sora helyett oly egyenlőtlenségeket tartalmaz, a melyek (1)'-ből a ϑ eliminálásai által keletkeznek:

$$\begin{array}{rr} \vartheta+p_1 \equiv \theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta+p_2 \equiv \theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ p_1+q_1 \equiv \theta_{p_1}+\theta_{q_1} \geqq 0, & p_1+q_2 \equiv \theta_{p_1}+\theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ p_2+q_1 \equiv \theta_{p_2}+\theta_{q_1} \geqq 0, & p_2+q_2 \equiv \theta_{p_2}+\theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (1)''$$

Ennek is minden megoldásában

$$\vartheta \geqq 0. \qquad (2)''$$

Tegyük fel ugyanis, hogy ebben lehet $\vartheta < 0$. Ekkor az első sorából folyólag minden $p > 0$. Ha p_1 a legkisebb p, akkor a ϑ birhat benne még $-p_1$ értékkel is. Igy azonban az $(1)''$ harmadik sora szerint az $(1)'$ harmadik sora is teljesül, tehát az egész $(1)'$ teljesül, már pedig a föltevés szerint ez csak nem negativ ϑ értékek mellett elégithető ki: az $(1)''$ minden megoldásában is csak $\vartheta \geqq 0$ lehet.

Ez meg lévén állapitva, szoritkozzunk most egyelőre $(1)''$ ama speczialis megoldásaira, a melyekben egy p sem negativ, tehát a melyekben:

$$\begin{array}{ll} p_1 \geqq 0, & p_2 \geqq 0, \ldots \\ r_1 \geqq 0, & r_2 \geqq 0, \ldots \\ p_1+q_1 \geqq 0, & p_1+q_2 \geqq 0, \ldots \\ p_2+q_1 \geqq 0, & p_2+q_2 \geqq 0, \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array} \tag{1$_1$}$$

Mindenesetre létezik $(1)''$-nek oly megoldása, a mely $(1)_1$-nek eleget tesz (t. i. legalább is azzal, hogy minden p, q, r eltünik).

Az $(1)_1$-ben legalább egy bizonyos p mindig $=0$; mert ha minden p egyszerre >0, akkor lehetne $\vartheta < 0$ az $(1)''$-ben, továbbá ha nem egyszerre minden p lehetne >0, akkor egyszerre is lehetne (mivel külön-külön helyes egyenlőtlenségek összege is helyes).

Legyen már most, hogy $(1)_1$ minden megoldasában $p_1=0$, tehát mindben

$$-p_1 \geqq 0, \tag{2$_1$}$$

és tegyük fel, mikép $n-1$ vezérmennyiség esetében áll a bebizonyitandó tétel. Akkor $(1)_1$ és $(2)_2$ viszonyát illetőleg áll, mert ezekben már csak $u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$ fordulnak elő. Léteznek tehát olyan nem negativ P, Q, R multiplicatorok, hogy

$$\begin{aligned} -p_1 \equiv\; & P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + R_1 r_1 + R_2 r_2 + \cdots \\ & + Q_{11}(p_1+q_1) + Q_{12}(p_1+q_2) + \cdots \\ & + Q_{21}(p_2+q_1) + Q_{22}(p_2+q_2) + \cdots \\ & \ldots \\ & \ldots \end{aligned} \tag{3$_1$}$$

Ennek a segedelmével pedig már n vezérmennyiség esetére is következtethető az alaptétel, vagyis következtethető a (3).

A $(3)_1$ tekintetbe vételével $(1)''$-ből könnyen fölismerhető műveletek rendén következik:

$$\begin{aligned}(1+P_1)\,\theta_{p_1}+P_2\theta_{p_2}+\cdots+R_1\theta_{r_1}+R_2\theta_{r_2}+\cdots\\ +Q_{11}(\theta_{p_1}+\theta_{q_1})+Q_{12}(\theta_{p_1}+\theta_{q_2})+\cdots\\ +Q_{21}(\theta_{p_2}+\theta_{q_1})+Q_{22}(\theta_{p_2}+\theta_{q_2})+\cdots\\ +\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \equiv(1+P_1+P_2+\cdots)\,\vartheta.\end{aligned}$$

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1898 október 17.-én tartott üléséből.)