

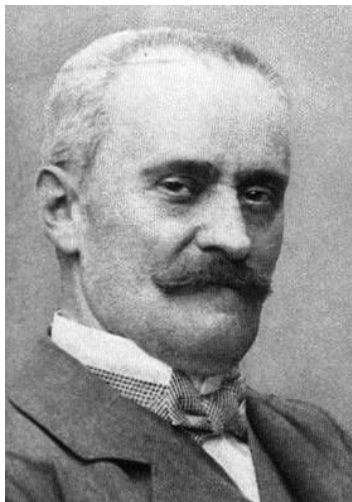
# Farkas-lemma

Hajnal Péter

2021. tavasz

# Farkas Gyula: Fizikus, egyetemi tanár

# Farkas Gyula: Fizikus, egyetemi tanár



Sárosd, 1847. március 28. — Pestszentlőrinc, 1930. december 27.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait.



# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait. 1907–1908-ban az egyetem rektora volt. Érdeklődése az elméleti fizikának csaknem minden ágára kiterjedt.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait. 1907–1908-ban az egyetem rektora volt. Érdeklődése az elméleti fizikának csaknem minden ágára kiterjedt. Ő hívta Kolozsvárra Schlesinger Lajost, Fejér Lipótot, Riesz Frigyest és Haar Alfrédot.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait. 1907–1908-ban az egyetem rektora volt. Érdeklődése az elméleti fizikának csaknem minden ágára kiterjedt. Ő hívta Kolozsvárra Schlesinger Lajost, Fejér Lipótot, Riesz Frigyeset és Haar Alfrédot. 1915-ben Farkas Gyula nyugalomba vonult.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait. 1907–1908-ban az egyetem rektora volt. Érdeklődése az elméleti fizikának csaknem minden ágára kiterjedt. Ő hívta Kolozsvárra Schlesinger Lajost, Fejér Lipótot, Riesz Frigyeset és Haar Alfrédot. 1915-ben Farkas Gyula nyugalomba vonult. Az 1920-as években Farkas Gyula a szegedi Matematikai Szemináriumnak ajándékozta saját könyvtárát.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait. 1907–1908-ban az egyetem rektora volt. Érdeklődése az elméleti fizikának csaknem minden ágára kiterjedt. Ő hívta Kolozsvárra Schlesinger Lajost, Fejér Lipótot, Riesz Frigyeszt és Haar Alfrédot. 1915-ben Farkas Gyula nyugalomba vonult. Az 1920-as években Farkas Gyula a szegedi Matematikai Szemináriumnak ajándékozta saját könyvtárát.
- Különösen a termodinamika axiomatikus megalapozásával és a lineáris egyenlőtlenségek elméletével foglalkozott. Minkowskitól függetlenül felfedezte az elmélet alaptételét, az ún. Farkas-Minkowski-tételt.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait. 1907–1908-ban az egyetem rektora volt. Érdeklődése az elméleti fizikának csaknem minden ágára kiterjedt. Ő hívta Kolozsvárra Schlesinger Lajost, Fejér Lipótot, Riesz Frigyeszt és Haar Alfrédot. 1915-ben Farkas Gyula nyugalomba vonult. Az 1920-as években Farkas Gyula a szegedi Matematikai Szemináriumnak ajándékozta saját könyvtárát.
- Különösen a termodinamika axiomatikus megalapozásával és a lineáris egyenlőtlenségek elméletével foglalkozott. Minkowskitól függetlenül felfedezte az elmélet alaptételét, az ún. Farkas-Minkowski-tételt. A Farkas-lemma a lineáris programozás fontos tétele.

# Farkas Gyula: <https://tudosnaptar.kfki.hu/historia>

- A pesti egyetemen jogot hallgatott, később Jedlik Ányos hatására természettudományi szakot választott.
- 1870-ben a székesfehérvári reáliskola fizika-kémia tanára volt. 1876-ban megszerezte a tanári képesítést.
- 1880-ban doktorált. 1887-től a kolozsvári egyetem fizikatanszékén rendkívüli, 1888-tól rendes tanár. Ekkor kezdte meg kutatásait. 1907–1908-ban az egyetem rektora volt. Érdeklődése az elméleti fizikának csaknem minden ágára kiterjedt. Ő hívta Kolozsvárra Schlesinger Lajost, Fejér Lipótot, Riesz Frigyeszt és Haar Alfrédot. 1915-ben Farkas Gyula nyugalomba vonult. Az 1920-as években Farkas Gyula a szegedi Matematikai Szemináriumnak ajándékozta saját könyvtárát.
- Különösen a termodinamika axiomatikus megalapozásával és a lineáris egyenlőtlenségek elméletével foglalkozott. Minkowskitól függetlenül felfedezte az elmélet alaptételét, az ún. Farkas-Minkowski-tételt. A Farkas-lemma a lineáris programozás fontos tétele.
- 1898-tól az MTA tagja.

# Az M. Tud. Akadémia III. osztályának 1898. október 17.-én tartott üléséből



# Az M. Tud. Akadémia III. osztályának 1898. október 17.-én tartott üléséből

## A FOURIER-FÉLE MECHANIKAI ELV ALKALMAZÁSÁNAK ALGEBRAI ALAPJA.

FARKAS GYULA I. tagtól.

Már két közleményben következtettem ezt. Most ebben a harmadikban aránylag igen egyszerű módon teszem, a melynél egyszerűbbet találni aligha lehetséges, a mennyiben t. i. számon tartjuk, hogy akárhány egymástól független homogen, lineáris egyenlőtlenség rendelhető össze, mihelyt a vezérmennyiségek száma kettőnél nagyobb. Nem számol ezzel az eshetőséggel egy újabb időben közölt e tárgyú német dolgozat sem (HENNEBERG, Crelle Jour. 1894). Pedig leginkább ennek az általánosságnak a szempontjából hasznos az alkalmazás általános analitikai módszere.

Legyen

$$\begin{aligned} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \dots + A_{1n}u_n &\equiv \theta_1 \geq 0 \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \dots + A_{2n}u_n &\equiv \theta_2 \geq 0 \\ \dots &\dots \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (1)$$

egyenlőtlenségi rendszerünk, és ennek minden megoldásában teljesüljön:

$$A_1u_1 + A_2u_2 + \dots + A_nu_n \equiv \vartheta \geq 0. \quad (2)$$

A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapját a következő tantétel képezi: mindig léteznek olyan nem negatív, az  $u$  vezérmennyiségektől független multiplierok  $\lambda$ , hogy

$$\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots \quad (3)$$

# I. alternatíva forma

## Farkas-lemma, I. alternatíva forma

Legyen  $Ax \preceq b$  egy egyenlőtlenségrendszer, ahol  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  és  $b \in \mathbb{R}^k$ . Ekkor a következő két állítás közül

pontosan egy teljesül:

- (i) Az egyenlőtlenségrendszer megoldható, azaz alkalmas  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  szám  $n$ -esre  $Ax_0 \preceq b$ .
- (ii) Alkalmas  $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$  nemnegatív szám  $k$ -asra  $\lambda^T A = 0^T$  és  $\lambda^T b = -1$ .

# Bizonyítás

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.
- Következtetésekkel vezetünk le újabb és újabb egyenlőtlenségeket, amíg a minden változót eliminálunk.

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.
- Következtetésekkel vezetünk le újabb és újabb egyenlőtlenségeket, amíg a minden változót eliminálunk. Ekkor a bal oldalon 0 áll.

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.
- Következtetésekkel vezetünk le újabb és újabb egyenlőtlenségeket, amíg a minden változót eliminálunk. Ekkor a bal oldalon 0 áll.
- A nem megoldhatóság pontosan akkor teljesül, ha a jobb oldalon (az egyenlőtlenség nagyobb oldalán) negatív szám áll.



# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.
- Következtetésekkel vezetünk le újabb és újabb egyenlőtlenségeket, amíg a minden változót eliminálunk. Ekkor a bal oldalon 0 áll.
- A nem megoldhatóság pontosan akkor teljesül, ha a jobb oldalon (az egyenlőtlenség nagyobb oldalán) negatív szám áll. Pozitív számmal szorozva elérhetjük, hogy jobb oldalom  $-1$  álljon.

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.
- Következtetésekkel vezetünk le újabb és újabb egyenlőtlenségeket, amíg a minden változót eliminálunk. Ekkor a bal oldalon 0 áll.
- A nem megoldhatóság pontosan akkor teljesül, ha a jobb oldalon (az egyenlőtlenség nagyobb oldalán) negatív szám áll. Pozitív számmal szorozva elérhetjük, hogy jobb oldalom  $-1$  álljon. Levezettük a  $0 \leq -1$  egyenlőtlenséget.

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.
- Következtetésekkel vezetünk le újabb és újabb egyenlőtlenségeket, amíg a minden változót eliminálunk. Ekkor a bal oldalon 0 áll.
- A nem megoldhatóság pontosan akkor teljesül, ha a jobb oldalon (az egyenlőtlenség nagyobb oldalán) negatív szám áll. Pozitív számmal szorozva elérhetjük, hogy jobb oldalom  $-1$  álljon. Levezettük a  $0 \leq -1$  egyenlőtlenséget.
- A levezetéseknél látott univerzalitás alapján az pontosan akkor teljesül, ha az eredeti egyenlőtlenségekből nem-negatív együthatókkal kikombinálható a  $0 \leq -1$  egyenlőtlenség.

# Bizonyítás

- Azt kell igazolni, hogy az egyenlőtlenség nem megoldhatósága ekvivalens (ii)-vel.
- A megoldhatóságot a Fourier—Motzkin-eliminációval dönthetjük el.
- Következtetésekkel vezetünk le újabb és újabb egyenlőtlenségeket, amíg a minden változót eliminálunk. Ekkor a bal oldalon 0 áll.
- A nem megoldhatóság pontosan akkor teljesül, ha a jobb oldalon (az egyenlőtlenség nagyobb oldalán) negatív szám áll. Pozitív számmal szorozva elérhetjük, hogy jobb oldalom  $-1$  álljon. Levezettük a  $0 \leq -1$  egyenlőtlenséget.
- A levezetéseknél látott univerzalitás alapján az pontosan akkor teljesül, ha az eredeti egyenlőtlenségekből nem-negatív együthatókkal kikombinálható a  $0 \leq -1$  egyenlőtlenség.
- Ez éppen a bizonyítandó.

# Megjegyzések a bizonyításhoz

# Megjegyzések a bizonyításhoz

- A (ii) lehetőség látványosan mutatja az egyenlőtlenség rendszer nem megoldhatóságát:

Példa

$$\begin{cases} x - y + z \leq 0 \\ -2x + y - z \leq -2 \\ y - z \leq 1 \end{cases}$$

# Megjegyzések a bizonyításhoz

- A (ii) lehetőség látványosan mutatja az egyenlőtlenség rendszer nem megoldhatóságát:

## Példa

$$\begin{cases} x - y + z \leq 0 \\ -2x + y - z \leq -2 \\ y - z \leq 1 \end{cases}$$

Mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)



# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Ekkor

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0), \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Ekkor

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0), \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Azaz az eredeti egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Ekkor

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0), \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Azaz az eredeti egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

Hagyományos írásmóddal

$$\begin{array}{rcl} x - y + z \leq 0 & / \cdot 1 & \\ -2x + y - z \leq -2 & / \cdot \frac{1}{2} & \\ y - z \leq 1 & / \cdot \frac{1}{2} & \end{array}$$

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Ekkor

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0), \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Azaz az eredeti egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

Hagyományos írásmóddal

$$x - y + z \leq 0 \quad / \cdot 1$$

$$-2x + y - z \leq -2 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$y - z \leq 1 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

összegezve:  $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -1$

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Ekkor

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0), \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Azaz az eredeti egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

Hagyományos írásmóddal

$$\begin{aligned} x - y + z &\leq 0 & / \cdot 1 \\ -2x + y - z &\leq -2 & / \cdot \frac{1}{2} \\ y - z &\leq 1 & / \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

összegezve:  $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -1$

Azaz nincs megoldás.

## II. alternatíva forma

### Farkas-lemma, II. alternatíva forma

Legyen  $\begin{cases} Ax = b \\ x \succeq 0 \end{cases}$  egy előjel feltételes egyenletrendszer, ahol

$A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  és  $b \in \mathbb{R}^{\ell}$ . Ekkor a következő két állítás

közül pontosan egy teljesül:

- (i) Az előjel feltételes egyenletrendszer megoldható, azaz alkalmas  $0 \preceq x_0 \in \mathbb{R}^n$  szám  $n$ -esre  $Ax_0 = b$ .
- (ii) Alkalmas  $\lambda \in \mathbb{R}^{\ell}$  szám  $\ell$ -esre  $\lambda^T A \succeq 0^T$  és  $\lambda^T b = -1$ .

# Bizonyítás

# Bizonyítás

- Egyenletrendszerünk pontosan akkor megoldható, ha a

$$\begin{cases} Ax \preceq b \\ -Ax \preceq -b \\ -x \preceq 0 \end{cases} \quad \text{egyenlőtlenségrendszer megoldható.}$$



# Bizonyítás

- Egyenletrendszerünk pontosan akkor megoldható, ha a

$$\begin{cases} Ax \preceq b \\ -Ax \preceq -b \\ -x \preceq 0 \end{cases} \quad \text{egyenlőtlenségrendszer megoldható.}$$

- Ezen egyenlőtlenségrendszer NEM megoldhatósága ekvivalens azzal, hogy alkalmas  $\mu, \nu \in \mathbb{R}_+^\ell$  és  $\rho \in \mathbb{R}_+^n$  súlyvektorok esetén

$$\mu^T A - \nu^T A - \rho^T I = 0^T$$

$$\mu^T b - \nu^T b - \rho^T 0 = -1$$

# Bizonyítás

- Egyenletrendszerünk pontosan akkor megoldható, ha a

$$\begin{cases} Ax \preceq b \\ -Ax \preceq -b \\ -x \preceq 0 \end{cases} \quad \text{egyenlőtlenségrendszer megoldható.}$$

- Ezen egyenlőtlenségrendszer NEM megoldhatósága ekvivalens azzal, hogy alkalmas  $\mu, \nu \in \mathbb{R}_+^\ell$  és  $\rho \in \mathbb{R}_+^n$  súlyvektorok esetén

$$\mu^T A - \nu^T A - \rho^T I = 0^T$$

$$\mu^T b - \nu^T b - \rho^T 0 = -1$$

- Ekvivalens módon: alkalmas  $\mu, \nu \in \mathbb{R}_+^\ell$  és  $\rho \in \mathbb{R}_+^n$  súlyvektorok esetén

$$(\mu - \nu)^T A = \rho^T I \succeq 0^T$$

$$(\mu - \nu)^T b = -1$$

# Bizonyítás

- Egyenletrendszerünk pontosan akkor megoldható, ha a

$$\begin{cases} Ax \preceq b \\ -Ax \preceq -b \\ -x \preceq 0 \end{cases} \quad \text{egyenlőtlenségrendszer megoldható.}$$

- Ezen egyenlőtlenségrendszer NEM megoldhatósága ekvivalens azzal, hogy alkalmas  $\mu, \nu \in \mathbb{R}_+^{\ell}$  és  $\rho \in \mathbb{R}_+^n$  súlyvektorok esetén

$$\mu^T A - \nu^T A - \rho^T I = 0^T$$

$$\mu^T b - \nu^T b - \rho^T 0 = -1$$

- Ekvivalens módon: alkalmas  $\mu, \nu \in \mathbb{R}_+^{\ell}$  és  $\rho \in \mathbb{R}_+^n$  súlyvektorok esetén

$$(\mu - \nu)^T A = \rho^T I \succeq 0^T$$

$$(\mu - \nu)^T b = -1$$

- $\lambda = \mu - \nu$  jelölés bevezetésével kapjuk a bizonyítandót.

# Megjegyzések a bizonyításhoz

# Megjegyzések a bizonyításhoz

- A (ii) lehetőség látványosan mutatja az egyenlőtlenség rendszer nem megoldhatóságát:

Példa

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -x + y = 1 \\ x, y \geq 0. \end{array} \right.$$

# Megjegyzések a bizonyításhoz

- A (ii) lehetőség látványosan mutatja az egyenlőtlenség rendszer nem megoldhatóságát:

## Példa

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -x + y = 1 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (2, 1, -1)$ . Ekkor

$$(2, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (6, 2) \succeq (0, 0), \quad (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$



# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (2, 1, -1)$ . Ekkor

$$(2, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (6, 2) \succeq (0, 0), \quad (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Azaz az eredeti egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (2, 1, -1)$ . Ekkor

$$(2, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (6, 2) \succeq (0, 0), \quad (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Azaz az eredeti egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.  
Hagyományos írásmóddal

$$2x + 3y = 0 \quad / \cdot 2$$

$$x - 3y = 0 \quad / \cdot 1$$

$$-x + y = 1 \quad / \cdot (-1)$$

$$\text{összegezve: } 6x + 2y = -1$$

# Megjegyzések a bizonyításhoz (folytatás)

## Példa (folytatás)

Legyen  $\lambda^T = (2, 1, -1)$ . Ekkor

$$(2, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (6, 2) \succeq (0, 0), \quad (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Azaz az eredeti egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.  
Hagyományos írásmóddal

$$2x + 3y = 0 \quad / \cdot 2$$

$$x - 3y = 0 \quad / \cdot 1$$

$$-x + y = 1 \quad / \cdot (-1)$$

$$\text{összegezve: } 6x + 2y = -1$$

Azaz nem lehetséges nem-negatív megoldás.

# Szünet



# Logika

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás.



# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás. Formalizálva a  $\exists$  egzisztenciális kvantort használnánk.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás. Formalizálva a  $\exists$  egzisztenciális kvantort használnánk.
- Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága a megoldhatóság tagadása.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás. Formalizálva a  $\exists$  egzisztenciális kvantort használnánk.
- Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága a megoldhatóság tagadása. Egy egzisztenciális állítás definíció szerinti tagadása egy univerzális állítás.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás. Formalizálva a  $\exists$  egzisztenciális kvantort használnánk.
- Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága a megoldhatóság tagadása. Egy egzisztenciális állítás definíció szerinti tagadása egy univerzális állítás. Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága azt jelenti, hogy bármit helyettesítsünk is be, nem teljesülhet a rendszer mindegyik feltétele.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás. Formalizálva a  $\exists$  egzisztenciális kvantort használnánk.
- Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága a megoldhatóság tagadása. Egy egzisztenciális állítás definíció szerinti tagadása egy univerzális állítás. Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága azt jelenti, hogy bármit helyettesítsünk is be, nem teljesülhet a rendszer mindegyik feltétele. Leírva egy  $\forall$  univerzális kvantort használnánk.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás. Formalizálva a  $\exists$  egzisztenciális kvantort használnánk.
- Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága a megoldhatóság tagadása. Egy egzisztenciális állítás definíció szerinti tagadása egy univerzális állítás. Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága azt jelenti, hogy bármit helyettesítsünk is be, nem teljesülhet a rendszer mindegyik feltétele. Leírva egy  $\forall$  univerzális kvantort használnánk.
- A Farkas-lemma egy egzisztenciális állítás tagadását szintén egzisztenciális állításként fogalmazza meg.

# Logika

- A Farkas-lemma állítása logikai szempontból is érdekes. Egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága egy létezés állítása. Úgy nevezett egzisztenciális állítás. Formalizálva a  $\exists$  egzisztenciális kvantort használnánk.
- Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága a megoldhatóság tagadása. Egy egzisztenciális állítás definíció szerinti tagadása egy univerzális állítás. Egy egyenlőtlenségrendszer nem megoldhatósága azt jelenti, hogy bármit helyettesítsünk is be, nem teljesülhet a rendszer mindegyik feltétele. Leírva egy  $\forall$  univerzális kvantort használnánk.
- A Farkas-lemma egy egzisztenciális állítás tagadását szintén egzisztenciális állításként fogalmazza meg. Ez egy nagyon meglepő és mély állítás.

# Farkas-lemma: Logikai forma I



# Farkas-lemma: Logikai forma I

## Emlékeztető

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

# Farkas-lemma: Logikai forma I

## Emlékeztető

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d \quad \text{esetén} \quad Ax \preceq b \quad \models \quad c^T x \leq d$$

# Farkas-lemma: Logikai forma I

## Emlékeztető

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d \quad \text{esetén} \quad Ax \preceq b \quad \models \quad c^T x \leq d$$

Az állítás nagyon egyszerű.

# Farkas-lemma: Logikai forma I

## Emlékeztető

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d \quad \text{esetén} \quad Ax \preceq b \quad \models \quad c^T x \leq d$$

Az állítás nagyon egyszerű. Lényegében általános iskolai tudásunkból adódik.

# Farkas-lemma: Logikai forma I

## Emlékeztető

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d \quad \text{esetén} \quad Ax \preceq b \quad \models \quad c^T x \leq d$$

Az állítás nagyon egyszerű. Lényegében általános iskolai tudásunkból adódik. Az állítás megfordítható.

# Farkas-lemma: Logikai forma I

## Emlékeztető

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d \quad \text{esetén} \quad Ax \preceq b \quad \models \quad c^T x \leq d$$

Az állítás nagyon egyszerű. Lényegében általános iskolai tudásunkból adódik. Az állítás megfordítható. Ez már egyetemi anyag.

# Farkas-lemma: Logikai forma I

## Emlékeztető

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d \quad \text{esetén} \quad Ax \preceq b \quad \models \quad c^T x \leq d$$

Az állítás nagyon egyszerű. Lényegében általános iskolai tudásunkból adódik. Az állítás megfordítható. Ez már egyetemi anyag.

## Farkas-lemma: Logikai forma I

$$Ax \preceq 0 \quad \vdash \quad c^T x \leq 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0.$$

# Farkas-lemma: Logikai forma I: Bizonyítás



# Farkas-lemma: Logikai forma I: Bizonyítás

- Azt kell igazolnunk, hogy a logikai következmények le is vezethetők.

# Farkas-lemma: Logikai forma I: Bizonyítás

- Azt kell igazolnunk, hogy a logikai következmények le is vezethetők. Azaz  $Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0$  esetén  $c^T x \leq 0$  le is vezethető logikai szabályaink alapján.

# Farkas-lemma: Logikai forma I: Bizonyítás

• Azt kell igazolnunk, hogy a logikai következmények le is vezethetők. Azaz  $Ax \preceq 0 \models c^T x \leq 0$  esetén  $c^T x \leq 0$  le is vezethető logikai szabályaink alapján.

•  $Ax \preceq 0 \models c^T x \leq 0$  esetén  $\begin{cases} Ax & \preceq 0 \\ -c^T x & \leq -\varepsilon \end{cases}$  nem megoldható  
tetszőleges  $\varepsilon$  pozitív értékre.

# Farkas-lemma: Logikai forma I: Bizonyítás

• Azt kell igazolnunk, hogy a logikai következmények le is vezethetők. Azaz  $Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0$  esetén  $c^T x \leq 0$  le is vezethető logikai szabályaink alapján.

•  $Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0$  esetén  $\begin{cases} Ax & \preceq 0 \\ -c^T x & \leq -\varepsilon \end{cases}$  nem megoldható tetszőleges  $\varepsilon$  pozitív értékre.

• A Farkas-lemma alapján alkalmas  $\mu_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^k$ ,  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  számokra

$$\mu_\varepsilon^T A - \nu_\varepsilon c^T = 0^T, \quad \mu_\varepsilon^T 0 - \nu_\varepsilon \varepsilon = -1.$$

# Farkas-lemma: Logikai forma I: Bizonyítás

- Azt kell igazolnunk, hogy a logikai következmények le is vezethetők. Azaz  $Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0$  esetén  $c^T x \leq 0$  le is vezethető logikai szabályaink alapján.

- $Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0$  esetén  $\begin{cases} Ax & \preceq 0 \\ -c^T x & \leq -\varepsilon \end{cases}$  nem megoldható tetszőleges  $\varepsilon$  pozitív értékre.

- A Farkas-lemma alapján alkalmas  $\mu_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^k$ ,  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  számokra

$$\mu_\varepsilon^T A - \nu_\varepsilon c^T = 0^T, \quad \mu_\varepsilon^T 0 - \nu_\varepsilon \varepsilon = -1.$$

- Azaz  $\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{++}$ ,

# Farkas-lemma: Logikai forma I: Bizonyítás

- Azt kell igazolnunk, hogy a logikai következmények le is vezethetők. Azaz  $Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0$  esetén  $c^T x \leq 0$  le is vezethető logikai szabályaink alapján.

- $Ax \preceq 0 \quad \models \quad c^T x \leq 0$  esetén  $\begin{cases} Ax & \preceq 0 \\ -c^T x & \leq -\varepsilon \end{cases}$  nem megoldható tetszőleges  $\varepsilon$  pozitív értékre.

- A Farkas-lemma alapján alkalmas  $\mu_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^k$ ,  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  számokra

$$\mu_\varepsilon^T A - \nu_\varepsilon c^T = 0^T, \quad \mu_\varepsilon^T 0 - \nu_\varepsilon \varepsilon = -1.$$

- Azaz  $\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{++}$ , továbbá

$$\frac{1}{\nu_\varepsilon} \mu_\varepsilon^T A = c^T.$$

# Farkas-lemma: Logikai forma II

# Farkas-lemma: Logikai forma II

## Farkas-lemma: Logikai forma II

$$Ax \preceq b \quad \models \quad c^T x \leq d$$

akkor és csak akkor, ha

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d, \quad \text{vagy} \quad Ax \preceq b \quad \not\vdash_{+} \quad c^T x < d.$$



# Szünet



# Markov-láncok: Valószínűségszámítási szemlélet

# Markov-láncok: Valószínűségszámítási szemlélet

- Egy kombinatorikus Markov-lánc egy sztochasztikus folyamat.

# Markov-láncok: Valószínűségyszámítási szemlélet

- Egy kombinatorikus Markov-lánc egy sztochasztikus folyamat. A folyamat egy rendszert ír le, amely diszkrét  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  időskálán változik.

# Markov-láncok: Valószínűségszámítási szemlélet

- Egy kombinatorikus Markov-lánc egy sztochasztikus folyamat. A folyamat egy rendszert ír le, amely diszkrét  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  időskálán változik. Minden  $t_0 \in \mathbb{N}$  időpillanatban egy véges  $S$  állapothalmaz ( $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ) egy elemében van.

# Markov-láncok: Valószínűségszámítási szemlélet

- Egy kombinatorikus Markov-lánc egy sztochasztikus folyamat. A folyamat egy rendszert ír le, amely diszkrét  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  időskálán változik. Minden  $t_0 \in \mathbb{N}$  időpillanatban egy véges  $S$  állapothalmaz ( $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ) egy elemében van.  $t_0 \rightarrow t_0 + 1$  „lépésnél” ha az  $s_i$  állapotban van, akkor  $p_{i,j}$  valószínűséggel kerül  $s_j$  állapotba.

# Markov-láncok: Valószínűségszámítási szemlélet

- Egy kombinatorikus Markov-lánc egy sztochasztikus folyamat. A folyamat egy rendszert ír le, amely diszkrét  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  időskálán változik. Minden  $t_0 \in \mathbb{N}$  időpillanatban egy véges  $S$  állapothalmaz ( $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ) egy elemében van.  $t_0 \rightarrow t_0 + 1$  „lépésnél” ha az  $s_i$  állapotban van, akkor  $p_{i,j}$  valószínűséggel kerül  $s_j$  állapotba. Ezt egy  $P \in \mathbb{R}^{S \times S} \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$  átmeneti mátrix írja le, ami minden  $t_0$  időpillanatban ugyanaz.

# Markov-láncok: Valószínűségszámítási szemlélet

- Egy kombinatorikus Markov-lánc egy sztochasztikus folyamat. A folyamat egy rendszert ír le, amely diszkrét  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  időskálán változik. Minden  $t_0 \in \mathbb{N}$  időpillanatban egy véges  $S$  állapothalmaz ( $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ) egy elemében van.  $t_0 \rightarrow t_0 + 1$  „lépésnél” ha az  $s_i$  állapotban van, akkor  $p_{i,j}$  valószínűséggel kerül  $s_j$  állapotba. Ezt egy  $P \in \mathbb{R}^{S \times S} \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$  átmeneti mátrix írja le, ami minden  $t_0$  időpillanatban ugyanaz.

## Észrevétel

Egy Markov-lánc átmeneti mátrixa egy  $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ -beli mátrix, amely mindegyik sorösszege 1 (az ilyeneket sztochasztikus mátrixnak nevezzük).



# Markov-láncok: Valószínűségszámítási szemlélet

- Egy kombinatorikus Markov-lánc egy sztochasztikus folyamat. A folyamat egy rendszert ír le, amely diszkrét  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  időskálán változik. Minden  $t_0 \in \mathbb{N}$  időpillanatban egy véges  $S$  állapothalmaz ( $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ) egy elemében van.  $t_0 \rightarrow t_0 + 1$  „lépésnél” ha az  $s_i$  állapotban van, akkor  $p_{i,j}$  valószínűséggel kerül  $s_j$  állapotba. Ezt egy  $P \in \mathbb{R}^{S \times S} \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$  átmeneti mátrix írja le, ami minden  $t_0$  időpillanatban ugyanaz.

## Észrevétel

Egy Markov-lánc átmeneti mátrixa egy  $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ -beli mátrix, amely mindegyik sorösszege 1 (az ilyeneket sztochasztikus mátrixnak nevezzük). Ez meg is fordítható: Egy  $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ -beli mátrix, amely mindegyik sorösszege 1 az leír egy Markov-láncot.

# Markov-láncok: Kombinatorikus szemlélet

# Markov-láncok: Kombinatorikus szemlélet

- Adott egy  $P$  átmeneti mátrix.

# Markov-láncok: Kombinatorikus szemlélet

- Adott egy  $P$  átmeneti mátrix.
- $S$ -en mint egy csúcshalmazon egy párhuzamos élek nélküli irányított  $\vec{G}$  gráfot definiálunk.

# Markov-láncok: Kombinatorikus szemlélet

- Adott egy  $P$  átmeneti mátrix.
- $S$ -en mint egy csúcshalmazon egy párhuzamos élek nélküli irányított  $\vec{G}$  gráfot definiálunk.  $\vec{s_i s_j}$  él akkor és csak akkor szerepel a gráfunkban, ha  $p_{i,j} > 0$ .

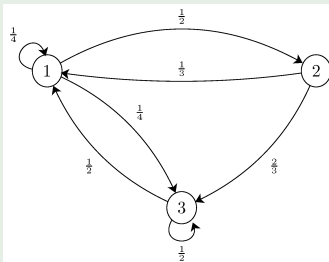
# Markov-láncok: Kombinatorikus szemlélet

- Adott egy  $P$  átmeneti mátrix.
- $S$ -en mint egy csúcshalmazon egy párhuzamos élek nélküli irányított  $\vec{G}$  gráfot definiálunk.  $\vec{s_i s_j}$  él akkor és csak akkor szerepel a gráfunkban, ha  $p_{i,j} > 0$ . A véletlen folyamat felfogható mint egy véletlen séta  $\vec{G}$  (egy  $v$  csúcsból kivezető véletlen lépés egy a  $v$ -ből kivezető éleken lévő valószínűségi eloszlással adott).

# Markov-láncok: Kombinatorikus szemlélet

- Adott egy  $P$  átmeneti mátrix.
- $S$ -en mint egy csúcshalmazon egy párhuzamos élek nélküli irányított  $\vec{G}$  gráfot definiálunk.  $\vec{s}_i \vec{s}_j$  él akkor és csak akkor szerepel a gráfunkban, ha  $p_{i,j} > 0$ . A véletlen folyamat felfogható mint egy véletlen séta  $\vec{G}$  (egy  $v$  csúcsból kivezető véletlen lépés egy a  $v$ -ből kivezető éleken lévő valószínűségi eloszlással adott).

## Példa (internetről letöltve)



# Markov-láncok: Alapok



# Markov-láncok: Alapok

## Észrevétel

A véletlen séta kiindulópontját  $\pi \in \mathbb{R}^S$  eloszlással választjuk. Majd egy  $P$  átmeneti mátrix által leírt véletlen sétálásba kezdünk.

# Markov-láncok: Alapok

## Észrevétel

A véletlen séta kiindulópontját  $\pi \in \mathbb{R}^S$  eloszlással választjuk. Majd egy  $P$  átmeneti mátrix által leírt véletlen sétálásba kezdünk.

(i) Az egy lépés utáni helyünk egy véletlen csúcs, amely eloszlása

$$\pi^T P.$$

# Markov-láncok: Alapok

## Észrevétel

A véletlen séta kiindulópontját  $\pi \in \mathbb{R}^S$  eloszlással választjuk. Majd egy  $P$  átmeneti mátrix által leírt véletlen sétálásba kezdünk.

(i) Az egy lépés utáni helyünk egy véletlen csúcs, amely eloszlása

$$\pi^T P.$$

(ii)  $L$  lépés utáni helyünk egy véletlen csúcs, amely eloszlása

$$\pi^T P^L.$$

# Markov-láncok: Alapok

## Észrevétel

A véletlen séta kiindulópontját  $\pi \in \mathbb{R}^S$  eloszlással választjuk. Majd egy  $P$  átmeneti mátrix által leírt véletlen sétálásba kezdünk.

(i) Az egy lépés utáni helyünk egy véletlen csúcs, amely eloszlása

$$\pi^T P.$$

(ii)  $L$  lépés utáni helyünk egy véletlen csúcs, amely eloszlása

$$\pi^T P^L.$$

## Definíció: Stacionárius eloszlás

A csúcshalmaz feletti  $\pi$  eloszlás stacionárius, ha egy lépés megtétele után ugyanaz az eloszlás írja le helyünket.

# Markov-láncok: Alapok

## Észrevétel

A véletlen séta kiindulópontját  $\pi \in \mathbb{R}^S$  eloszlással választjuk. Majd egy  $P$  átmeneti mátrix által leírt véletlen sétálásba kezdünk.

(i) Az egy lépés utáni helyünk egy véletlen csúcs, amely eloszlása

$$\pi^T P.$$

(ii)  $L$  lépés utáni helyünk egy véletlen csúcs, amely eloszlása

$$\pi^T P^L.$$

## Definíció: Stacionárius eloszlás

A csúcshalmaz feletti  $\pi$  eloszlás stacionárius, ha egy lépés megtétele után ugyanaz az eloszlás írja le helyünket.

Azaz  $\pi$  akkor és csak akkor stacionárius, ha  $\pi^T P = \pi^T$ .

# Markov-láncok: A tétel

# Markov-láncok: A tétel

## Tétel

Legyen  $P$  egy sztochasztikus mátrix. Ekkor az általa leírt Markov-láncnak van stacionárius eloszlása.

# Markov-láncok: A tétel

## Tétel

Legyen  $P$  egy sztochasztikus mátrix. Ekkor az általa leírt Markov-láncnak van stacionárius eloszlása.

Az állítás egy lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságaként fogalmazható meg, amely rendszer:

$$x^T P = x^T$$

$$x^T \mathbf{1} = 1$$

$$x^T \succeq 0$$



# Markov-láncok: A tétel

## Tétel

Legyen  $P$  egy sztochasztikus mátrix. Ekkor az általa leírt Markov-láncnak van stacionárius eloszlása.

Az állítás egy lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságaként fogalmazható meg, amely rendszer:

$$x^T P = x^T$$

$$x^T \mathbf{1} = 1$$

$$x^T \succeq 0$$

Ekvivalens módon:

$$(P^T - I)x = 0$$

$$\mathbf{1}^T x = 1$$

$$x \succeq 0$$

# Markov-láncok: A bizonyítás

# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát.

Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát. Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I|1) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{és} \quad (0^T|1) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = -1.$$

# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát. Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{és} \quad (0^T|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = -1.$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I)\lambda \succeq \mathbf{1}, \quad \text{azaz} \quad P\lambda \succeq I\lambda + \mathbf{1}.$$

# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát. Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{és} \quad (0^T|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = -1.$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I)\lambda \succeq \mathbf{1}, \quad \text{azaz} \quad P\lambda \succeq I\lambda + \mathbf{1}.$$

- Valóban:

# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát. Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I|1) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{és} \quad (0^T|1) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = -1.$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I)\lambda \succeq 1, \quad \text{azaz} \quad P\lambda \succeq I\lambda + 1.$$

- Valóban:  $P$  sorai valószínűségi eloszlások.

# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát. Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I|1) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{és} \quad (0^T|1) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = -1.$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I)\lambda \succeq 1, \quad \text{azaz} \quad P\lambda \succeq I\lambda + 1.$$

- Valóban:  $P$  sorai valószínűségi eloszlások.  $P\lambda$  koordinátái a  $\lambda$  komponenseinek egy-egy várható értéke.



# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát. Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = -1$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{és} \quad (0^T|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = -1.$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I)\lambda \succeq \mathbf{1}, \quad \text{azaz} \quad P\lambda \succeq I\lambda + \mathbf{1}.$$

- Valóban:  $P$  sorai valószínűségi eloszlások.  $P\lambda$  koordinátái a  $\lambda$  komponenseinek egy-egy várható értéke. Speciálisan nem haladhatják meg  $\lambda$  legnagyobb komponensének értékét.

# Markov-láncok: A bizonyítás

- A Farkas-lemma alapján ki kell zárnunk a második alternatívát. Azaz be kell látnunk, hogy nem létezik  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$ , hogy

$$(\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} P^T - I \\ \mathbf{1}^T \end{pmatrix} \succeq 0^T \text{ és } (\lambda^T, \rho) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \text{és} \quad (0^T|\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix} = -1.$$

- Azaz nem lehet, hogy teljesüljön, hogy

$$(P - I)\lambda \succeq \mathbf{1}, \quad \text{azaz} \quad P\lambda \succeq I\lambda + \mathbf{1}.$$

- Valóban:  $P$  sorai valószínűségi eloszlások.  $P\lambda$  koordinátái a  $\lambda$  komponenseinek egy-egy várható értéke. Speciálisan nem haladhatják meg  $\lambda$  legnagyobb komponensének értékét. Emiatt nem állhat fenn az egyenlőség a jobb oldallal.

# Vége van!

Köszönöm a figyelmet!