Párosítások páros gráfokban és a magyar módszer

Hajnal Péter

2021. tavasz

Gráfelmélet: A párosítások definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M-beli él.

• Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik.

• Egy M élhalmaz egy párosítás, ha éppen annyi csúcsra illeszkedik, mint amennyi a fenti gondolatmenet alapján egy felső becslés.

• Másképpen: M élhalmaz egy párosítás, ha nem tartalmaz hurokélet és semelyik két élének nincs közös végpontja.

• Szemléletesen: M élei párokat alakítanak ki a V csúcshalmaz bizonyos elemei között. Azaz M elemei/élei a párosítás párjai.

Felső becslés párosítások méretére

- Ha egy M párosításra $|M| = k$, akkor k párunk van. Az M-beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$.

Definíció: Párosított csúcsok

Legyen M egy párosítás. Az M elemeire illeszkedő — az M által lefedett — csúcsokat *párosított pontoknak* nevezzük.

Ha M egy párosítás, akkor az M által párosított csúcsok száma $2|M|$. Azaz $2|M| \leq |V(G)|$. Azaz beláttuk, hogy

Észrevétel

Ha M egy párosítás, akkor

$$|M| \leq \frac{|V(G)|}{2}.$$

Teljes párosítások

Definíció

Egy n pontú gráfban M *teljes párosítás*, ha párosítás és elemszáma $n/2$. Azaz az M párosítás teljes párosítás, ha az összes csúcs párosított csúcs.

- Nyilván csak páros pontszámú gráfban lehet teljes párosítás.
- A páratlan pontszám kizárja a teljes párosítás létezését.
- A páros pontszám nem garantálja a teljes párosítás létezését.

Bemelegítő példák

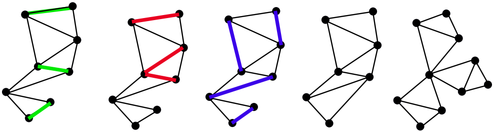
Példa

$\emptyset$ mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Példa

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

Példák



- A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúcs) az első gráfban.
- A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúcs, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik).
- A zöld élek (3 él) párosítást alkottak, de NEM teljes párosítást ($|V|/2 = 4$).
- A kék élek párosítást alkotnak, elemszámuk $4 = |V|/2$, azaz a kék élek teljes párosítást adnak.
- Az utolsó előtti gráfnak páratlan sok csúcsa van. Nem lehet benne teljes párosítás.

Optimalizálás

- Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni. Ami nehezebb: minél nagyobb párosítást találni egy adott gráfban.

- A párosítások alapfeladata: Adott gráfban keressünk egy párosítást, amely mérete/elemszáma a lehető legnagyobb.

Definíció

$$\nu(G) = \max\{|M|| \; M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

- Azaz az alapfeladat egy új megfogalmazása: Adott G gráf esetén határozzuk meg/számítsuk ki $\nu(G)$-t.

Példák

Példa: Teljes gráfok.

$\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

- Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcsot, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lceil n/2 \rceil$ élű párosítást adnak.

Példa: $n+1$ pontú/n élű csillag.

Legyen S_{n+1} az az $n+1$ pontú fa, amely egy speciális csúcsot (középpont) és ezt az összes többi (n darab) csúccsal összekötő n élet tartalmaz.

$$\nu(S_{n+1}) = 1.$$

- Bármelyik éle egy 1 elemű párosítást alkot.
- Viszont bármely két éle összefut, azaz egyik élpárja sem lesz párosítás.

Súlyozott optimalizálás

- Egy kicsit nehezítjük a problémát.

- Tegyük fel, hogy G egy élsúlyozott gráf: (G, w), ahol $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Egy e él esetén $w(e)$ az e él súlya.

- Egy F élhalmaz $w(F)$ az F-beli élek súlyainak összege. Azaz $w(F) = \sum_{e:e\in F} w(e)$.

- A párosítások súlyozott alapfeladata: Adott élsúlyozott gráfban keressünk egy párosítást, amely súlya a lehető legnagyobb.

Definíció

$$\nu_w(G) = \max\{w(M) |\ M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

- Ha $w \equiv 1 \in \mathbb{R}^E$, akkor a súlyozott probléma az eredeti kérdést adja vissza.

Emlékeztető: páros gráfok

Definíció: Páros gráfok.

G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon.

• A két osztályra sokféleképpen hivatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek gyárak/raktárok. Lehetnek felhasználók/szolgáltatók. Lehetnek felvételizők/szakok. Lehetnek diákok/kollégiumok. Lehetnek bal/jobb oldali csúcsok. Lehetnek alsó/felső csúcsok.

• Mi ez utóbbi terminológiát alkalmazzuk. Ezt a páros gráfok lerajzolásánál is tükrözzük: a csúcsok egy vízszintes egyenes alá és fölé kerülnek. Összekötések csak az egyenesre vontakozólag „keresztbe” lesznek.

Páros gráfok II.

Tétel

Legyen G egy gráf. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) G páros,

(i)' G jól kétszínezhető,

(ii) G minden köre páros hosszú,

(ii)' G-nek nincs páratlan hosszú köre.

- Alkalmazásokban általában olyan páros gráfokkal foglalkozunk, ahol a két osztály adott. Ilyenkor azt írjuk, hogy $(G; A, F)$.

Hozzárendelési probléma

Legyen adott egy $(G; A, F)$ páros gráf és egy $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény.

Hozzárendelési probléma

A fenti input mellett keressünk egy maximális súlyú párosítást.

Egyszerűsítő feltételek:

- Feltehető, hogy $|A| = |F|$. Valóban: A kisebb színosztályt kiegészíthetjük új csúcsokkal, hogy a két színosztály azonos elemű legyen.
- Feltehető, hogy gráfunk teljes. Valóban: A nem összekötött csúcsokat összeköthetjük 0 súlyú éllel.
- Feltehető, hogy a teljes párosítások között keressük az optimumot

Mi ezekkel a feltevésekkel nem élünk.

Mátrix nyelvezet

• Legyen $(G; A, F)$ egy páros gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$ egy élsúlyozás. Ekkor ezt egy $A \times F$ típusú mátrixszal kódolhatjuk. Az $a \in A$ sor és $f \in F$ oszlop találkozásában álljon $w(af)$, ha $af \in E$ és álljon $-\infty$, ha $af \notin E$.

• Egy M párosítás a fenti mátrixban néhány $\mathbb{R}$-beli elem. Gondoljunk ezekre az elemekre mint karikázott elemek.

• M párosítás mivolta azt jelenti, hogy minden sorban legfeljebb egy karikázott elem lehet és minden oszlopban is legfeljebb egy karikázott elem lehet. Sakk terminológiával: a karikázott elemekre helyezett bástyák nem ütik egymást.

• A feladat úgy karikázni $\mathbb{R}$-beli számokat (a fenti fajta konfigurációban), hogy a karikázott számok összege maximális legyen.

Példa

Egy páros gráf-súly-mátrix, a $-\infty$ elemek él hiányát/tiltásokat kódolnak. A többi elem($\in \mathbb{R}_+$) élt súllyal kódol:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 1 & 2.5 & 3 \\ 1 & -\infty & 3.2 & 1.1 & -\infty \\ -\infty & 1.8 & 1.2 & 2.4 & 2.9 \\ 3.2 & 3.2 & 2 & 2 & 1.3 \end{array}$$

Az előző páros gráf-súly-mátrix a hozzárendelési probléma egy lehetséges megoldásával:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 1 & 2.5 & 3 \\ 1 & -\infty & 3.2 & 1.1 & -\infty \\ -\infty & 1.8 & 1.2 & 2.4 & 2.9 \\ 3.2 & 3.2 & 2 & 2 & 1.3 \end{array}$$

Szünet

Cél: Adott gráfban minél nagyobb párosítás keresése

Első ötlet: Egy M párosítás kiszámítását elemi döntésekre bontjuk: minden élre el kell döntenünk, hogy beválasztjuk-e a párosításba vagy nem.

Mohó párosítási algoritmus

(I) // Inicializálás
Legyen $M = \emptyset$.

(B) // Mohó bővítés
AMÍG létezik $e \in E(G) - M$ él úgy, hogy $M \cup \{e\}$ is párosítás
M-et lecseréljük $M \cup \{e\}$-re.

- Amikor az AMÍG ciklus leáll, akkor az algoritmus is leáll. Az aktuális M élhalmaz az output.
- Leálláskor minden M-en kívüli él összefut valamelyik M-beli éllel.
- A leállás szükségszerű: bármely javítás garantáltan növeli a párosítás élszámát.

Miért mohó?

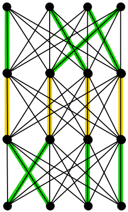
- Az algoritmus mohó jelzője egy negatív jelző.

- Onnan ered, hogy nem vonjuk vissza soha a korábbi döntésünket, vagyis ha egy élt egyszer beválasztottunk a párosításba, már nem vesszük ki később.

- Azzal, hogy korábbi döntésünket nem bíráljuk felül egy nagyon hatékony, egyszerű eljárást kapunk.

- Sajnos nincs garancia, hogy az output optimális. Elakadás esetén tudjuk, hogy párosításunk egy speciális módon, a mohó módon nem javítható. Ez nem jelenti azt, hogy ettől eltérő módon nem tudunk nagyobb párosításhoz jutni.

Példa



- Gráfunknak négy ugyanannyi csúcsot (legyen ez n, az ábrán $n = 4$) tartalmazó „emelete” van.
- Két szomszédos emelet között minden élt behúztunk, további élek nincsenek.
- A sárga élek egy teljes párosítást alkotnak a két középső szint között.
- Ha a mohó algoritmus ezeket választja ki először, akkor elakad: n élt tartalmaz outputja.
- A zöld élek egy teljes párosítást alkotnak ($2n$ darab él).

Lefogó ponthalmazok definíciója

Definíció

Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L-beli.

- $V(G)$ mindig lefogó ponthalmaz.
- Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden v csúcsra $V(G) - \{v\}$ is lefogó.
- Nyilván minél kisebb lefogó ponthalmaz keresése az érdekes. Ez egy optimalizálási feladat.

Jelölés

$$\tau(G) = \min\{|L| : \ L \text{ lefogó csúcshalmaz}\}$$

Lefogó ponthalmazok „mesével"

- A fogalmat a következő „mesével" világíthatjuk meg.

- Adott egy múzem. Ennek térképét egy gráf írja le. Az élek egyenes folyosók, a csúcsok a folyosók talákozási pontjai. Őrökkel szeretnénk védeni a múzeumot.

- Az őrök csúcsokba ültethetők/állíthatók, ahol az ott összefutó összes folyosót ellenőrzésük alatt tarthatják.

- Ha célunk úgy elhelyezni az őröket, hogy minden folyosó védve legyen, akkor egy lefogó ponthalmazt kell keresnünk.

Példák

Példa: Teljes gráfok

$$\tau(K_n) = n - 1.$$

- Tetszőlegesen választott $n-1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot).
- Tetszőleges $n-2$ elemű csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek. Azaz nincs $n-2$ elemű lefogó ponthalmaz.

Példa: Csillaggráfok.

$$\tau(S_{n+1}) = 1.$$

- A középpont által álkotott egyelemű csúcshalmaz az összes élt lefogja.
- Az üreshalmaz csak az üresgráfban lefogó csúcshalmaz.

Lefogások/párosítások: a kapcsolat

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

Észrevétel

Legyen G egy tetszőleges gráf. Benne $M \subset E$ egy párosítás és $L \subset V$ egy lefogó csúcshalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

Valóban: a párosítás éleinek legalább egyik végpontja L-beli. A párosítás mivolt miatt bámelyik végponttal „oldjuk meg” egy párosításbeli él lefogását különböző csúcsokhoz kell jutnunk. Azaz tetszőleges lefogáshoz legalább $|M|$ csúcs kell.

Következmény

Tetszőleges G gráfra

$$\nu(G) \leq \tau(G).$$

A séma

- Tehát annak megmutására, hogy nincs $k+1$ élű párosítás egy lehetőség: k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.

- Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5-t.

  (i) Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra).

  (ii) Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk: A legkisebb lefogó ponthalmaz mérete 3, másképpen nincs 2-elemű lefogó ponthalmaz.

A mohó párosítás kereső algoritmus alaptétele

Legyen $\nu_{\text{mohó}}(G)$ a mohó algoritmus egy tetszőleges futásának mérete.

Tétel

$$\frac{\nu(G)}{2} \leq \nu_{\text{mohó}}(G) \leq \nu(G).$$

• A második egyenlőtlenség nyilvánvaló abból, hogy a mohó algoritmus egy párosítást számol ki.
• Legyen $M_{\text{mohó}}$ a mohó algoritmus outputja, $L = V(M_{\text{mohó}})$ a mohó algoritmus otputja által párosított pontok halmaza.
• Nyilvánvaló, hogy L lefogó ponthalmaz és $|L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$.
• Így L mérete minden párosítás méretét felülről becsli, speciálisan $\nu(G) \leq |L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$.

Szünet

Cél: Adott gráfban minél nagyobb párosítás keresése

További ötlet: Javítsunk ügyesebben.

Definíció: Javító út.

Legyen G gráf M párosítás G-ben, $P: v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ egy út. P út javító út M-re nézve, ha v_0 és v_k nem párosítottak, k páratlan és a páros sokadik élek elemei M-nek.

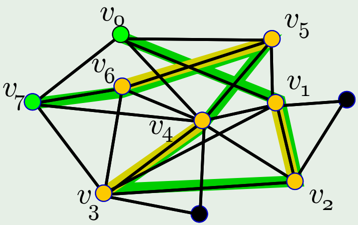
• A P javító út segítségével kapott $M' = (M \backslash E(P)) \cup (E(P) \backslash M) = M \triangle E(P)$ élhalmaz párosítás.
• Azaz M'-be P mentén pontosan azon P-beli éleket rakjuk, melyek eredetileg nem voltak M-ben, P-n kívül a párosítás nem változik. Könnyen látható, hogy így mindig eggyel nagyobb élszámú párosítást kapunk.

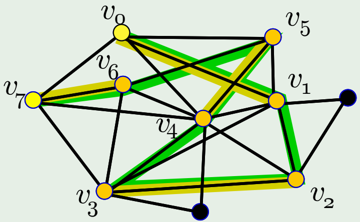
Definíció: Javító utas javítás.

$M \leftarrow (M \backslash E(P)) \cup (E(P) \backslash M) = M \triangle E(P)$ váltást az M párosítás javító utas javításának nevezzük

Példa

Példa





A sárga párosításra nézve a zöld út javító út.

A második ábrán a javított párosítás látható.

Javító utas párosítási algoritmusok sémája

Ezzel sémát kaptunk nagy párosításokat kereső algoritmusokra, amiket javító utas algoritmusoknak nevezünk. Ezek általános vázlata:

Javító utas párosítási algoritmusok sémája

// Adott egy G gráf és benne egy M párosítás.

(J) // Javító utas növelés
AMÍG találunk M-re vonatkozó javító utat M-et lecseréljük $M\Delta E(P)$-re.

• Jó megvalósítás esetén elakadáskor lesz egy párosításunk, ami nem növelhető javító utakkal.
• Itt sincs ciklizálási veszély, mert bármely javítás garantáltan növeli a párosítás élszámát, ezért az algoritmus
• Az 1 hosszú javító út menti javítás a mohó javítás.

Berge-tétel

- Azaz a javító utas algoritmusok a mohó algoritmus kiterjesztései. A mohó algoritmus elkadására korábban láttunk példát. Könnyű ellenőrizni, hogy azon futva a javító utas algoritmusok megtalálják a teljes párosítást. Ez nem véletlen.

Berge-tétel

G gráf, M párosítás. Ha M nem optimális, akkor létezik rá javító út.

- A tétel másképpen: Ha a javító utas párosító algoritmus elakad, akkor az aktuális párosítás optimális.

- A javító utak hatékony keresése nem egyszerű! Keresésünknek olyanak kell lenni, ha sikertelen, akkor ne is legyen javító út. Egy gráfban az utak teljes sokasága hatalmas lehet. Így ennek végignézése általában túl sokáig tart.

Javító út keresése: az ötlet

Definíció: Javító út kezdemény

P javító út kezdemény, ha $P : v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ út, és $v_0 \notin V(M)$, valamint a páros indexű élek elemei M-nek.

- Javító út kezdeményeket keresünk és ezeket párhuzamosan növeljük annak reményében, hogy javító úttá terjesztjük ki őket.
- Keresésünk megvalósítása egy címkézés lesz: A csúcsokra címkéket helyezünk, aminek jelentése: oda vezető javító út kezdeményt találtunk.
- Ezen címkék egy kicsit több információt tartalmaznak mint az odavezető javító út kezdemény megtalálásának ténye. Ha a megtalált javító út kezdeménye páros hosszú akkor a csúcs „külső" címkét kap, ha pedig páratlan hosszú, akkor „belső" címkét kap.
- Legyen C a címkézett csúcsok halmaza és K a külső, B a belső címkézett pontok halmaza. Nyilván $C = K \dot{\cup} B$.

Javító út keresése: az ötlet II

- A mohóság abban nyilvánul meg, hogy a címkehalmaz folyamatosan bővül, és nincs felülírás. Azaz, ha azt tapasztaljuk, hogy már címkézett pontba egy eddig nem látott javító út kezdemény halad, akkor ezt elvetjük („későn vettük észre"). Az eredeti javító út kezdemény (amire a címkézést korábban alapítottuk) lesz az amit folytatni próbálunk.
- Kiinduló címkehalmazt választunk (ezek pontok lesznek, amikbe egy 0 hosszú javító út kezdeményt találtunk, azaz $\overline{V}(M)$ egy részhalmaza) és a címkézést külső pontokból mohó módon bővítjük.
- Külső pontok bármely címkézetlen szomszédja belső címkét kaphat.
- Ha párosítatlan csúcs címkét kap, akkor javító utat találtunk.
- Belső párosított csúcs párosított szomszédja külső címkét kap. (Biztos, hogy címkézetlen? Igen. Miért?)

A páros gráfok esete

Megállapodás páros gráfokra

A keresést alsó (párosítatlan) csúcsokból indítjuk. // A külső pontok mind alsó pontok lesznek. A belső pontok mind felső pontok lesznek.

Jelölés

$$C_A = K, C_F = B.$$

Mohó javító út kereső algoritmus páros gráfokban

Az algoritmus

(I) // Inicializálás
A $C_A = A - V(M)$, $C_F = \emptyset$ halmazokkal indulunk.
// Az alsó párosítatlan csúcsokat úgy tekintjük, hogy 0 hosszú javító utak végpontjai.

(K) // Keresés
AMÍG találunk $k \in C_A$ csúcsot és s címkézetlen szomszédját

- (S) Ha $s \in F$ nem párosított csúcs, akkor a $k \in A$-ba vezető javító út kezdeményt $s \in F$-be meghosszabbítva egy javító utat kapunk.
  // Sikeres keresés
- (N) Ha $s \in F$ párosított csúcs, akkor legyen $s' \in A$ az M-beli párja. $C_A \leftarrow C_A \cup \{s'\}$, $C_K \leftarrow C_K \cup \{s\}$, $C \leftarrow C \cup \{s, s'\}$.
  // Címke bővítés

Észrevételek

Észrevétel

A címke kiosztás az inicializálás után páronként történik. Egy alsó és egy felső csúcs kap címkét, amelyek párosított csúcsok.

Észrevétel

Ha nem tudunk további (címkézetlen) csúcsot megcímkézni, akkor az alsó címkézett csúcsokból nem vezet felső címkézetlen csúcshoz él.

A keresés vége

Kétféle leállás:

- Sikeres keresés. // Tiszta. Javító utat találtunk.
- Kifullad a címkézés. // Sikertelen keresés

Tétel

Sikertelen keresés esetén:

(i) $L := (V(M) \cap C_F) \cup ((V(M) \cap A) - C_A)$
// A címkézett párosított élek felső végpontja és a címkézetlen párosított élek alsó végpontjai egy lefogó ponthalmaz.

(ii)

$$|L| = |M|,$$

(iii) L és M is optimális,

(iv) nem létezik javító út M-re.

Összefoglalás

Tétel

A javító utas párosító algoritmus a páros gráfokban leírt javító út kereséssel:

(i) Legfeljebb $\min\{|A|, |F|\}$ javítás után sikertelen kereséssel leáll, amikor is az aktuális párosítás optimális.
// Azaz algoritmusunk megoldja a súlyozatlan hozzárendelési eljárást.

(ii) Minden keresési lépés legfeljebb $|V|$ címke kiosztás után talál javító utat, vagy kifullad.

Kőnig Dénes tétele

Ha G páros, akkor

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Szünet

Algebraizálás: az ötlet

Adott $(G; A, F)$ páros gráf. Keresünk egy M teljes párosítást. Arról szeretnénk dönteni, melyik él kerüljün bele.

Jelölés

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in M \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Feltételek:

- Minden $e \in E$ esetén x_e nemnegatív egész.
- Az $a \in A$-ban összefutó élek változói legfeljebb egy élt azonosítanak, az a-t esetleg párosító élt.
- Az $f \in F$-ban összefutó élek változói legfeljebb 1 élt azonosítanak, az f-et esetleg párosító élt.

A lehetséges megoldások: párosítások karakterisztikus vektorai.

Algebraizálás: képletek

Feltételek:

(F_a)

$$\sum_{e:a|e} x_e \leq 1, \quad \text{minden } a \in A \text{ csúcsra,}$$

(F_f)

$$\sum_{e:f|e} x_e \leq 1, \quad \text{minden } f \in F \text{ csúcsra,}$$

$(E + I)$

$$x \succeq 0, \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

Algebraizálás: mátrix alak

Definíció

$$
I\ell\ell_G = \begin{array}{cc} & e \\ v & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \begin{cases} 1 & \text{ha } v I e \\ 0 & \text{különben} \end{cases} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{V\times E},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} := \mathbf{1} \in \mathbb{R}^V
$$

- $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ minden oszlopában két darab 1-es szerepel. Ebből egy az A-beli csúcsoknak megfelelő sorokban, egy az F-beli csúcsoknak megfelelő sorokban.

Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

Maximalizáljuk	$w^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$I\ell\ell_G x \preceq 1$
	$x \succeq 0$
	$x \in \mathbb{Z}^V$,

ahol $w \in \mathbb{R}^E$ az élhosszakat tartalmazó vektor.

• Az utolsó sor a keresett x vektor koordinátáinak értékeiről követeli meg, hogy egészek legyenek. Az utolsó sortól/feltételtől eltekintve egy LP feladatot látunk. Egy IP feladatként kódoltuk problémánkat.

Az IP feladatunk LP relaxációja

A hozzárendelési probléma relaxációja

Maximalizáljuk	$w^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$I\ell\ell_G x \preceq 1$
	$x \succeq 0$

Tétel

Legyen R egy tetszőleges négyzetes részmátrixa az $I\ell\ell_G$ mátrixnak, ahol G egy páros gráf. Ekkor $\det R \in \{-1, 0, 1\}$

Azaz:

Tétel

Ha G páros, akkor $I\ell\ell_G$ TU tulajdonságú.

A főtétel következménye

Következmény

Ha a korábbi

Maximalizáljuk	$w^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$I\ell\ell_G x \preceq 1$
	$x \succeq 0$

LP relaxációt szimplex módszerrel megoldjuk, akkor a kapott optimális bázismegoldás automatikusan *egész* lesz.

Bizonyítása lásd a legrövidebb út problémájának tárgyalásában szereplő analóg tétel tárgyalását.

A főtétel bizonyítása

- Legyen R egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen R egy $k \times k$ méretű mátrix. k-ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$ esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$ eset:
  1. *eset: R egyik oszlopában minden elem* 0*.*

     Lineáris algebra alapján $\det R = 0$.
  2. *eset: R egyik oszlopában pontosan egy* 1*-es elem van (a többi* 0*).*

     Eszerint az oszlop szerint kifejtve $\det R$-et és alkalmazva az indukciós feltevést adódik az állítás.
  3. *eset: R mindegyik oszlopában két* 1*-es van (a többi* 0*).*

     Az R-beli sorok közül az A-beli csúcsoknak megfelelő sorok összege kiadja az R-beli sorok közül az F-beli csúcsoknak megfelelő sorok összegét. Lineáris algebrai ismereteink alapján $\det R = 0$.

Az LP algoritmus

LP algoritmus a hozzárendelési problémára

(1) Írjuk fel a hozzárendelési probléma IP formalizálásának LP relaxációját.

(2) Futassuk a szimplex módszert (kezdetben a feltételrendszer mátrixát teljes sorrangúvá ritkítjuk). Szükségszerű, hogy a szimplex mődszer NE „felülről nem korlátos” outputot adjon és legyen lehetséges megoldás. Az optimális bázismegoldás garantáltan egész koordinátájú lesz (főtétel következménye). A bázismegoldás szükségszerűen 0-1 koordinátájú. Azaz a szimplex módszer outputja egy teljes párosítás karakterisztikus vektora.

(4) A szimplex módszer outputja által leírt élhalmazból „kiolvassuk” az optimális hozzárendelést.

Szünet

Miért is magyar a magyar módszer?

- A magyar mődszert H.W. Kuhn dolgozta ki 1955-ben, az LP elmélet, a szimplex módszer ismeretében.

- H.W. Kuhn volt a keresztapa is.

- Kőnig Dénes és Egerváry Jenő 1931-es magyar nyelven publikált kutatásai miatt döntött a név mellett.

- H.W. Kuhn Kőnig Dénes gráfelmélet monográfiáját olvasta, míg az operációkutásbeli hozzárendelési problémán dolgozott. Kőnig Dénes saját eredményeit hasznosnak találta. Lábjegyzet hivatkozott Egerváry Jenő rokon eredményeire.

- Jóval az operációkutatás alapjainak kidolgozása előtt a két magyar matematikus kidolgozta a páros gráfokban lévő párosítások elméletének alaptételeit.

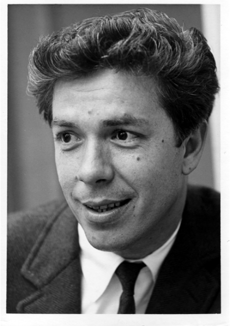
Miért is magyar a magyar módszer? II

- 1931-ben az algoritmikus szemlélet még nem volt jellemző. A magyar nyelvű munkák mátrix nyelvezetben tárgyalta a kérdést (annak ellenére, hogy Kőnig Dénes jól ismerte a gráf nyelvezetet is).

- Kőnig Dénes a súlyozatlan esetet tárgyalta. Egerváry Jenő a súlyozott esetre terjesztette ki Kőnig Dénes eredményeit.

- H.W. Kuhn az ötvenes években teljesen más szemlélettel állt a hozzárendelési problémához. Jelentős ötleteket adott a 30-as években igazolt elméleti eredményekhez. Névadása tisztelet a korai (és jó ideig ismeretlen) magyar kutatásoknak.

A főszereplők: Kőnig Dénes, Egerváry Jenő, Harold W. Kuhn



A magyar módszer feltevései

- Adott $(G; A, F)$ kiegyensúlyozott páros gráf: $|A| = |F|$.
- Továbbá adott w élsúlyozás, amit egy $\mathbb{R}_+^{A\times F}$ négyzetes mátrixszal írhatunk le. Feltettük, hogy gráfunk teljes hiszen a tiltásokat „kódoló” $-\infty$ értékeket nem engedtük meg.
- Maximális súlyú teljes párosítást keresünk.

Példa: Egy lehetséges input és egy lehetséges megoldás

2	5	1	2.5	3
1	3.7	3.2	1.1	0.2
1.8	1.8	1.2	2.4	2.9
3.2	3.2	2	2	1.3
1	1.6	2.2	1.9	2.2

Az alapészrevétel

Egerváry észrevétele

$W \in \mathbb{R}^{A\times F}$ egy négyzetes súlymátrixa egy $(G; A, F)$ páros gráfnak $(|A| = |F|)$.

- Legyen M egy teljes párosítás G-ben.
- Legyen $(\alpha_a)_{a\in A} \in \mathbb{R}^A$ és $(\varphi_f)_{f\in F} \in \mathbb{R}^F$ csúcssúlyozás, amelyre teljesül, hogy

$$w_{af} \leq \alpha_a + \varphi_f, \quad \text{ha } a \in A \text{ és } f \in F \qquad (E)$$

Ekkor

$$w(M) \leq \sum_{a\in A} \alpha_a + \sum_{f\in F} \varphi_f.$$

A kisajtolás

A szokásos kisajtolása az ötletnek:

Következmény

Legyen G kiegyensúlyozott páros gráf, W négyzetes súlymátrix. Ekkor

$$\max\{w(M) : M \text{ teljes párosítás}\} \leq \min\{\sum_{a\in A}\alpha_a + \sum_{f\in F}\varphi_f : \text{az } (\alpha,\varphi) \text{ csúcssúlyozás (E) tulajdonságú}\}.$$

A következmény

Egerváry észrevétele

$W \in \mathbb{R}^{A\times F}$ egy súlymátrixa egy $(G; A, F)$ páros gráfnak.

• Legyen M egy teljes párosítás G-ben.

• Legyen $(\alpha_a)_{a\in A} \in \mathbb{R}_+^A$ és $(\varphi_f)_{f\in F} \in \mathbb{R}^F$ csúcssúlyozás (E) tulajdonsággal.

Ha

$$w(M) = \sum_{a\in A} \alpha_a + \sum_{f\in F} \varphi_f,$$

akkor M legnagyobb súlyú párosítás. (Mellesleg a csúcssúlyozás a minimális összegű (E) tulajdonságú súlyozás.)

Az egyenlőség elemzése

Elnevezés

Egy (E) tulajdonságú csúcssúlyozásra nézve egy élsúly/él *éles*, ha

$$w(af) = \alpha_a + \varphi_f.$$

Egerváry észrevétele

$W \in \mathbb{R}^{A\times F}$ egy súlymátrixa egy $(G; A, F)$ páros gráfnak.

- Legyen M egy teljes párosítás G-ben.
- Legyen $(\alpha_a)_{a\in A} \in \mathbb{R}_+^A$ és $(\varphi_f)_{f\in F} \in \mathbb{R}^F$ csúcssúlyozás (E) tulajdonsággal.

$$w(M) = \sum_{a\in A} \alpha_a + \sum_{f\in F} \varphi_f,$$

akkor és csak akkor teljesül, ha M élei élesek.

A cél

Az eddigiek összefoglalása

Észrevétel

Ha találunk egy M teljes párosítást és egy $((\alpha_a), (\varphi_f))$ (E) tulajdonságú élsúlyozást úgy, hogy M élei élesek, akkor M egy optimális (maximális súlyú) teljes párosítás.

- Azt mondjuk, hogy M, $((\alpha_a), (\varphi_f))$ egy bizonyító pár (teljes párosítás és csúcssúlyozás párja).

Az algoritmusunk célja

Bizonyító pár keresése.

- Kiindulunk egy M párosításból és egy $((\alpha_a), (\varphi_f))$ csúcssúlyozásból. Például:

$$M = \emptyset, \quad \alpha_a = \max\{w_{af} : f \in F\}(a \in A), \quad \varphi_f = 0(f \in F).$$

A Kőnig-alternatíva

Jelölés

S jelölje az éles élek részgráfját a G páros gráfban.

Ígéret: Algoritmusunk folyamán M végig éles éleket tartalmaz.

A súlyozatlan eset vizsgálatából tudjuk, hogy a következő lehetőségeink vannak:

(i) Találhatunk M-re vonatkozó javító utat S-ben, $M \leftarrow M_{\text{jav}}$ javítást végezhetünk.

(ii) Találhatunk egy $|M| < |A| = |F|$ elemszámú lefogó ponthalmazt S-ben.

(iii) Van egy M teljes párosításunk S-ben (minden éle éles).

Célunk a (iii) alternatíva (bizonyító pár megtalálása) elérése. Az (i) és (ii) alternatíva tárgyalása az érdekes.

(i): Párosítást javító lépés

- A javító út (ezt a súlyozatlan eset megkonstruálja) mentén végezzük el M javítását.

- S-ben dolgozunk, tehát a javított M is éles éleket tartalmaz.

- Megígérjük, hogy M elemszáma sose csökken. Pontosabban: az algoritmus nem párosítást javító részében M nem változik.

- Tehát $|A| = |F|$ javítás után teljes párosításhoz jutunk, ami optimális lesz (bizonyító párt alkot az aktuális csúcssúlyozással).

(ii): Csúcssúlyozás módosítása

- Legyen L ($|L| < |A| = |F|$) egy optimális lefogó ponthalmaz az S gráfban. A súlyozatlan eset tárgyalása alapján ezt algoritmikusan megtaláljuk.

- L minden M-beli élnek pontosan egy végpontját tartalmazza. (Ezt az algoritmus ismerete alapján láthatjuk. De korábbi logikai következtetéseink alapján tudjuk is, hogy ennek így kell lenni.) A többi élnek (ezeket nevessük **lazának**) legalább az egyik végpontja L-beli.

- L lehetőséget ad a csúcssúlyok megváltoztatására: Az L-beli csúcsok súlyát emeljük fel, az $\overline{L}$-beliekét csökkentsük valamely $\delta > 0$ értékkel.

(ii): Csúcssúlyozás módosítása II

Észrevétel

(i) Az M-beli élek élesek maradnak.

(ii) A csúcssúlyozás (E) tulajdonságú marad, ha δ elegendően kicsi.

(iii) Ha δ-t a szűkkeresztmetszetnek választjuk, akkor legalább egy laza él — melynek egyik végpontja sem L-beli — élessé válik.

(iv) A csúcssúlyozás összege csökken.

Magyar módszer

Magyar módszer/Kuhn-algoritmus

(I) // Inicializálás
$M = \emptyset, \quad \alpha_a = \max\{w_{af} : f \in F\}(a \in A), \quad \varphi_f = 0(f \in F).$
A csúcssúlyokat írjuk a mátrix mellé. Tegyük fel, hogy a sorok az alsó csúcsoknak felelnek meg, ezek súlyai legyenek bal oldalon egy első oszlopban. Tegyük fel, hogy az oszlopok a felső csúcsoknak felelnek meg, ezek súlyai legyenek fent egy extra első sorban.
// M elemei táblázatunk bekarikázott elemei. Most nincs karikázott elem.

(S) // S segédgráf felépítése
Minden $w_{af} = \alpha_a + \varphi_f$ esetén a w_{af} elem mellé rakjunk egy „!” jelet.
// A ! elemek megfelelnek az S gráf éleinek.

Magyar módszer II.

Magyar módszer (folytatás)

(J) // Javító út keresése S-ben
A javító út kezdeménnyel elért csúcsok súlyait pipáljuk ki. A javító út kezdeménnyel elért párosított élek karikázott súlyait is pipáljuk ki.

- (J+) Ha találunk javító utat, akkor javítunk:
  $M \leftarrow M_{\text{javított}}$, csúcssúlyozás marad. Vissza (J)-hez.
- (J−) Ha nem találunk javító utat, akkor legyen L a súlyozatlan algoritmus által kiszámolt lefogó ponthalmaz.
  // L csúcsai a pipázott, karikázott elemek oszlopainak és a NEM pipázott, karikázott elemek sorainak felelnek meg. Ezek súlyaihoz tegyünk egy „+" jelet. A többi csúcssúlyhoz tegyünk egy „−" jelet.

  Ha $|L| = |A| = |F|$, akkor M éles élekből álló teljes párosítás. STOP. Ha $|L| = |A| = |F|$, akkor tovább.

Magyar módszer III.

Mgyar módszer (folytatás)

(δ) // A szűk keresztmetszet δ-ra.
Minden olyan elemre amely sora és oszlopa is $-$ jelet kapott számoljuk ki $(\alpha_a + \varphi_f - w_{af})/2$-t. // Az ilyen elemek/élek szükségszerűen lazák, a kiszámolt értékek pozitívok.
Legyen δ a legkisebb kiszámolt érték. // $\delta > 0$.

(C) // A csúcssúlyozás módosítása A $+$ jelű csúcssúlyokhpz adjunk hozzá δ-t. A $-$ jelű csúcssúlyokból vonjunk le δ-t.

Vissza (S)-hez.
// Az új határszámokkal, a régi karikákkal (M marad) újra kiosztjuk a ! jeleket.
// A karikázott elemek garantáltan újból ! jelűek lesznek.

Az algoritmus elemzése

- Nyilván legfeljebb $|A| = |F|$-szer végzünk el javítást az aktuális párosításunkon.

- A csúcssúlyozás átírása után a javító út keresés a régi megcímkézett csúcsokat újra megcímkézi. Sőt egy alsó címkézett csúcsból egy felső címkézett csúcsba vezető él az éles élek gráfjába kerül. Azaz címkézés bővül. Azaz vagy új párosító él címkézetté válik vagy sikeres lesz a keresés. Azaz M „stagnálása" „limitált" hosszú ideig lehetséges.

- Az algoritmus

$$\mathcal{O}(|A| \cdot |A|).$$

csúcs újrasúlyozást végez és garantáltan kiszámol egy bizonyító párt.

- Ha az algoritmus „mélyére nézünk", akkor tudunk „ügyeskedni".

Példa

2	5	1	2.5	3
1	3.7	3.2	1.1	0.2
1.8	1.8	1.2	2.4	2.9
3.2	3.2	2	2	1.3
1	1.6	2.2	1.9	2.2

Szünet

LP értelmezése a magyar módszernek

A hozzárendelési probléma ($|A| = |F|$, teljes gráfban teljes párosítás) LP értelmezése:

Maximalizáljuk $w^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy $I\ell\ell_G x = 1$
$x \succeq 0$

Minimalizáljuk $1^{\mathsf{T}}\mu$-t
Feltéve, hogy $\mu^{\mathsf{T}} I\ell\ell_G \geq w$

ahol $w \in \mathbb{R}^E$, $x = (x_e)_{e\in E}$, $1, \mu \in \mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{A\cup F}$ ($\mu = (\alpha, \varphi)$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}^A$, $\varphi \in \mathbb{R}^F$)

• Mind a primál, mind a duál feladatnak könnyen található lehetséges megoldása. Az optimális megoldások is megtalálhatók szimplex módszerrel.

• Mi a korábban vázol primál-duál megközelítést vázoljuk.

Emlékeztető: Primál-duál séma

(o) A hozzárendelési problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat: (P).

(i) Dualizálunk($\rightarrow (D)$).

(ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ($\rightarrow \mu$).

(iii) A primál oldalon „elfelejtjük” az eredeti súlyozott optimalizálási feladatot. A primál feltételek mellé felvesszük a (μ-re alapozva) lazán teljesülő duál feltételek változóink 0 mivoltát.

(iii)” Ezzel egy kielégíthetőségi problémához jutunk. Ezt megfogalmazzuk mint egy LP feladat($\rightarrow (\widetilde{P}_\mu)$).

(iv) Ez dualizáljuk($\rightarrow (\widetilde{D}_\mu)$).

(v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást($\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.

(v) μ-t módosítjuk $\mu_{\text{módosít}}$ segítségével, hogy egy „jobb” μ-t kapjunk. VISSZA (iii)-hez.

A primál-duál séma: μ

- A dualizált feladat egy Egerváry számozás keresése, és a csúcssúlyok összegének minimalizálása.
- Egy $(\mu_u)_{u \in V} = (\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^V$ duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

Jelölés: Laza és éles élek (μ duális megoldásra)

$L_\mu = \{e = af : \alpha_a + \varphi_f > w_e\}$, $S_\mu = \{e = af : \alpha_a + \varphi_f = w_e\}$.

- Ha $e \in L$, akkor $x_e = 0$-t szeretnénk, ha $e \in S$, akkor $x_e > 0$-t megengedjük. Persze ilyen primális megoldás keresése nem szükségszerűen sikeres (nem optimális μ-nél szükségszerűen sikertelen).

A primál-duál séma: μ-ből (P_μ)

• Amit tehetünk, felírjuk a keresést mint egy LP feladat. Ez a primál feladat egy kombinatorikus változata és persze dualizálunk $(\widetilde{P}_\mu)/(\widetilde{D}_\mu)$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk } \sum_{e\in L} x_e\text{-t} & \\ \text{Feltéve, hogy} & I\ell\ell_G x = 1 \\ & x \succeq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Maximalizáljuk} 1^{\mathsf{T}}\alpha + 1^{\mathsf{T}}\varphi\text{-t} & & \\ \text{Feltéve, hogy} & \alpha_a + \varphi_f \leq 1 & af \in L \\ & \alpha_a + \varphi_f \leq 0 & af \in S \end{array}}$$

• $(\widetilde{P}_\mu)$ egy teljes párosítás keresése, amelyben a lehető legkevesebb laza él szerepel. Azaz egy maximális párosítás keresése az éles élek gráfjában (!súlyozatlan feladat!).

• Ha az optimális párosítás teljes az éles élek gráfjában, akkor akkor $(\widetilde{P}_\mu)$ esetén $p^* = 0$. Azaz mint (P) megoldása teljesíti komplementáris lazasági feltételt μ-vel. A teljes párosítás (és μ Egerváry számozás is) optimális.

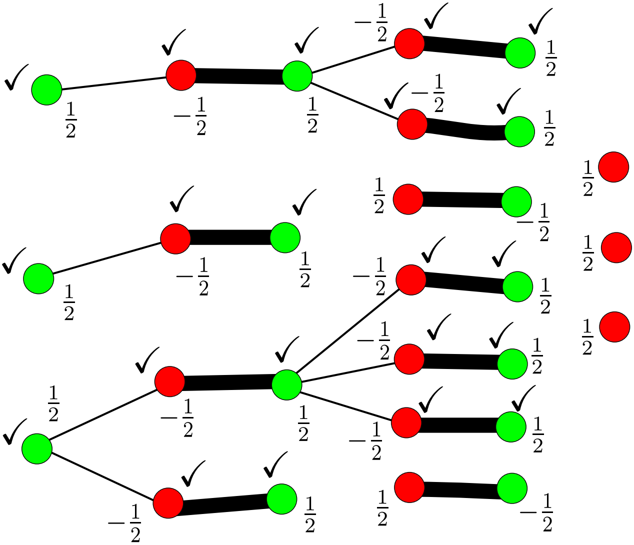
A primál-duál séma: $(\widetilde{P}_\mu)/(\widetilde{Q}_\mu)$ optimális értéke nem 0

- Tervünk következő része, ha $(\widetilde{P}_\mu)/(\widetilde{Q}_\mu)$ optimuma nem 0, akkor $(\widetilde{Q}_\mu)$-nek

Maximalizáljuk	$1^\mathsf{T}\alpha + 1^\mathsf{T}\varphi$-t	
Feltéve, hogy	$\alpha_a + \varphi_f \leq 1$	$af \in L$
	$\alpha_a + \varphi_f \leq 0$	$af \in S$

keresünk egy „ügyes" megoldását, amit μ módosítására használunk.

Mit látunk a súlyozatlan esetben? $\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$



μ módosítása

- A megkonstruált $\mu_{\text{módosít}}$ használható μ javítására. Ekkor már a súlyokat figyelembe kell venni. A szűk keresztmetszet alapján dolgozunk.

- A primál-duál módszer kidolgozása a hozzárendelési feladat esetén a magyar módszert adja vissza:

  - Az Egerváry-számozás a duális feladat egy lehetséges megoldása.
  - A párosítás javítása a primál megoldás módosítása.
  - Az Egerváry-számozás módosítása a duál megoldás módosítása.
  - Minden módosítás a komplementáris lazaság teljesülése felé vezet.
  - A komplementáris lazaság teljesülése a bizonyító pár fogalmával egyezik.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!