MATRIXOK KOMBINATORIUS TULAJDONSÁGAIRÓL.

Jelen dolgozat kiindulópontja a következő König Dénes-től származó tétel:

Ha egy matrix elemei részben zérusok, részben zérustól különböző számok vagy független változók, úgy azon vonalak[1] *minimális száma, melyek a matrix összes zérustól különböző elemeit tartalmazzák, egyenlő azon zérustól különböző elemek maximális számával, melyek közül nincs kettő egy vonalban.*

König ezen tételt graphelméleti úton bizonyította be és a tétel graphelméleti fogalmazása nála egyéb graphelméleti kérdésekkel is kapcsolatba jut.[2]

A tételnek egy speciális esete aequivalens Frobenius-nak a következő determinánstételével.[3] Ha egy n-ed rendű determináns elemei részben zérusok, részben független változók, úgy a determináns identikus[4] eltűnésének szükséges és elegendő feltétele, hogy legalább $n+1$ vonal közös elemei zérusok legyenek. A feltétel elegendő, mert teljesülése esetén az n-edrendű determinánsnak $2n$ vonala közül a többi $n-1$ vonal tartalmazza az összes el nem tűnő elemeket, tehát a fenti tétel szerint legfeljebb $n-1$ olyan el nem tűnő elem választható ki, melyek közül nincs kettő egy vonalban, azaz a determináns

---

[1] Vonalnak nevezem közös néven a matrix sorait és oszlopait.

[2] A nevezett tételt König előadta a Társulat 1931 márciusi előadó ülésén és graphelméletről szóló könyvében meg fog jelenni.

[3] G. Frobenius: Über zerlegbare Determinanten, Sitzungsber. d. Berl. Ak. 1917, I. pp. 274—77.

[4] Egy determináns, melyben az összes zérustól különböző elemek független változók, akkor és csak akkor tűnik el identikusan, ha összes kifejtési tagjai eltűnnek.

minden kifejtési tagja eltűnik. Ha viszont a feltétel nem teljesül, azaz csupán n vagy kevesebb vonal közös elemei zérusok, úgy az el nem tűnő elemek nyilván nem foglalhatók n-nél kevesebb vonalba, tehát a fenti tétel szerint kiválasztható n olyan el nem tűnő elem, melyek közül nincs kettő egy vonalban, azaz a determináns nem tűnhetik el identikusan. FROBENIUS a tétel ezen speciális esetét algebrai úton bizonyította.

Az alábbiakban a tételnek egy új bizonyítását ismertetem (1. §) és általánosítom a tételt (2. §) a következő alakban:

I. *Ha az* $\| a_{ij} \|$ *n-edrendű matrix elemei adott nem negatív egész számok, úgy a*

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots n), \quad (\lambda_i, \mu_j \text{ nem negatív egész számok}) \tag{1}$$

feltételek mellett

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max. (a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n}). \tag{2}$$

hol $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ *az* $1, 2, \ldots n$ *számok összes permutációit befutják.*

Abban a speciális esetben, midőn az adott a_{ij} elemek csupán 0 vagy 1 számértékkel bírnak, a tétel nyilván KÖNIG fentidézett tételébe megy át.

Továbbá egy, az előbbivel duális vonatkozásban álló tételt állapítok meg (3. §). Ha ugyanis $\| \delta_{ij}^{\varrho} \|$, $(\varrho = 1, 2, \ldots n!)$ jelentik az összes különböző n-edrendű matrixokat, melyek az egységmatrixból a sorok (v. az oszlopok) egymásközti felcserélése által keletkeznek, úgy érvényes a következő tétel:

II. *Ha az* $\| a_{ij} \|$ *n-edrendű matrix elemei adott nem negatív egész számok, úgy a*

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{ij}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots n), \quad \left(\nu_\varrho \text{ nem negatív egész szám}\right) \tag{3}$$

feltételek mellett

$$\min. \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho = \max. (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}; \; a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}), \quad (i, j = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

KÖNIG-nek egy, ugyancsak graphelméleti úton bizonyított tétele,[5] mely szerint, ha egy matrix összes elemei 0-sal vagy 1-gyel egyenlők, továbbá minden sor és minden oszlop ugyanannyi, pl. k számú 1-est tartalmaz, akkor a matrix k számú $\|\delta_{ij}^{\varrho}\|$ típusú matrix összege, nyilván a (II.) tétel speciális esete.

Végül az (1) és (3) feltételnek azt a részét, miszerint λ_i, μ_j, ν_ϱ egész számok, elejtve, közvetlenül adódik, hogy az (I.) és (II.) tételek kiterjeszthetők és érvényben maradnak tetszőleges valós elemekből álló matrixokra is.

1. §.

Legyen $\|a_{ij}\|$ egy adott n-edrendű matrix, melynek elemei egy T tulajdonság szempontjából két osztályba sorozhatók. Reprezentáljuk a matrix schémát egy n^2 négyzetből álló ráccsal, továbbá mindazon elemeket, melyek T tulajdonsággal bírnak, a megfelelő négyzetbe írt ponttal, végül azon négyzeteket, melyeknek megfelelő elemek nem bírnak T tulajdonsággal, üresen hagyjuk.

Nevezzük továbbá a vonalak (sorok és oszlopok) minden olyan rendszerét, mely az $\|a_{ij}\|$ matrixhoz fenti módon rendelt H ponthalmaz összes pontjait tartalmazza, fedővonalrendszernek. Végül a H ponthalmaz minden oly részhalmazát, mely nem tartalmaz két egy vonalba eső pontot, független pontrendszernek.

Ekkor König tétele nyilván a következőképpen fogalmazható. Bármely (négyzetes schémába írt) H ponthalmazra nézve a fedéshez szükséges vonalak m minimális száma egyenlő a H ponthalmazból kiválasztható független pontok M maximális számával.

A tételt teljes indukcióval bizonyítom. Miután a tétel helyessége 1 pontból álló halmazra evidens, tehát általánosan bizonyítva lesz, ha helyességét minden legfeljebb N pontból

---

[5] König D. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és halmazok elméletére, Mat. és Term.-tud. Ért. 34. köt. (1916) pp. 104—119 és Math. Ann. 77. köt. (1916) pp. 453—65.

álló H_N halmazra feltételezve, minden $N+1$ pontból álló H_{N+1} halmazra kimutatom.

E végből egy N pontból álló H_N halmazt 1 pont adjungálásával kiegészítek egy $N+1$ pontból álló H_{N+1} halmazzá és kimutatom, hogy a fenti m és M karakterisztikus számok (melyek feltevés szerint a H_N halmazra egyenlők és egy $N+1$-ik pont adjungálásánál nyilván nem csökkenhetnek) az adjunkciónál vagy egyidejűleg változatlanok maradnak, vagy egyidejűleg 1-gyel növekszenek.

A négyzetes schéma összes üres négyzetei (melyekbe tehát egy $N+1$-ik pont írható) az eredeti H_N halmaz minimális fedővonalrendszerei segélyével két osztályba sorozhatók: 1. olyanok, melyek H_N legalább egy minimális fedővonalrendszere által fedve vannak, 2. olyanok, melyek H_N egy minimális fedővonalrendszere által sincsenek fedve.

Kimutatom először, hogy ha valamely 1. osztálybeli négyzetbe írom az $N+1$-ik pontot, a m és M karakterisztikus számok nem növekszenek, tehát nem változnak.

Egyrészt ugyanis, mivel az 1. osztálybeli négyzet a H_N halmaznak legalább egy m vonalból álló minimális fedővonalrendszere által fedve van, tehát ugyanezen m vonal által a H_{N+1} ponthalmaz is fedve lesz, azaz m az adjunkciónál nem növekszik.

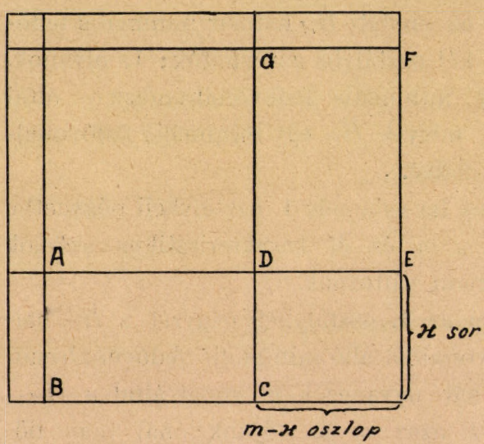
Másrészt, miután a H_{N+1} ponthalmaz m vonallal fedhető, tehát a pontok függetlenségének definíciójából következik (a skatulya-principium szerint), hogy belőle nem választható ki több, mint $m=M$ független pont. Az adjunkciónak ezen esetében tehát M sem növekszik.

Kimutatom továbbá, hogy ha valamely 2. osztálybeli négyzetbe írom a $N+1$-ik pontot, a m és M karakterisztikus számok mindegyike 1-gyel növekszik.

Egyrészt ugyanis H_{N+1} nyilván nem fedhető m vonallal, mert minden olyan m vonal, mely H_{N+1}-et fedi, a H_N halmaznak egy oly minimális fedővonalrendszere volna, mely az adjunkcióhoz kiválasztott négyzetet fedi, a négyzet tehát nem tartoznék a 2. osztályba. Viszont H_{N+1} nyilván fedhető $m+1$ vonallal, tehát az adjunkciónál m 1-gyel növekszik.

Másrészt kimutatom, hogy mindig van a H_N halmaznak egy olyan $m=M$ pontból álló független pontrendszere, mely a 2. osztálybeli négyzetbe írt $N+1$-ik ponttal együtt egy $M+1$ pontból álló független pontrendszert alkot, vagyis az adjunkciónál M szintén 1-gyel növekszik.

Válasszuk ki H_N egy tetszőleges minimális fedővonalrendszerét, mely tartalmaz $\varkappa$ sort és $m-\varkappa$ oszlopot és (könnyebb áttekintés kedvéért) rendezzük át a négyzetes schéma vonalait úgy, hogy az a 2. osztálybeli négyzet, melybe a $N+1$-ik pontot írjuk, az első sor és oszlopba, a kiválasztott minimális fedővonalrendszer $\varkappa$ sora és $m-\varkappa$ oszlopa az utolsó sorok és oszlopokba kerüljenek.



1. ábra.

Ekkor (1. ábra) a H_N-nek az $ABCD$ négyszögbe eső részhalmazához tartozó minimális fedővonalszám $\varkappa$. Ha ugyanis ezen részhalmaz fedhető $\varkappa-1$ vonallal, úgy ezen $\varkappa-1$ vonal $+$ első oszlop $+m-\varkappa$ utolsó oszlop H_N-nek egy olyan minimális fedővonalrendszere, mely az adjunkcióhoz kiválasztott négyzetet fedi, ez a négyzet tehát nem volna 2. osztálybeli, feltevéssel ellentétben. Tehát az $ABCD$ négyszögbe eső részhalmaz az indukciós feltevés értelmében tartalmaz $\varkappa$ független pontot.

Analóg módon következtethető, hogy H_N-nek a $DEFG$ négyszögbe eső részhalmaza tartalmaz $m-\varkappa$ független pontot. Ekkor azonban az előbbi $\varkappa$ pont, az utóbbi $m-\varkappa$ pont és az adjungált pont egy $m+1=M+1$ pontból álló független pontrendszert alkotnak, az adjunkciónak ezen esetében tehát M is 1-gyel növekszik.

Miután minden H_{N+1} egy H_N-ből 1 pont adjungálásával származtatható, a tétel általános érvényességét bebizonyítottuk.

Tekintettel a H_N halmaz pontjainak jelentésére, a nyert eredményt még a következő, ugyancsak KŐNIGtől származó fogalmazásban is kimondhatjuk:

Ha egy matrix elemei egy T tulajdonság szempontjából két osztályba sorozhatók, úgy azon vonalak minimális száma, melyek az összes T tulajdonságú elemeket tartalmazzák, egyenlő azon T tulajdonságú elemek maximális számával, melyek közül nincs kettő egy vonalban.

2. §.

Legyen $\| a_{ij} \|$ egy n-edrendű matrix, melynek elemei adott nem negatív egész számok. A vonalak egy olyan rendszerét, mely az i-ik sort λ_i, a j-ik oszlopot μ_j multiplicitással tartalmazza, fedővonalrendszernek nevezem, ha i, j minden értékére

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

Egy olyan fedővonalrendszer, melynél a vonalak száma $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k)$ minimum, minimális fedővonalrendszer. Diagonális összegeknek nevezem továbbá a következő összegeket:

$$a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \dots + a_{n\nu_n} \tag{5}$$

hol $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ az $1, 2, \dots n$ számok összes permutációit befutják. Az így definiált fogalmakra érvényes az

I. Tétel. *Ha az $\| a_{ij} \|$ n-edrendű matrix elemei nem negatív egész számok, úgy a fedéshez szükséges vonalak minimális száma egyenlő a diagonális összegek maximumával, azaz*

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

feltételek mellett

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max. (a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \dots + a_{n\nu_n}). \tag{2}$$

Legyen $(\lambda_k^{\star}, \mu^{\star}; k = 1, 2, \ldots n)$ egy minimális fedővonalrendszer. Akkor (1) szerint:

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{\star} + \mu^{\star}) \geqq a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n} \qquad (6)$$

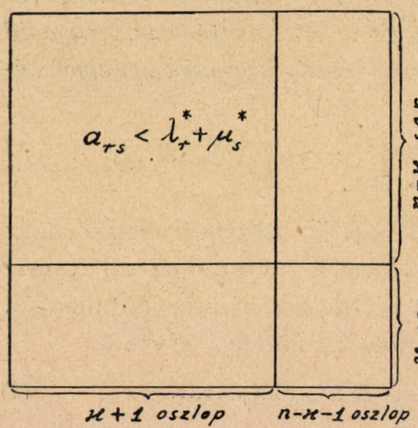
az összes diagonális összegekre.

A kiválasztott $\lambda_k^{\star}$, $\mu_k^{\star}$ minimális fedővonalrendszer alapján az $\| a_{ij} \|$ matrix elemei két osztályba sorozhatók: 1. az $a_{pq}^{\star}$ lényeges elemekre, melyekre nézve

$$\lambda_p^{\star} + \mu_q^{\star} = a_{pq}^{\star}. \qquad (7)$$

2. az a_{rs} lényegtelen elemekre, melyekre nézve

$$\lambda_r^{\star} + \mu_s^{\star} > a_{rs} \qquad (7')$$



2. ábra.

Kimutatom, hogy azon vonalak minimális száma, melyek az összes $a_{pq}^{\star}$ lényeges elemeket tartalmazzák, n-nel egyenlő. Tegyük fel ugyanis, ezzel ellentétben, hogy $n-1$ vonal tartalmazza az összes $a_{pq}^{\star}$ lényeges elemeket és (könnyebb áttekinthetőség kedvéért) számozzuk át a vonalakat úgy, hogy a lényeges elemeket tartalmazó $\varkappa$ sor és $n-\varkappa-1$ oszlop az utolsók legyenek. Ekkor az első $n-\varkappa$ sor és első $\varkappa+1$ oszlop közös elemei mind lényegtelen elemek, azaz

$$\lambda_r^{\star} + \mu_s^{\star} > a_{rs} \qquad \begin{pmatrix} r=1, 2, \ldots n-\varkappa \\ s=1, 2, \ldots \varkappa+1 \end{pmatrix}$$

tehát

$$\lambda_r^{\star} + \mu_s^{\star} \geqq 1$$

s így szükségképpen [7] a

---

[7] Ha ugyanis egyik egyenlőtlenségsorozat sem áll fenn, úgy van legalább egy r és egy s, melyekre $\lambda_r^{\star} = 0$ és $\mu_s^{\star} = 0$, azaz $\lambda_r^{\star} + \mu_s^{\star} = 0$, (7')-tel ellentétben.

$$\lambda_1^\star \geqq 1,\ \lambda_2^\star \geqq 1, \ldots \lambda_{n-\varkappa}^\star \geqq 1 \qquad (8)$$

illetőleg

$$\mu_1^\star \geqq 1,\ \mu_2^\star \geqq 1, \ldots \mu_{\varkappa+1}^\star \geqq 1 \qquad (8')$$

egyenlőtlenségsorozatoknak legalább egyike fennáll.

Ha pl. a (8) egyenlőtlenségek állnak fenn, úgy a $(\lambda_k^{\star\star}, \mu_k^{\star\star})$

$$\begin{aligned} \lambda_r^{\star\star} &= \lambda_r^\star - 1, & (r=1, 2, \ldots n-\varkappa) \\ \lambda_p^{\star\star} &= \lambda_p^\star, & (p=n-\varkappa+1, \ldots n) \\ \mu_s^{\star\star} &= \mu_s^\star, & (s=1, 2, \ldots \varkappa+1) \\ \mu_q^{\star\star} &= \mu_q^\star + 1, & (q=\varkappa+2, \varkappa+3, \ldots n) \end{aligned}$$

vonalrendszer nyilván fedővonalrendszer és

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{\star\star} + \mu_k^{\star\star}) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^\star + \mu_k^\star) - 1,$$

tehát a $\lambda_k^\star$, $\mu_k^\star$ vonalrendszer nem lehet minimális.

Ezzel ki van mutatva, hogy azon vonalak minimális száma, melyek az összes $a_{pq}^\star$ lényeges elemeket tartalmazzák, n-nel egyenlő. Ekkor azonban az 1. §-ban bizonyított tétel szerint kiválasztható n olyan $a_{1q_1}^\star, a_{2q_2}^\star, \ldots a_{nq_n}^\star$ lényeges elem, melyek között nincs kettő egy vonalban. Az ezekkel alkotott diagonális összeg, a (7) relációk figyelembevételével:

$$a_{1q_1}^\star + a_{2q_2}^\star + \cdots + a_{nq_n}^\star = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^\star + \mu_{q_k}^\star) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^\star + \mu_k^\star). \qquad (9)$$

Végül (6) és (9) alapján

$$\min. \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \max. (a_{1\nu_1} + a_{1\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n}) \quad \text{q. e. d.} \quad (2)$$

Ha az $\| a_{ij} \|$ matrix elemei nem negatív racionális számok és az a_{ij} elemek közös nevezőre hozott alakja $\frac{\alpha_{ij}}{A}$, hol α_{ij} nem negatív egész szám, úgy az I. tételnek az $\| \alpha_{ij} \|$ matrixra való alkalmazásából következik,

$$\min. \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{A} + \frac{\mu_k}{A} \right) = \max. \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{k\nu_k}}{A} = \max. \sum_{k=1}^{n} a_{k\nu_k}.$$

Tehát ha a (1) relációkban λ_k-t és μ_k-t (melyek egészszámú elemek esetén egész számokat, a vonalak multiplicitását jelentették), mint a fedővonalak súlyát értelmezzük, úgy az (2) reláció által kifejezett tétel változatlanul érvényes racionális és — mint egyszerű folytonossági meggondolásból adódik — tetszőleges valós, nem negatív elemekből álló matrixokra is.

3. §.

A II. tétel tárgyalásánál a következő elnevezéseket használom. Azt az $n!$ számú különböző n-edrendű $\|\delta_{ij}^{\varrho}\|$, $(\varrho = 1, 2, \ldots n!)$ matrixot, melyek az egységmatrixból a sorok (v. oszlopok) egymásközti felcserélésével keletkeznek, diagonálvonalnak nevezem (ellentétben a «parallel» vonallal, mely közös néven a sorokat és oszlopokat jelenti). A diagonálvonalaknak egy rendszerét, mely a $\|\delta_{ij}^{\varrho}\|$ diagonálvonalat ν_ϱ multiplicitással tartalmazza, fedődiagonálvonalrendszernek nevezem, ha i, j minden értékére

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{ij}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

Egy olyan fedődiagonálvonalrendszer, melyben a diagonálvonalak száma: $\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho$ minimum, minimális fedődiagonál vonalrendszer. Parallelösszegeknek nevezem (ellentétben a fenti diagonális összegekkel) az

$$\left.\begin{aligned} &a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \\ \text{és} \quad &a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}, \qquad (j = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}\right. \tag{10}$$

összegeket. Az így definiált fogalmakra érvényes a

II. Tétel. *Ha az $\|a_{ij}\|$ n-edrendű matrix elemei adott nem negatív egész számok, úgy a fedéshez szükséges diagonálvonalak minimális száma egyenlő a parallelösszegek maximumával, azaz*

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{ij}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n) \quad \left(\nu_\varrho \begin{array}{c}\text{nem negatív} \\ \text{egész}\end{array}\right) \tag{3}$$

feltételek mellett

$$\text{min.} \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho = \underset{(i, j = 1, 2, \ldots n)}{\text{max.}} (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}, \; a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}). \tag{4}$$

Egy olyan $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrixra, melyben minden parallelösszeg 1 (azaz melyben minden sor és oszlop egy 1-est tartalmaz), a tétel evidens. Ha tehát — a tétel érvényességét minden olyan matrixra, melyben valamennyi parallelösszeg $M-1$, feltételezvén — bebizonyitom, hogy minden olyan matrixra, melyben valamennyi parallelösszeg M, érvényes, úgy a tétel általánosan bizonyitva lesz.

E végből először kimutatom, hogy azon (parallel) vonalak minimális száma, melyek az $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrix összes zérustól különböző elemeit tartalmazzák, n-el egyenlő. Az $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrix elemeinek összege ugyanis $n.M$, másrészt minden (parallel) vonalban az elemek összege M, következésképpen n-nél kevesebb parallelvonal nem tartalmazhatja az összes el nem tűnő elemeket. Ekkor azonban az 1. §-ban bizonyitott tétel szerint kiválasztható n olyan zérustól különböző $a_{1\nu_1}^{\star}, a_{2\nu_2}^{\star}, \ldots a_{n\nu_n}^{\star}$ elem, melyek közül nincs kettő egy (parallel) vonalban. Ha tehát $\| \delta_{ij}^{\varrho\star} \|$ az a diagonálvonal, melyben

$$\delta_{ij}^{\varrho\star} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = \nu_i \\ 0, & \text{ha } j \neq \nu_i \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n) \qquad (12)$$

úgy $\| a_{ij}^{\star} - \delta_{ij}^{\varrho\star} \|$ egy nem negativ egész elemekből álló matrix, melyben minden parallelösszeg $M-1$, mely tehát feltevés szerint $M-1$ diagonálvonallal fedhető. Következésképpen az $\| a_{ij}^{\star} \|$ matrix fedhető az előbbi $M-1$ diagonálvonal $+$ a $\| \delta_{ij}^{\varrho\star} \|$ diagonálvonal, azaz összesen M számú diagonálvonallal, a *fortiori* fedve van tehát ezek által az eredeti ($\| a_{ij}^{\star} \|$ által majorizált) $\| a_{ij} \|$ matrix.

Minthogy pedig M jelenti a parallelösszegek maximumát az $\| a_{ij} \|$ matrixban, tehát $\| a_{ij} \|$ nyilván nem fedhető M-nél kevesebb diagonálvonallal, mert ellenkező esetben egy diagonálvonalnak egy parallelvonalból egynél több elemet kellene tartalmaznia, azaz

$$\min. \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho = M = \max. \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}, \ \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \right) \quad \text{q. e. d.} \qquad (4)$$

A tétel bizonyításánál egy KÖNIG-től származó gondolatmenetet[8] használok fel, mely szerint elegendő a tételt olyan matrixra bizonyítani, melyben az összes parallelösszegek egyenlők. Meghatározható ugyanis minden $\| a_{ij} \|$ matrixhoz egy olyan $\| a^{\star}_{ij} \|$ «majoráns» matrix, melyre nézve

$$a^{\star}_{ij} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots n) \tag{11}$$

és

$$\begin{aligned} &a^{\star}_{p1} + a^{\star}_{p2} + \dots + a^{\star}_{pn} = a^{\star}_{1q} + a^{\star}_{2q} + \dots + a_{nq} = M = \\ &= \max.(a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in},\ a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}), \quad \substack{(i, j = 1, 2, \dots n) \\ (p, q = 1, 2, \dots n)} \end{aligned} \tag{11'}$$

melynek tehát bármely eleme nem kisebb, mint az eredeti matrix megfelelő eleme és melyben az összes parallelösszegek egyenlők az eredeti $\| a_{ij} \|$ matrix parallelösszegeinek M maximumával.

Ha ugyanis egy $\| a_{ij} \|$ matrixban nem minden parallelösszeg egyenlő, úgy az mindig tartalmaz egy p-ik sort és egy q-ik oszlopot,[9] melyekhez tartozó parallelösszegek kisebbek, mint a parallelösszegek M maximuma:

$$a_{p1} + a_{p2} + \dots + a_{pn} < M \quad \text{és} \quad a_{1q} + a_{2q} + \dots + a_{nq} < M.$$

Ekkor a p-ik sor és q-ik oszlop közös a_{pq} elemét

$$a_{pq} + M - \max.(a_{p1} + \dots + a_{pn},\ a_{1q} + \dots + a_{nq})\text{-}$$

val helyettesítve, nyilván egy olyan matrixot nyerünk, mely az eredetinek majoránsa és amelyben a M-el egyenlő parallelösszegek száma (legalább) eggyel több, mint az eredeti matrixban. Ezen eljárásnak tehát legfeljebb $2n-1$-szeri ismétlésével az eredeti $\| a_{ij} \|$ matrixnak egy olyan $\| a^{\star}_{ij} \|$ majoráns matrixához jutunk, melyben valamennyi parallelösszeg egyenlő M-el.

Minthogy pedig az $\| a^{\star}_{ij} \|$ majoráns matrix minden fedővonalrendszere az eredeti $\| a_{ij} \|$ matrixnak a fortiori fedővonalrendszere, tehát a tételt elegendő az $\| a^{\star}_{ij} \|$ majoránsmatrixra bizonyítani.

---

[8] l. c. [5]), III. §.

[9] Ha ugyanis minden sorhoz tartozó parallelösszeg M, úgy szükségképpen minden oszlophoz tartozó szintén M és vice versa.

A II. tétel ugyanúgy, mint az I. tétel, az ott alkalmazott meggondolással, kiterjeszthető nem negatív racionális, ill. tetszőleges valós elemekből álló matrixokra.

Egerváry Jenő.

ÜBER KOMBINATORISCHE EIGENSCHAFTEN VON MATRIZEN.

Der Ausgangspunkt der Arbeit ist der folgende, von D. KÖNIG herrührende Satz:

Wenn die Elemente einer Matrix teils von Null verschiedene Zahlen (oder unabhängige Variabeln), teils gleich 0 sind, so ist die Minimalzahl derjenigen Reihen (Zeilen und Kolonnen), welche in ihrer Gesamtheit alle von 0 verschiedene Elemente der Matrix enthalten, gleich der Maximalzahl reihenfremder, nichtverschwindender Elemente.

Im § 1 wird für diesen von D. KÖNIG auf graphentheoretischem Wege bewiesenen Satz ein neuer Beweis gegeben.

Im § 2 wird der Satz folgenderweise verallgemeinert. Ist eine Matrix n-ten Grades $\| a_{ij} \|$ mit nichtnegativen, ganzen Elementen gegeben und nennt man ein System von Reihen, welches die i-te Zeile, bzw. die j-te Kolonne mit der Multiplizität λ_i, bzw. μ_j enthält, ein bedeckendes Reihensystem, wenn

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n)$$

ist, so ist das Maximum der «Diagonalsummen»

$$a_{1\nu_1} + a_{2\nu_2} + \cdots + a_{n\nu_n}$$

(wo $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ sämtliche Permutationen von $1, 2, \ldots n$ durchlaufen) gleich der Minimalzahl der bedeckenden Reihen, d. h. unter den Bedingungen

$$\lambda_i + \mu_j \geqq a_{ij}, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n)$$

ist

$$\text{Min.} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) = \text{Max.} \sum_{i=1}^{n} (a_{i\nu_i}).$$

Im § 3 wird der folgende duale Satz aufgestellt und bewiesen. Diejenigen $n!$ verschiedenen Matrizen n-ten Grades $\| \delta_{ij}^{\rho} \|$ $(\rho=1, 2, \ldots n!)$ die aus der Einheitsmatrix durch Permutation der Zeilen hervorgehen, sollen (im Gegensatz zu den Parallelreihen) «Diagonalreihen» genannt werden. Ein System von Diagonalreihen, welches die Diagonalreihe $\| \delta_{ij}^{\varrho} \|$ mit der Multiplizität ν_ϱ enthält, sei bedeckendes Diagonalreihensystem genannt, wenn

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{ij}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Dann ist das Maximum der «Parallelsummen»

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}, \quad a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

gleich der Minimalzahl der bedeckenden Diagonalreihen, d. h. unter den Bedingungen

$$\sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho \delta_{i}^{\varrho} \geqq a_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

ist

$$\text{Min.} \sum_{\varrho=1}^{n!} \nu_\varrho = \text{Max.} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu j} \right).$$

Die genannten Sätze lassen sich, bei Einführung der Gewichte an Stelle der Multiplizität der Reihen, auf Matrizen mit beliebigen reellen Elementen ausdehnen.

E. Egerváry.