Legsúlyosabb feszítőfa

Hajnal Péter

2021. tavasz

Gráfelmélet: A fa definíciója

A fagráfok alatétele

Legyen F egy gráf. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) F összefüggő, de tetszőleges $e \in E(F)$ élére $F - e$ nem összefüggő. // F **minimális összefüggő gráf.**

(ii) F körmentes, de belőle élbővítéssel kapott tetszőleges F^+ gráf már tartalmaz kört. (Élbővítés: $e = uv \notin E(F)$, $u, v \in V(G)$, $V(G^+) = V(G)$, $E(G^+) = E(G) \cup \{e\}$.) // F **maximális körmentes gráf.**

(iii) F összefüggő, körmentes gráf.

(iv) F bármely két csúcsa között pontosan egy út halad.

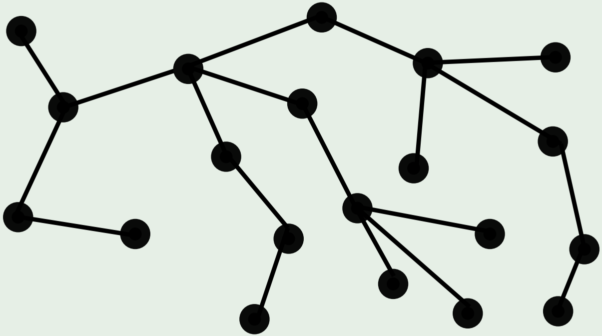
(v) F felépíthető ághajtásokból F_0-ból, 1 pontú, 0 élű fából (F_0 minimális fa). ($G \to \widetilde{G}$ **ághajtás**: $e = uv \notin E(G)$, $u \notin V(G)$ $v \in V(G)$, $V(\widetilde{G}) = V(G) \cup \{u\}$, $E(\widetilde{G}) = E(G) \cup \{e\}$.)

Fagráfok: példák

Definíció: Fagráf.

F fagráf, ha a fenti valamelyik feltételt teljesíti.

Példa: Fák.



Feszítőrészgráfok

Definíció: Feszítő részgráf

S a G gráf feszítő részgráfja G-nek, ha S csak élek elhagyásával megkapható G-ből.
Azaz: S pontosan akkor feszítő részgráf, ha egy részgráf és $V(S) = V(G)$.

Észrevétel

Ha G-nek van feszítő fa részgráfja, akkor összefüggő.

Segédtétel

G akkor és csak akkor összefüggő, ha G-nek van feszítő fa részgráfja.

Definíció: Feszítőfa.

F a G gráf feszítőfája, ha egy feszítő fa részgráfja G-nek.

Ismeretek a fagráfokról

Lemma

Egy legalább kétpontú fában legalább két 1-fokú csúcs van. //
Egy fa 1-fokú csúcsait leveleknek nevezzük.

Tétel

Egy n pontú fának pontosan $n-1$ éle van.

Észrevétel

Az n pontú teljes gráfnak n^{n-2} feszítőfája van (Cayley-tétel), de mindegyiknek ugyanannyi/$n-1$ éle van.

Az alapkérdés

- Legyen G egy nem negatív élsúlyokkal rendelkező gráf: $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$.
- w természetes módon kiterjeszthető élhalmazokra: $R \subset E(G)$ esetén $w(R) = \sum_{e:e\in R} w(e)$.

Legnagyobb súlyú feszítőfa meghatározása

Adott egy G összefüggő (egyszerű) gráf. Keressük meg a legnagyobb súlyú körmentes élhalmazát

- Az optimumot nyilvánvalóan egy feszítőfa élhalmaza adja. (Miért? Ugye emlékszünk, w nemnegatív súlyozás.)
- A feszítőfák élhalmazai, mint lehetséges optimumhelyek ugyanakkora méretűek. (Súlyozatlan eset $\equiv$ egy feszítőfa megkeresése.) Tehát az alábbi probléma ekvivalens a fentivel.
- **Legkisebb költségű feszítőfa:** Adott G összefüggő gráf $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ élköltségekkel. Határozzunk meg G egy legolcsóbb feszítőfáját.

Az alapötlet: Mohóság

- Kiindulunk az $F = \emptyset$ körmentes élhalmazból. $H = E(G)$ az összes él halmaza, az eddig nem vizsgált/hátralévő élek halmaza. F és H az algoritmus során dinamikusan változó élhalmazok. Az output, a leálláskori F.

- Minden lépésben H egy ígéretes élét kiválasztjuk. Megvizsgáljuk, vagy F-be beválasztjuk, vagy eldobjuk.

- **Ígéretes:** H legsúlyosabb éle. // A természetes döntés.

- **Mohóság:** F csak nőhet. Korábbi beválasztásainakat nem bíráljuk felül.

Kruskal-algoritmus

Kruskal-algoritmus (1956)

(I) // Inicializálás
$F = \emptyset$

(R) // Rendezési lépés
Rendezzük sorba $E(G)$ elemeit csőkkenő súlyok szerint:

$$E(G): \quad e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{m-1}, e_m,$$

ahol $w(e_1) \geq w(e_2) \geq w(e_3) \geq \ldots \geq w(e_{m-1}) \geq w(e_m)$.

(D) // Döntési lépések
$i = 1, 2, 3, \ldots, m-1, m$ esetén vizsgáljuk meg e_i-t:

- Ha $F \cup \{e_i\}$ körmentes, akkor $F \leftarrow F \cup \{e_i\}$. Ha $i < m$, akkor $i \leftarrow i + 1$.
- Ha $F \cup \{e_i\}$ tartalmaz kör élhalmazát, akkor F „marad”. Ha $i < m$, akkor $i \leftarrow i + 1$.

Az alaptétel

Tétel

A Kruskal algoritmus outputja egy optimális (maximális súlyú) feszítőfa élhalmaza.

Legyen G, w egy tetszőleges összefüggő, élsúlyozott gráf

Jelölés

Legyen $o_1, o_2, \ldots, o_s$ a Kruskal-algoritmus által (ebben a sorrendben) kiválasztott első s él (o_i-k súly szerint csökkenő sorrendben következnek).
Legyen $T = \{t_1, \ldots, t_S\}$ tetszőleges S-elemű körmentes élhalmaz, ahol az élek sorrendje súly szerinti csökkenő sorrend.

Az alaptétel élesítése

Tétel+

(i) $w(o_1) \geq w(t_1)$, $w(o_2) \geq w(t_2)$, ..., $w(o_\sigma) \geq w(t_\sigma)$, ahol $\sigma = \min\{s, S\}$.

(ii) Ha $|T| = S > s$, akkor a Kruskal-algoritmus o_s után még választ o_{s+1} élt.

- A tételt $(i)_\sigma$ és $(ii)_\sigma$ teljes indukcióval igazoljuk.
- Az állítás:

$$(i)_1 \Rightarrow (ii)_1 \Rightarrow (i)_2 \Rightarrow (ii)_2 \Rightarrow (i)_3 \Rightarrow (ii)_3 \Rightarrow \ldots$$

- Az $(i)_1$ eset nyilvánvaló.
- Az indukció lépés egy LEMMÁN múlik.

A LEMMA és bizonyítása

Lemma

Legyen F, F' két körmentes élhalmaz a V csúcshalmazon. Tegyük fel, hogy $|F| < |F'|$. Ekkor található olyan $F' - F$-beli e él. hogy $F \cup \{e\}$ is körmentes legyen

• Legyen G_F az a körmentes gráf (erdő), amely csúcshalmaza V és élhalmaza F.

• Ismert, hogy G_F-nek $|V| - |F|$ komponense van: $c(G_F) = |V| - |F|$.

• Hasonlóan legyen $G_{F'}$ az a körmentes gráf (erdő), amely csúcshalmaza V és élhalmaza F'.

• $G_{F'}$-nek $|V| - |F'|$ komponense van: $c(G_{F'}) = |V| - |F'| < |V| - |F| = c(G_F)$.

• Ez csak úgy képzelhető el, ha egy e F'-beli él G_F két különböző komponensének egy-egy csúcsát köti össze. Speciálisan $e \notin F$.

• Ekkor $F \cup \{e\}$ is körmentes.

A LEMMÁból $(i)_s \Rightarrow (ii)_s$

- Feltehetjük, hogy $|T| = s + 1$ és $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{s+1}\}$, ahol az indexelés sorrendje súly szerinti csökkenő sorrend.
- Legyen $O = \{o_1, o_2, \ldots, o_s\}$. Ekkor $|O| = s < s + 1 = |T|$.
- A LEMMA alapján, van olyan t_i, hogy $t_i \notin O$ és $O \cup \{t_i\}$ körmentes.
- A Kruskal-algoritmus minden élt megvizsgál, t_i-t is.
- O mellé vagy O egy részhalmaza mellé t_i-t beválasztja az algoritmus. Azaz O bővülése t_i vizsgálatánál megtörténik. Készen vagyunk.
- Ha t_i vizsgálatánál nem O egy részhalmaza az aktuális kiválasztott élhalmaz (hanem egy „valódi szuperhalaza"), akkor is készen vagyunk: O bővülése t_i vizsgálata előtt megtörténik

A LEMMÁból $(i)_s, (ii)_s \Rightarrow (i)_{s+1}$

• Legyen $O = \{o_1, o_2, \ldots, o_{s+1}\}$ és $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{s+1}\}$.

• $O^- = \{o_1, o_2, \ldots, o_s\}$ és $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{s+1}\}$ esetét már tárgyaltuk. Gondoljuk végig az előző gondolatmenetet.

• Láttuk, hogy o_{s+1} létezése szükségszerű és ez az elem legkésőbb t_{s+1} vizsgálatánál kiválasztásra kerül.

• A Kruskal-algoritmus vizsgálatait/választásait a súlyok sorrendje alapján végzi. Tehát

$$w(o_{s+1}) \geq w(t_{s+1}),$$

ahogy bizonyítani kellett.

Szünet

Változatok: Jarnik (1930)/Prim (1957)

Fanövelés ötlete

• Mindig lesz egy T fa részgráfunk, ami az output része lesz. Ezt növeljük.

• Kezdetben T egy $r \in V(G)$ gyökércsúcs és üres élhalmaz.

• Egy aktuális T csúcshalmaza $V(G)$, akkor feszítőfánk van: STOP.

• Ha nem, akkor bővítünk: A lehetséges ághajtások közül a legsúlyosabb élt választjuk és elvégezzük ezt az ághajtást/bővítést.

Jarnik—Prim-tétel

A fanöveléses algoritmus utputja egy legsúlyosabb feszítőfa.

Változatok: Borůvka (1926) [Dél-Morvaország elektromosítása]

Párhuzamos fanövelés ötlete

• Mindig lesz egy F erdő részgráfunk, ami az output része lesz. Ezt növeljük.

• Kezdetben F az összes csúcs $V(G)$ halmaza és üres élhalmaz. // F mindig tartalmazza az összes csúcsot.

• Hs F összefüggő, akkor feszítőfánk van: STOP.

• Ha F-nek több komponense van, akkor bővítünk: Minden komponensre a lehetséges ághajtások közül a legsúlyosabb élt kiválasztjuk (döntetlen esetén a legkisebb indexű a nyertes) és ezt hozzáadjuk (párhuzamosan) F-hez.

Borůvka tétele

(i) Az algoritmus folyamán F végig erdő/körmentes lesz.

(ii) Az algoritmus végén F legsúlyosabb feszítőfa lesz.

Változatok: Kruskal (1956)

Él eldobálós ötlet:

• Kiindulunk a teljes (összefüggő) gráfból. Sorban vizsgáljuk az éleket és eldobjuk, ami a legfeleslegesebbnek tűnik.

• Rendezzük az éleket súlyuk szerint **növekvő** sorrendbe. Azaz a legkisebb súlyú él jön legelőször.

• Sorban vizsgáljuk meg az éleket és mindegyiknél döntünk: eldobjuk vagy megtartjuk.

• Egy soron lévő e élt akkor dobunk el, ha az eddig el nem dobott élek közt találunk olyan kört, amely tartalmazza e-t. Így ennek a körnek e a legkönnyebb éle.

Kruskal-tétel

A fenti algoritmus az összes él vizsgálata után egy legsúlyosabb feszítőfa éleit hagyta meg.

. . . és most valami teljesen más

Halmazrendszerek nyelve

Definíció: Halmazrendszerek

$\mathcal{H}$ halmazrendszer V alaphalmaz felett $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(V)$.

V elemeit csúcsoknak, $\mathcal{H}$ elemeit éleknek is nevezzük.

Definíció:

Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer monoton, ha zárt a részhalmaz képzésre. Azaz $E \in \mathcal{H}$ és $R \subset E$ esetén $R \in \mathcal{H}$ is teljesül.

Legsúlyosabb megengedett részhalmaz probléma

A legsúlyosabb feszítőfa probléma egy általánosítása a következő:

Legsúlyosabb megengedett részhalmaz probléma

Adott egy $\mathcal{M}$ nemüres, monoton halmazrendszer az S csúcshalmazon. Továbbá adott egy $w : S \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény. $\mathcal{M}$ elemeit megengedett halmazoknak nevezzük.
Határozzuk meg a legsúlyosabb megengedett halmazt. ($E \subset S$ halmaz súlya $\sum_{x:x\in E} w(x)$.)

- Egy nagyon absztrakt feladat. Sok konkrét problémát speciális esetként tartalmaz.
- Az absztakció ellenére a Kruskal-algoritmus ötlete alkalmazható.
- Megjegyezzük, hogy az alkalmazhatóság az oka, hogy halmazrendszerünk monotonitását feltételnek szabtuk meg.

Mohó algoritmus

Mohó algoritmus

(I) // Inicializálás
$F = \emptyset$

(R) // Rendezési lépés
Rendezzük sorba S elemeit csőkkenő súlyok szerint:

$$S: \quad s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-1}, s_m,$$

ahol $w(s_1) \geq w(s_2) \geq w(s_3) \geq \ldots \geq w(s_{m-1}) \geq w(s_m)$.

(D) // Döntési lépések
$i = 1, 2, 3, \ldots, m-1, m$ esetén vizsgáljuk meg s_i-t:

- Ha $F \cup \{s_i\} \in \mathcal{M}$, akkor $F \leftarrow F \cup \{e_i\}$. Ha $i < m$, akkor $i \leftarrow i + 1$.
- Ha $F \cup \{e_i\} \notin \mathcal{M}$, akkor F „marad”. Ha $i < m$, akkor $i \leftarrow i + 1$.

Három alappélda

Példa: Körmentes élhalmazok

Legyen $S = E(G)$. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(S)$ tartalmazza a körmentes élhalmazokat.

Láttuk, hogy a mohó algoritmus optimális.

Példa: Párosítások élsúlyozott gráfban

Legyen $S = E(G)$. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(S)$ tartalmazza a párosításokat.

A mohó algoritmus nem optimális.

Példa: Párosítással lefedhető felső csúcshalmazok

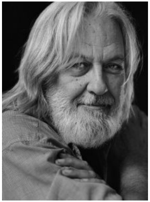
Legyen $S = F$, ahol $(G; A, F)$. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(F)$ tartalmazza a párosítással lefedhető felső csúcshalmazokat.

? ? ? ? ?

Szünet

Az alapkérdés

Mitől működik a mohó algoritmus? Adott $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(V)$ esetén működik a mohó algoritmus, ha MINDEN $w : S \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvényre a legsúlyosabb megengedett halmazt választja ki.



Jack Edmonds

(M) tulajdonság: Hassler Whitney (1935)

Egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(S)$ halmazrendszer (M) tulajdonsága:

$K, N \in \mathcal{F}$ halmazokra $|N| > |K|$ esetén

van olyan $b \in N - K$, hogy $\quad K \cup \{b\} \in \mathcal{F} \quad (M)$

Edmonds tétele

Edmonds tétele

Legyen $\mathcal{M}$ egy részhalmaz képzésre zárt nemüres halmazrendszer V felett. A mohó algoritmus akkor és csak akkor korrekt, ha

$$K, N \in \mathcal{M} \text{ halmazokra } |N| > |K| \text{ esetén}$$
$$\text{van olyan } b \in N - K, \text{ hogy } \quad K \cup \{b\} \in \mathcal{M} \qquad (M)$$

• Legyen w egy tetszőleges nemnegatív súlyfüggvény.
Kruskal-algoritmus helyessége „lemásolható”.

Tegyük fel az (M) tulajdonságot

- Legyen

$$o_1, o_2, \ldots, o_k$$

a mohó algoritmus első k kiválasztott eleme a kiválasztás sorrendjében (vagy ami ugyanaz, súly szerinti csökkenő sorrendben).

- Legyen

$$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\}$$

egy ℓ elemű $\mathcal{M}$-beli halmazt alkotó elem súly szerinti csökkenő sorrendben.

Állítás

(i) Ha $k = \ell$, akkor $w(o_i) \geq w(f_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

(ii) Ha $k < \ell$, akkor a mohó algoritmus választ $k+1$-edik elemet is.

Tegyük fel, hogy (M): $(i)_k \Rightarrow (ii)_k$

- Feltehetjük, hogy $|F| = k+1$ és $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}\}$, ahol az indexelés sorrendje súly szerinti csökkenő sorrend.
- Legyen $O = \{o_1, o_2, \ldots, o_k\}$. Ekkor $|O| = k < k+1 = |T|$, két $\mathcal{M}$-beli/megengedett halmaz.
- (M) alapján, van olyan f_i, hogy $t_i \notin O$ és $O \cup \{f_i\}$ körmentes.
- A mohó algoritmus minden elemet megvizsgál, f_i-t is.
- O mellé vagy O egy részhalmaza mellé f_i-t beválasztja az algoritmus. Készen vagyunk.
- Ha f_i vizsgálatánál nem O egy részhalmaza az aktuális kiválasztott élhalmaz, akkor is készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy (M): $(i)_k, (ii)_k \Rightarrow (i)_{k+1}$

- Legyen $O = \{o_1, o_2, \ldots, o_{k+1}\}$ és $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}\}$.

- $O^- = \{o_1, o_2, \ldots, o_k\}$ és $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}\}$ esetét már tárgyaltuk. Gondoljuk végig az előző gondolatmenetet.

- Láttuk, hogy o_{k+1} létezése szükségszerű és ez az elem legkésőbb f_{k+1} vizsgálatánál kiválasztásra kerül.

- A mohó algoritmus vizsgálatait/választásait a súlyok sorrendje alapján végzi. Tehát

$$w(o_{k+1}) \geq w(f_{k+1}),$$

ahogy bizonyítani kellett.

Tegyük fel, hogy nem teljesül az (M) tulajdonság

Észrevétel: Ha nem teljesül (M), akkor van $N, K \in \mathcal{M}$ megengedett halmazok, hogy $|N| > |K|$ és tetszőleges $b \in N - K$ elemre $K \cup \{b\} \notin \mathcal{M}$.

Súlyfüggvény a $\neg(M)$ feltevéshez

Legyen $\frac{1}{|S|} > \varepsilon > 0$ tetszőleges valós érték.

$$w(x) = \begin{cases} 1+\varepsilon, & \text{ha } x \in K \\ 1, & \text{ha } x \in N - K \\ \varepsilon, & \text{különben.} \end{cases}$$

Milyen súlyú halmazt választ ki a mohó algoritmus?

Mi az N halmaz súlya?

Szünet

A matroid fogalma

Definíció: Matroidok

Legyen S egy alaphalmaz és $\mathcal{F}$ egy halmazrendszer S felett. $\mathcal{F}$-et akkor nevezzük matroidnak, ha teljesül

(o) // Nemürességég

$$\emptyset \in \mathcal{F},$$

(i) // Monotonitás

$$R \subset E \in \mathcal{M} \text{ esetén } R \in \mathcal{M},$$

(M) // Matroid tulajdonság

$$K, N \in \mathcal{F} \text{ halmazokra } |N| > |K| \text{ esetén}$$
$$\text{van olyan } b \in N - K, \text{ hogy } K \cup \{b\} \in \mathcal{F}.$$

A matroidok nyelve

- $F \in \mathcal{F}$ halmazokat *független halmazoknak* nevezzük. Ha

$F \notin \mathcal{F}$, akkor azt mondjuk F *függő*.

- A C minimális függő halmazok a *körök*.
- Az egy elemű körök/függő halmazok a *hurokélek*.
- A maximális független halmazok a *bázisok*.

Példák: Grafikus matroidok

Definíció: Egy G gráf körmatroidja

Legyen G egy gráf. Legyen $S = E(G)$ és legyen $\mathcal{F}$ a körmentes élhalmazok halmaza.

$(S, \mathcal{F})$ jelölése $\mathcal{M}(G)$.

- $\mathcal{M}(G)$ a G gráf körmatroidja.
- $\mathcal{M}(G)$-ben a matroidelméleti körök pontosan G gráfelméleti köreinek élhalmazai.
- $\mathcal{M}(G)$-ben matroidelméleti bázisok pontosan G feszítőfáinak élhalmazai. Feltéve, hogy G összefüggő.

Példák: Lineáris matroidok

Definíció: Egy vektorrendszer matroidja

Legyen $\mathcal{V}$ egy vektortér. Legyen $V = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ vektorok egy rendszere. Azaz lehet ismétlődés a vektorok között ($i \neq j$ esetén $v_i = v_j$ megengedett).
$R(\subset V) \in \mathcal{F}$ pontosan akkor teljesül, ha R vektorai lineárisan függetlenek.

$(V, \mathcal{F})$ jelölése $\mathcal{M}(V)$.

• Ha rögzítjük $\mathcal{V}$ egy bázisát, akkor vektorjaink azonosíthatók egy koordináta sorozattal. Oszlopvektorként egymás mellé írva vektorainkat egy A mátrixot kapunk. A fenti matroid (alaphalmaza A oszlopvektorai) $\mathcal{M}(A)$.

• $M(A)$ egy bázisa oszlopainak maximális lineárisan független részhalmaza. Azaz oszlopai által kifeszített vektortér egy bázisa.

Egy matroidelméleti tétel

Tétel

Legyen $(S, \mathcal{F})$ egy matroid, $R \subset S$ az alapjalmaz egy részhalmaza.

Ekkor tetszőleges R-beli nem bővíthető független ponthalmaz egyben maximális elemszámú független része R-nek.

- A bizonyítás csak egy indirekt feltevés és az (M) tulajdonságra való hivatkozás.
- $R = S$ esetén az állítás azt mondja, hogy egy matroid minden bázisa ugyanakkora elemszámú.

Definíció: Rangfüggvény

Legyen $(S, \mathcal{F})$ egy matroid, $R \subset S$. Ekkor R rangja

$$r(R) = \max\{|F| : F \subset R, F \in \mathcal{F}\}.$$

Egy további példa

Tétel

Legyen $(G; A, F)$ egy páros gráf. $\mathcal{F}$ elemei legyenek pontosan azok a részhalmazai F-nek, amelyeket le tudunk fedni egy párosítással.

Ekkor $(F, \mathcal{F})$ egy matroid.

- (o) és (i) nyilvánvaló.
- (M) bizonyításához legyen $K, N \in \mathcal{F}$ két felső ponthalmaz. Mindkettő $\mathcal{F}$-beli, ezt „bizonyítsák” az M_K, M_N párosítások ($|M_K| = |K|, |M_N| = |N|$).
- Legyen S egy segédgráf, amely csúcsai $V(G)$ és élhalmaza $M_K \cup M_N$.
- S-ben M_K egy nem optimális párosítás. Így van benne javító út, ementén javítható $\to \widehat{M}_K$.
- Legyen $\widehat{K}$ a javított párosítás által lefedett felső csúcsok halmaza. Ez bizonyítja (M)-et.

Vissza az optimalizáláshoz

Alapkérdés

Van egy cégünk.

(i) A $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alkalmazott matematikusokat alkalmaz.

(ii) Egy adott munkaszakasz alatt az $F_1, F_2, \ldots, F_m$ optimalizálási feladatokra köthet szerződést a cég.

(iii) A munkaszakasz alatt egy alkalmazott egy feladaton dolgozhat, egy feladat csak egy alkalmazottat kíván.

(iv) Az F_i feladat elvállalása, teljesítése $p_i \in \mathbb{R}_+$ profitot eredményez.

(v) Hogy melyik alkalmazott melyik feladatot tudja megoldani egy ismert $(G; A, F)$ páros gráf írja le.

Hogyan kössünk szerződéseket a feladatok egy alkalmas részhalmazára, hogy teljesíteni is tudjuk vállalásainkat és a maximális profithoz jusson a cégünk?

A képzetlen menedzser algoritmusa

A képzetlen menedzser algoritmusa

(0) // Inicializálás
A megkötött szerződések listája $S : \emptyset$, az eddig nem vizsgált elvállalható feladatok szerződéseinek listája $L : F_1, \ldots, F_m$, a teljes feladatlista.

(D) // Döntéshozatal
Amíg $L \neq \emptyset$ ismételje
Kiválasztja L-ből melyik hozza a legnagyobb profitot $\to F$.
Ha $S + F$ elvégezhető a cég számára, akkor aláírja az F feladat szerődést. $S \to S + F$, $L \to L - F$.

(M) // Menedzselés
Az S szerződéslistát odaadja a titkárnőnek, hogy postázza, továbbá értesítse a megfelelő alkalmazottakat az őket érintő feladatról. Elutazik a Bahamákra.

A képzett alkalmazott matematikus

• Észreveszi, hogy a felvetett probléma a súlyozott megengedett halmaz keresési probléma speciális esete.
• Észreveszi, hogy a halmazrendszer a párosításokkal lefedhető részhalmazai F-nek, egy páros gráf felső csúcshalmazának.
• Tudja, hogy a mohó algoritmus korrekt választ számol ki.

Tétel

A Képzetlen Menedzser algoritmusa maximális profitot hozó feladathalmazt számol ki.

• Megoldja a ráosztott optimalizálási problémát. (Ne felejtsük el, hogy képzett!)
• Bízik, hogy legközelebb a hozzárendelési problémával szembesül a cég.
• Bízik, hogy rá tud majd mutatni, hogy a képzetlen menedzser döntéseihez képest nagyobb profitot is realizálhat a cég.
• Bízik, hogy fizetésemelést kap.
• Vesz egy naptárt, ami a Bahamákon felvett képekkel díszített.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!