

# Egyenlőtlenségrendszerek megoldhatósága, Fourier—Motzkin-elimináció

Hajnal Péter

2021. tavasz

# Az alapkérdés

# Az alapkérdés

- Adott  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszer megoldható-e?

# Az alapkérdés

- Adott  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszer megoldható-e?
- Ez egy igen/nem kérdés.

# Az alapkérdés

- Adott  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszer megoldható-e?
- Ez egy igen/nem kérdés. Leegyszerűsítése a megoldáskeresésnek, illetve a teljes megoldáshalmaz leírásának.

# Az alapkérdés

- Adott  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszer megoldható-e?
- Ez egy igen/nem kérdés. Leegyszerűsítése a megoldáskeresésnek, illetve a teljes megoldáshalmaz leírásának.
- Mit tudunk lineáris egyenletrendszerek esetéről?

# Az alapkérdés

- Adott  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszer megoldható-e?
- Ez egy igen/nem kérdés. Leegyszerűsítése a megoldáskeresésnek, illetve a teljes megoldáshalmaz leírásának.
- Mit tudunk lineáris egyenletrendszerek esetéről? Azaz mikor oldható meg egy egyenletrendszer?

# Az alapkérdés

- Adott  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszer megoldható-e?
- Ez egy igen/nem kérdés. Leegyszerűsítése a megoldáskeresésnek, illetve a teljes megoldáshalmaz leírásának.
- Mit tudunk lineáris egyenletrendszerek esetéről? Azaz mikor oldható meg egy egyenletrendszer? Azaz mikor NEM oldható meg egy egyenletrendszer? (Nem megoldhatóság:  
 $Ax = b \quad \models \quad 0^T x = 1.$ )



# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.
- Az  $Ax = b$  egyenletrendszert az  $(A|b)$  bővített mátrixszal írjuk le.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.
- Az  $Ax = b$  egyenletrendszert az  $(A|b)$  bővített mátrixszal írjuk le.
- Elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.
- Az  $Ax = b$  egyenletrendszert az  $(A|b)$  bővített mátrixszal írjuk le.
- Elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert.
- Az elemi sorműveletek:

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.
- Az  $Ax = b$  egyenletrendszert az  $(A|b)$  bővített mátrixszal írjuk le.
- Elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert.
- Az elemi sorműveletek:
  - (1) Egy sor nem-nulla számmal történő szorzása.
  - (2) Egy sor számszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.
- Az  $Ax = b$  egyenletrendszert az  $(A|b)$  bővített mátrixszal írjuk le.
- Elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert.
- Az elemi sorműveletek:
  - (1) Egy sor nem-nulla számmal történő szorzása.
  - (2) Egy sor számszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
- A lépcsős alak kialakítása során egyenletrendszerünk ekvivalens az eredetivel.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

- A kérdés a lineáris algebra tananyag része.
- Az  $Ax = b$  egyenletrendszert az  $(A|b)$  bővített mátrixszal írjuk le.
- Elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert.
- Az elemi sorműveletek:
  - (1) Egy sor nem-nulla számmal történő szorzása.
  - (2) Egy sor számszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
- A lépcsős alak kialakítása során egyenletrendszerünk ekvivalens az eredetivel.
- A lépcsős alakból kiolvasható kérdéseinkre a válasz.



# Lépcsős alakú egyenletrendszer: Példa

## Lépcsős alakú egyenletrendszer: Példa

Példa

$$(A'|b') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

## Lépcsős alakú egyenletrendszer: Példa

## Példa

$$(A'|b') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Megoldható:  $x_3, x_4$ -nek tetszőleges érték adható,  $x_1, x_2, x_5$  meghatározható.

## Lépcsős alakú egyenletrendszer: Példa

Példa

$$(A'|b') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Megoldható:  $x_3, x_4$ -nek tetszőleges érték adható,  $x_1, x_2, x_5$  meghatározható.

Példa

$$(A'|b') = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

NEM megoldható: A negyedik egyenlet egy ellentmondás.

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága: Tételek

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága: Tételek

## Kronecker—Capelli-tétel

A következők ekvivalensek:

(i)  $Ax = b$  megoldható,

(ii)

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b).$$

# Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága: Tételek

## Kronecker—Capelli-tétel

A következők ekvivalensek:

- (i)  $Ax = b$  megoldható,
- (ii)

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b).$$

## Tétel

A következők ekvivalensek:

- (i)  $Ax = b$  NEM megoldható,
- (ii)

$$\text{rk}(A) < \text{rk}(A|b),$$

- (iii)  $Ax = b \vdash 0 = 1.$

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?



# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk.

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.
- A (2) elemi sorművelet után kapott egyenlőtlenségrendszer nem lesz ekvivalens az eredetivel.

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.
- A (2) elemi sorművelet után kapott egyenlőtlenségrendszer nem lesz ekvivalens az eredetivel. BAJ.

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.
- A (2) elemi sorművelet után kapott egyenlőtlenségrendszer nem lesz ekvivalens az eredetivel. BAJ.
- Csak összeadásokkal a „kiejtés” nem mindig oldható meg.

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.
- A (2) elemi sorművelet után kapott egyenlőtlenségrendszer nem lesz ekvivalens az eredetivel. BAJ.
- Csak összeadásokkal a „kiejtés” nem mindig oldható meg. BAJ.

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.
- A (2) elemi sorművelet után kapott egyenlőtlenségrendszer nem lesz ekvivalens az eredetivel. BAJ.
- Csak összeadásokkal a „kiejtés” nem mindig oldható meg. BAJ.
- Új ötletekre van szükség.

# Alkalmazható-e egyenlőtlenségrendszerekre ez a módszer?

- Egyenlőtlenségek esetén Csak nem-negatív/pozitív számokkal szorozhatunk. Azért megpróbálhatjuk.
- A (2) elemi sorművelet után kapott egyenlőtlenségrendszer nem lesz ekvivalens az eredetivel. BAJ.
- Csak összeadásokkal a „kiejtés” nem mindig oldható meg. BAJ.
- Új ötletekre van szükség. Lássuk az egy változó esetét.





# Szünet



# Egy változó esete

# Egy változó esete

# Egy változó esete

Legyen most  $n = 1$ , azaz egyetlen valós változóval, az  $x$ -szel dolgozunk.

# Egy változó esete

Legyen most  $n = 1$ , azaz egyetlen valós változóval, az  $x$ -szel dolgozunk. Ekkor egyenlőtlenségrendszerünk:

$$\begin{cases} a_1x \leq b_1 \\ a_2x \leq b_2 \\ \vdots \\ a_kx \leq b_k \end{cases}$$

# Egy változó esete

Legyen most  $n = 1$ , azaz egyetlen valós változóval, az  $x$ -szel dolgozunk. Ekkor egyenlőtlenségrendszerünk:

$$\begin{cases} a_1x \leq b_1 \\ a_2x \leq b_2 \\ \vdots \\ a_kx \leq b_k \end{cases}$$

Könnyen meggondolható, hogy  $a_i = 0$ -nak nincs sok értelme.

# Egy változó esete

Legyen most  $n = 1$ , azaz egyetlen valós változóval, az  $x$ -szel dolgozunk. Ekkor egyenlőtlenségrendszerünk:

$$\begin{cases} a_1x \leq b_1 \\ a_2x \leq b_2 \\ \vdots \\ a_kx \leq b_k \end{cases}$$

Könnyen meggondolható, hogy  $a_i = 0$ -nak nincs sok értelme. Ezek után feltesszük, hogy  $a_i \neq 0$  minden  $i$ -re.



# Egy változó esete: Levezetés I

# Egy változó esete: Levezetés I

- A szorzási elv miatt ez ekvivalens az alábbival:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{|a_1|}x \leq \frac{b_1}{|a_1|} \\ \frac{a_2}{|a_2|}x \leq \frac{b_2}{|a_2|} \\ \vdots \\ \frac{a_k}{|a_k|}x \leq \frac{b_k}{|a_k|} \end{array} \right.$$

# Egy változó esete: Levezetés I

- A szorzási elv miatt ez ekvivalens az alábbival:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{|a_1|}x \leq \frac{b_1}{|a_1|} \\ \frac{a_2}{|a_2|}x \leq \frac{b_2}{|a_2|} \\ \vdots \\ \frac{a_k}{|a_k|}x \leq \frac{b_k}{|a_k|} \end{array} \right.$$

- Így a bal oldalon  $x$  együtthatói 1-esek vagy -1-esek.

# Egy változó esete: Levezetés II

# Egy változó esete: Levezetés II

- Változtassuk meg az egyenlőtlenségek sorrendjét úgy, hogy először azok szerepeljenek, amelyekben  $x$  együtthatója 1, utána pedig a maradék, ahol  $x$  együtthatója  $-1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \beta_{i_1} \\ \vdots \\ x \leq \beta_{i_s} \\ \hline -x \leq \gamma_{j_1} \\ \vdots \\ -x \leq \gamma_{j_t} \end{array} \right.$$

ahol  $\beta_{i_k}$  és  $\gamma_{j_l}$  a megfelelő fenti valós számok, továbbá  $s + t = k$ ,  
 $\{i_1, \dots, i_s\} \cup \{j_1, \dots, j_t\} = \{1, \dots, k\}$ .

# Egy változó esete: Átírások

# Egy változó esete: Átírások

- Ez ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{cases} x \leq \min_{k=1,\dots,s} \beta_{i_k} \\ -x \leq \min_{l=1,\dots,t} \gamma_{j_l} \end{cases}$$

# Egy változó esete: Átírások

- Ez ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{cases} x \leq \min_{k=1,\dots,s} \beta_{i_k} \\ -x \leq \min_{l=1,\dots,t} \gamma_{j_l} \end{cases}$$

- Tovább átalakítva:

$$-\min_l \gamma_{j_l} \leq x \leq \min_k \beta_{i_k}$$



# Egy változó esete: Átírások

- Ez ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{cases} x \leq \min_{k=1,\dots,s} \beta_{i_k} \\ -x \leq \min_{l=1,\dots,t} \gamma_{j_l} \end{cases}$$

- Tovább átalakítva:

$$-\min_l \gamma_{j_l} \leq x \leq \min_k \beta_{i_k}$$

- A végső formánk az alábbi lesz:

$$\max_l -\gamma_{j_l} \leq x \leq \min_k \beta_{i_k}$$

# Egy változó esete: Átírások

- Ez ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{cases} x \leq \min_{k=1,\dots,s} \beta_{i_k} \\ -x \leq \min_{l=1,\dots,t} \gamma_{j_l} \end{cases}$$

- Tovább átalakítva:

$$-\min_l \gamma_{j_l} \leq x \leq \min_k \beta_{i_k}$$

- A végső formánk az alábbi lesz:

$$\max_l -\gamma_{j_l} \leq x \leq \min_k \beta_{i_k}$$

- A későbbiekben feltesszük, hogy  $s, t \neq 0$ . Ha valamelyik 0 lenne, akkor a megoldhatóság nyilvánvaló. Sőt a teljes megoldáshalmazt látnánk.

# Megoldhatóság

# Megoldhatóság

- Az eredeti egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha

$$\max_{\ell} -\gamma_{j_{\ell}} \leq \min_k \beta_{i_k}$$

# Megoldhatóság

- Az eredeti egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha

$$\max_{\ell} -\gamma_{j_{\ell}} \leq \min_k \beta_{i_k}$$

- Ekvivalens módon:

$$-\gamma_{j_{\ell}} \leq \beta_{i_k} \quad \text{minden } k \in \{1, \dots, s\}, \quad \ell \in \{1, \dots, t\} \text{ esetén.}$$

# Megoldhatóság

- Az eredeti egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha

$$\max_{\ell} -\gamma_{j_{\ell}} \leq \min_k \beta_{i_k}$$

- Ekvivalens módon:

$$-\gamma_{j_{\ell}} \leq \beta_{i_k} \quad \text{minden } k \in \{1, \dots, s\}, \quad \ell \in \{1, \dots, t\} \text{ esetén.}$$

- Ez  $s \cdot t$  darab egyenlőtlenség, ami átrendezhető az alábbi módon:

$$0 \leq \gamma_{j_{\ell}} + \beta_{i_k} \quad \text{minden } k \in \{1, \dots, s\}, \quad \ell \in \{1, \dots, t\} \text{ esetén.}$$

# Megoldhatóság

- Az eredeti egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha

$$\max_{\ell} -\gamma_{j_{\ell}} \leq \min_k \beta_{i_k}$$

- Ekvivalens módon:

$$-\gamma_{j_{\ell}} \leq \beta_{i_k} \quad \text{minden } k \in \{1, \dots, s\}, \quad \ell \in \{1, \dots, t\} \text{ esetén.}$$

- Ez  $s \cdot t$  darab egyenlőtlenség, ami átrendezhető az alábbi módon:

$$0 \leq \gamma_{j_{\ell}} + \beta_{i_k} \quad \text{minden } k \in \{1, \dots, s\}, \quad \ell \in \{1, \dots, t\} \text{ esetén.}$$

- Vegyük észre, hogy az  $s \cdot t$  darab megoldhatósági feltételt le is vezethetjük volna: ha összeadtuk volna a  $\pm 1$  x-együtthatójú rendszer, egy a vonal feletti és egy, a vonal alatti tetszőleges egyenlőtlenségét.

# Összefoglalás



# Összefoglalás

- A megoldhatág eldöntésének előkészületi lépései:
  - (1) Normalizáljuk az egyenleteinket, hogy a bal oldali  $x$ -ek együtthatói  $\pm 1$  legyenek.
  - (2) A  $+1$  együtthatós egyenlőtlenségeket adjuk hozzá az összes  $-1$  együtthatós egyenlőtlenséghez.
  - (3) Az  $s \cdot t$  összeg-egyenlőtlenség bal oldalai mind  $0$ -k.

# Összefoglalás

- A megoldhatág eldöntésének előkészületi lépései:
  - (1) Normalizáljuk az egyenleteinket, hogy a bal oldali  $x$ -ek együtthatói  $\pm 1$  legyenek.
  - (2) A  $+1$  együtthatós egyenlőtlenségeket adjuk hozzá az összes  $-1$  együtthatós egyenlőtlenséghez.
  - (3) Az  $s \cdot t$  összeg-egyenlőtlenség bal oldalai mind  $0$ -k. „ $x$  kiesett”.

# Összefoglalás

- A megoldhatág eldöntésének előkészületi lépései:
  - (1) Normalizáljuk az egyenleteinket, hogy a bal oldali  $x$ -ek együtthatói  $\pm 1$  legyenek.
  - (2) A  $+1$  együtthatós egyenlőtlenségeket adjuk hozzá az összes  $-1$  együtthatós egyenlőtlenséghez.
  - (3) Az  $s \cdot t$  összeg-egyenlőtlenség bal oldalai mind  $0$ -k. „ $x$  kiesett”.
- Döntés a megoldhatóságról:
  - (1) Ha minden jobb oldal nem negatív, akkor egyenletrendszerünk megoldható.
  - (2) Ha valamelyik jobb oldal negatív, akkor egyenletrendszerünk nem megoldható.

# Összefoglalás

- A megoldhatág eldöntésének előkészületi lépései:
  - (1) Normalizáljuk az egyenleteinket, hogy a bal oldali  $x$ -ek együtthatói  $\pm 1$  legyenek.
  - (2) A  $+1$  együtthatós egyenlőtlenségeket adjuk hozzá az összes  $-1$  együtthatós egyenlőtlenséghez.
  - (3) Az  $s \cdot t$  összeg-egyenlőtlenség bal oldalai mind  $0$ -k. „ $x$  kiesett”.
- Döntés a megoldhatóságról:
  - (1) Ha minden jobb oldal nem negatív, akkor egyenletrendszerünk megoldható.
  - (2) Ha valamelyik jobb oldal negatív, akkor egyenletrendszerünk nem megoldható.
- Tegyük fel, hogy nem megoldhatóság van. Azaz alkalmas  $k, \ell$  indexekre  $0 > \gamma_{j_\ell} + \beta_{i_k}$ . Ekkor az eredeti  $\mathcal{E}$  rendszerből levezethetjük, hogy  $0 \leq \gamma_{j_\ell} + \beta_{i_k}$ .

# Összefoglalás

- A megoldhatág eldöntésének előkészületi lépései:
  - (1) Normalizáljuk az egyenleteinket, hogy a bal oldali  $x$ -ek együtthatói  $\pm 1$  legyenek.
  - (2) A  $+1$  együtthatós egyenlőtlenségeket adjuk hozzá az összes  $-1$  együtthatós egyenlőtlenséghez.
  - (3) Az  $s \cdot t$  összeg-egyenlőtlenség bal oldalai mind  $0$ -k. „ $x$  kiesett”.
- Döntés a megoldhatóságról:
  - (1) Ha minden jobb oldal nem negatív, akkor egyenletrendszerünk megoldható.
  - (2) Ha valamelyik jobb oldal negatív, akkor egyenletrendszerünk nem megoldható.
- Tegyük fel, hogy nem megoldhatóság van. Azaz alkalmas  $k, \ell$  indexekre  $0 > \gamma_{j_\ell} + \beta_{i_k}$ . Ekkor az eredeti  $\mathcal{E}$  rendszerből levezethetjük, hogy  $0 \leq \gamma_{j_\ell} + \beta_{i_k}$ . Illetve számmal szorzás után kapjuk, hogy  $\mathcal{E} \vdash 0 \leq -1$ .

# Szünet



# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás

- Az általános esetben egyváltozós gondolatot fogjuk használni a változók számának csökkentésére.



# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás

- Az általános esetben egyváltozós gondolatot fogjuk használni a változók számának csökkentésére.
- Vegyük a kezdeti  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszert, ahol  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $x$   $n$ -változós,  $b$  pedig  $k$ -változós vektorok.

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás

- Az általános esetben egyváltozós gondolatot fogjuk használni a változók számának csökkentésére.
- Vegyük a kezdeti  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszert, ahol  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $x$   $n$ -változós,  $b$  pedig  $k$ -változós vektorok.
- Rendezzük úgy, hogy előre vesszük azokat az egyenlőtlenségeket, melyekben  $x_1$  együtthatója pozitív, majd következzenek azok, amelyekben  $x_1$  nem szerepel, azaz együtthatója 0, végül pedig a negatív együtthatósok.

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás

- Az általános esetben egyváltozós gondolatot fogjuk használni a változók számának csökkentésére.
- Vegyük a kezdeti  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszert, ahol  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $x$   $n$ -változós,  $b$  pedig  $k$ -változós vektorok.
- Rendezzük úgy, hogy előre vesszük azokat az egyenlőtlenségeket, melyekben  $x_1$  együtthatója pozitív, majd következzenek azok, amelyekben  $x_1$  nem szerepel, azaz együtthatója 0, végül pedig a negatív együtthatósok.
- Tegyük fel, hogy  $s_+$  darab sorban  $x$  együtthatója pozitív,  $s_0$  darab sorban 0 és  $s_-$  darab sorban negatív.

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás

- Az általános esetben egyváltozós gondolatot fogjuk használni a változók számának csökkentésére.
- Vegyük a kezdeti  $Ax \preceq b$  egyenlőtlenségrendszert, ahol  $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $x$   $n$ -változós,  $b$  pedig  $k$ -változós vektorok.
- Rendezzük úgy, hogy előre vesszük azokat az egyenlőtlenségeket, melyekben  $x_1$  együtthatója pozitív, majd következzenek azok, amelyekben  $x_1$  nem szerepel, azaz együtthatója 0, végül pedig a negatív együtthatósok.
- Tegyük fel, hogy  $s_+$  darab sorban  $x$  együtthatója pozitív,  $s_0$  darab sorban 0 és  $s_-$  darab sorban negatív. Nyilván teljesül, hogy  $s_+ + s_0 + s_- = k$ .

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás (folytatás)

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás (folytatás)

- Ekkor az együtthatómátrix a következőképpen fog kinézni:

$$\begin{pmatrix}
 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+ \\ A_0 \\ A_- \end{pmatrix}$$

# Fourier-Motzkin elimináció: sorrend változtatás (folytatás)

- Ekkor az együtthatómátrix a következőképpen fog kinézni:

$$\begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+ \\ A_0 \\ A_- \end{pmatrix}$$

- Ahol

$$A_+ \in \mathbb{R}^{s_+ \times n} \quad A_0 \in \mathbb{R}^{s_0 \times n} \quad A_- \in \mathbb{R}^{s_- \times n} \quad (s_+ + s_0 + s_- = k)$$

# Fourier-Motzkin elimináció: Normálás



# Fourier-Motzkin elimináció: Normálás

- Az  $i$ -edik egyenletet, ha a hozzátartozó sor  $A_+$ -ban vagy  $A_-$ -ban van, elosztjuk  $|a_{i1}|$ -gyel, ha  $A_0$ -ban van, változatlanul hagyjuk.

# Fourier-Motzkin elimináció: Normálás

- Az  $i$ -edik egyenletet, ha a hozzátartozó sor  $A_+$ -ban vagy  $A_-$ -ban van, elosztjuk  $|a_{i1}|$ -gyel, ha  $A_0$ -ban van, változatlanul hagyjuk.
- Ezek után kapjuk a következőt:

$$\tilde{A}x \preceq \tilde{b} = \begin{cases} \tilde{A}_+x \preceq \tilde{b}_+ \\ \tilde{A}_0x \preceq \tilde{b}_0 \\ \tilde{A}_-x \preceq \tilde{b}_- \end{cases}$$

# Fourier-Motzkin elimináció: Normálás

- Az  $i$ -edik egyenletet, ha a hozzátartozó sor  $A_+$ -ban vagy  $A_-$ -ban van, elosztjuk  $|a_{i1}|$ -gyel, ha  $A_0$ -ban van, változatlanul hagyjuk.
- Ezek után kapjuk a következőt:

$$\tilde{A}x \preceq \tilde{b} = \begin{cases} \tilde{A}_+x \preceq \tilde{b}_+ \\ \tilde{A}_0x \preceq \tilde{b}_0 \\ \tilde{A}_-x \preceq \tilde{b}_- \end{cases}$$

- Megjegyezzük, hogy  $\tilde{A}_0 = A_0$ ,  $\tilde{b}_0 = b_0$ .

# Fourier-Motzkin elimináció: Normálás

- Az  $i$ -edik egyenletet, ha a hozzátartozó sor  $A_+$ -ban vagy  $A_-$ -ban van, elosztjuk  $|a_{i1}|$ -gyel, ha  $A_0$ -ban van, változatlanul hagyjuk.
- Ezek után kapjuk a következőt:

$$\tilde{A}x \preceq \tilde{b} = \begin{cases} \tilde{A}_+x \preceq \tilde{b}_+ \\ \tilde{A}_0x \preceq \tilde{b}_0 \\ \tilde{A}_-x \preceq \tilde{b}_- \end{cases}$$

- Megjegyezzük, hogy  $\tilde{A}_0 = A_0$ ,  $\tilde{b}_0 = b_0$ . Továbbá írjuk a következő alakba a fenti részmátrixokat:

$$\tilde{A}_+ = \begin{pmatrix} 1 & \bar{A}_+ \\ \vdots & \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{A}_0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_- = \begin{pmatrix} -1 & \bar{A}_- \\ \vdots & \\ -1 & \end{pmatrix}$$

# Fourier-Motzkin elimináció: $x_1$ eliminációja

# Fourier-Motzkin elimináció: $x_1$ eliminációja

- Hagyjuk le  $x$ -ből az  $x_1$  változót, kapjuk  $x_-$ -t:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad x_- = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

# Fourier-Motzkin elimináció: $x_1$ eliminációja

- Hagyjuk le  $x$ -ből az  $x_1$  változót, kapjuk  $x_-$ -t:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad x_- = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

- Először is a középső egyenleteket meghagyjuk:

$$A_0 x \preceq b_0 \quad \equiv \quad \widetilde{A}_0 x \preceq \widetilde{b}_0 \quad \equiv \quad \overline{A}_0 x_- \preceq \widetilde{b}_0.$$

# Fourier-Motzkin elimináció: $x_1$ eliminációja

- Hagyjuk le  $x$ -ből az  $x_1$  változót, kapjuk  $x_-$ -t:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad x_- = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

- Először is a középső egyenleteket meghagyjuk:

$$A_0 x \preceq b_0 \quad \equiv \quad \widetilde{A}_0 x \preceq \widetilde{b}_0 \quad \equiv \quad \overline{A}_0 x_- \preceq \widetilde{b}_0.$$

- Másodszor veszünk egy darab egyenlőtlenséget az  $\widetilde{A}_+ x \preceq \widetilde{b}_+$ -ból — erre  $s_+$  lehetőségünk van —, és veszünk egy egyenlőtlenséget  $\widetilde{A}_- x \preceq \widetilde{b}_-$ -ből ( $s_-$  lehetőség). Adjuk össze ezt a két kiválasztott egyenlőtlenséget.



# Fourier-Motzkin elimináció: $x_1$ eliminációja

- Hagyjuk le  $x$ -ből az  $x_1$  változót, kapjuk  $x_-$ -t:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad x_- = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

- Először is a középső egyenleteket meghagyjuk:

$$A_0 x \preceq b_0 \quad \equiv \quad \widetilde{A}_0 x \preceq \widetilde{b}_0 \quad \equiv \quad \overline{A}_0 x_- \preceq \widetilde{b}_0.$$

- Másodszor veszünk egy darab egyenlőtlenséget az  $\widetilde{A}_+ x \preceq \widetilde{b}_+$ -ból — erre  $s_+$  lehetőségünk van —, és veszünk egy egyenlőtlenséget  $\widetilde{A}_- x \preceq \widetilde{b}_-$ -ből ( $s_-$  lehetőség). Adjuk össze ezt a két kiválasztott egyenlőtlenséget. Tegyük meg az iméntieket az összes lehetséges módon.

# Fourier-Motzkin elimináció: $x_1$ eliminációja

- Hagyjuk le  $x$ -ből az  $x_1$  változót, kapjuk  $x_-$ -t:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad x_- = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

- Először is a középső egyenleteket meghagyjuk:

$$A_0 x \preceq b_0 \quad \equiv \quad \widetilde{A}_0 x \preceq \widetilde{b}_0 \quad \equiv \quad \overline{A}_0 x_- \preceq \widetilde{b}_0.$$

- Másodszor veszünk egy darab egyenlőtlenséget az  $\widetilde{A}_+ x \preceq \widetilde{b}_+$ -ból — erre  $s_+$  lehetőségünk van —, és veszünk egy egyenlőtlenséget  $\widetilde{A}_- x \preceq \widetilde{b}_-$ -ből ( $s_-$  lehetőség). Adjuk össze ezt a két kiválasztott egyenlőtlenséget. Tegyük meg az iméntieket az összes lehetséges módon. Így sikerült eliminálnunk az  $x_1$  változót, az új egyenlőtlenségrendszerünk  $s_0 + s_+ s_-$  egyenlőtlenséget tartalmaz.

# Fourier-Motzkin elimináció: A tétel

# Fourier-Motzkin elimináció: A tétel

- Legyen  $\mathcal{E} : Ax \preceq b$  az eredeti egyenlőtlenségrendszer.

# Fourier-Motzkin elimináció: A tétel

- Legyen  $\mathcal{E} : Ax \preceq b$  az eredeti egyenlőtlenségrendszer.
- Legyen  $\mathcal{E}'$  az  $x_1$  eliminációja után kapott egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 x \preceq \tilde{b}_0 \\ \hat{A} x \preceq \beta \end{cases}$$

# Fourier-Motzkin elimináció: A tétel

- Legyen  $\mathcal{E} : Ax \preceq b$  az eredeti egyenlőtlenségrendszer.
- Legyen  $\mathcal{E}'$  az  $x_1$  eliminációja után kapott egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 x \preceq \tilde{b}_0 \\ \hat{A} x \preceq \beta \end{cases}$$

Az  $\tilde{A}_0 x \preceq \tilde{b}_0$  egyenlőtlenségrendszer tehát azon egyenlőtlenségeket írja le, amelyekben nem történt változtatás.

# Fourier-Motzkin elimináció: A tétel

- Legyen  $\mathcal{E} : Ax \preceq b$  az eredeti egyenlőtlenségrendszer.
- Legyen  $\mathcal{E}'$  az  $x_1$  eliminációja után kapott egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 x \preceq \tilde{b}_0 \\ \hat{A} x \preceq \beta \end{cases}$$

Az  $\tilde{A}_0 x \preceq \tilde{b}_0$  egyenlőtlenségrendszer tehát azon egyenlőtlenségeket írja le, amelyekben nem történt változtatás. Az  $\hat{A} x \preceq \beta$  egyenlőtlenségrendszer azokat az egyenlőtlenségeket tartalmazza, amelyeket úgy kaptunk, hogy az aktuálisan kiválasztott két „rég” egyenlőtlenséget összeadtuk.

# Fourier-Motzkin elimináció: A tétel

- Legyen  $\mathcal{E} : Ax \preceq b$  az eredeti egyenlőtlenségrendszer.
- Legyen  $\mathcal{E}'$  az  $x_1$  eliminációja után kapott egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 x \preceq \tilde{b}_0 \\ \hat{A} x \preceq \beta \end{cases}$$

Az  $\tilde{A}_0 x \preceq \tilde{b}_0$  egyenlőtlenségrendszer tehát azon egyenlőtlenségeket írja le, amelyekben nem történt változtatás. Az  $\hat{A} x \preceq \beta$  egyenlőtlenségrendszer azokat az egyenlőtlenségeket tartalmazza, amelyeket úgy kaptunk, hogy az aktuálisan kiválasztott két „rég” egyenlőtlenséget összeadtuk.

## Tétel

$\mathcal{E}$  akkor és csak akkor megoldható, ha  $\mathcal{E}'$  megoldható.



# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás

- A ( $\Rightarrow$ ) irány triviális:  $\mathcal{E}'$  egyenlőtlenségeit levezettük. Egy megoldása  $\mathcal{E}$ -nek megoldás maradt.

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás

- A ( $\Rightarrow$ ) irány triviális:  $\mathcal{E}'$  egyenlőtlenségeit levezettük. Egy megoldása  $\mathcal{E}$ -nek megoldás maradt.
- A fordított, ( $\Leftarrow$ ) irány érdekesebb: Feltesszük, hogy  $\mathcal{E}'$  megoldható, vagyis létezik  $(x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$  megoldás. Helyettesítsük be ezt a megoldást  $\mathcal{E}$ -be.

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás

- A  $(\Rightarrow)$  irány triviális:  $\mathcal{E}'$  egyenlőtlenségeit levezettük. Egy megoldása  $\mathcal{E}$ -nek megoldás maradt.
- A fordított,  $(\Leftarrow)$  irány érdekesebb: Feltesszük, hogy  $\mathcal{E}'$  megoldható, vagyis létezik  $(x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$  megoldás. Helyettesítsük be ezt a megoldást  $\mathcal{E}$ -be.
- $A_0x \preceq b_0$  nyilván teljesül, hiszen ez része  $\mathcal{E}'$ -nek is.

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás

- A ( $\Rightarrow$ ) irány triviális:  $\mathcal{E}'$  egyenlőtlenségeit levezettük. Egy megoldása  $\mathcal{E}$ -nek megoldás maradt.
- A fordított, ( $\Leftarrow$ ) irány érdekesebb: Feltesszük, hogy  $\mathcal{E}'$  megoldható, vagyis létezik  $(x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$  megoldás. Helyettesítsük be ezt a megoldást  $\mathcal{E}$ -be.
- $A_0x \preceq b_0$  nyilván teljesül, hiszen ez része  $\mathcal{E}'$ -nek is.
- A maradék egyenlőtlenségrendszert kell jobban megnézni.

## Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n^0 \leq \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ x_1 + \tilde{a}_{s+,2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{s+,n}x_n^0 \leq \tilde{b}_{s+} \\ \hline -x_1 + \tilde{a}_{s++s_0+1,2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{s++s_0+1,n}x_n^0 \leq \tilde{b}_{s++s_0+1} \\ \vdots \\ -x_1 + \tilde{a}_{s++s_0+s-,2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{s++s_0+s-,n}x_n^0 \leq \tilde{b}_{s++s_0+s-} \end{array} \right.$$

## Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n^0 \leq \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ x_1 + \tilde{a}_{s+,2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{s+,n}x_n^0 \leq \tilde{b}_{s+} \\ \hline -x_1 + \tilde{a}_{s++s_0+1,2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{s++s_0+1,n}x_n^0 \leq \tilde{b}_{s++s_0+1} \\ \vdots \\ -x_1 + \tilde{a}_{s++s_0+s-,2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{s++s_0+s-,n}x_n^0 \leq \tilde{b}_{s++s_0+s-} \end{array} \right.$$

Azaz

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{1n}x_n^0 \\ \vdots \\ x_1 \leq \tilde{b}_{s+} - \tilde{a}_{s+,2}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{s+,n}x_n^0 \\ \hline -x_1 \leq \tilde{b}_{s++s_0+1} - \tilde{a}_{s++s_0+1,2}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{s++s_0+1,n}x_n^0 \\ \vdots \\ -x_1 \leq \tilde{b}_{s++s_0+s-} - \tilde{a}_{s++s_0+s-,2}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{s++s_0+s-,n}x_n^0 \end{array} \right.$$

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)



# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

- Amit látunk egy egyváltozós egyenletrendszer  $s_+ + s_-$  darab egyenlőtlenséggel.

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

- Amit látunk egy egyváltozós egyenletrendszer  $s_+$  +  $s_-$  darab egyenlőtlenséggel.
- Láttuk, hogy ennek megoldhatósága ekvivalens  $s_+ \cdot s_-$  összeg egyenlőtlenség (mely csak számokat tartalmaznak) teljesülésével:

$$0 \leq \tilde{b}_i - \tilde{a}_{i2}x_2^0 - \dots - \tilde{a}_{in}x_n^0 + \tilde{b}_j - \tilde{a}_{j2}x_2^0 - \dots - \tilde{a}_{jn}x_n^0.$$

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

- Amit látunk egy egyváltozós egyenletrendszer  $s_+$  +  $s_-$  darab egyenlőtlenséggel.
- Láttuk, hogy ennek megoldhatósága ekvivalens  $s_+$  ·  $s_-$  összeg egyenlőtlenség (mely csak számokat tartalmaznak) teljesülésével:

$$0 \leq \tilde{b}_i - \tilde{a}_{i2}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{in}x_n^0 + \tilde{b}_j - \tilde{a}_{j2}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{jn}x_n^0.$$

- Rendezve:

$$(\tilde{a}_{i2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{in}x_n^0) + (\tilde{a}_{j2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{jn}x_n^0) \leq \tilde{b}_i + \tilde{b}_j.$$

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

- Amit látunk egy egyváltozós egyenletrendszer  $s_+$  +  $s_-$  darab egyenlőtlenséggel.
- Láttuk, hogy ennek megoldhatósága ekvivalens  $s_+$  ·  $s_-$  összeg egyenlőtlenség (mely csak számokat tartalmaznak) teljesülésével:

$$0 \leq \tilde{b}_i - \tilde{a}_{i2}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{in}x_n^0 + \tilde{b}_j - \tilde{a}_{j2}x_2^0 - \cdots - \tilde{a}_{jn}x_n^0.$$

- Rendezve:

$$(\tilde{a}_{i2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{in}x_n^0) + (\tilde{a}_{j2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{jn}x_n^0) \leq \tilde{b}_i + \tilde{b}_j.$$

- Ami két egyenlőtlenség összege

$$x + \tilde{a}_{i2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{in}x_n^0 \leq \tilde{b}_i, \quad -x + \tilde{a}_{j2}x_2^0 + \cdots + \tilde{a}_{jn}x_n^0 \leq \tilde{b}_j.$$

# Fourier-Motzkin elimináció: A bizonyítás (folytatás)

- Amit látunk egy egyváltozós egyenletrendszer  $s_+$  +  $s_-$  darab egyenlőtlenséggel.
- Láttuk, hogy ennek megoldhatósága ekvivalens  $s_+ \cdot s_-$  összeg egyenlőtlenség (mely csak számokat tartalmaznak) teljesülésével:

$$0 \leq \tilde{b}_i - \tilde{a}_{i2}x_2^0 - \dots - \tilde{a}_{in}x_n^0 + \tilde{b}_j - \tilde{a}_{j2}x_2^0 - \dots - \tilde{a}_{jn}x_n^0.$$

- Rendezve:

$$(\tilde{a}_{i2}x_2^0 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n^0) + (\tilde{a}_{j2}x_2^0 + \dots + \tilde{a}_{jn}x_n^0) \leq \tilde{b}_i + \tilde{b}_j.$$

- Ami két egyenlőtlenség összege

$$x + \tilde{a}_{i2}x_2^0 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n^0 \leq \tilde{b}_i, \quad -x + \tilde{a}_{j2}x_2^0 + \dots + \tilde{a}_{jn}x_n^0 \leq \tilde{b}_j.$$

- Ezeket tudjuk, hiszen  $\mathcal{E}'$  egy megoldásával dolgozunk.

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ).



# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.  
(Inicinalizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicinalizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicializálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicinalizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk  $x$  együtthatójának előjele szerint  
 $\rightarrow \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_-$ .

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk  $x$  együtthatójának előjele szerint  $\rightarrow \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_-$ .
- (Normálás) Pozitív számmal szorozzuk egyenlőtlenségeinket, hogy  $x$  együtthatói  $\{-1, 0, 1\}$ -beliek legyenek  $\rightarrow \mathcal{A}'_+, \mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_-$ .

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk  $x$  együtthatójának előjele szerint  $\rightarrow \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_-$ .
- (Normálás) Pozitív számmal szorozzuk egyenlőtlenségeinket, hogy  $x$  együtthatói  $\{-1, 0, 1\}$ -beliek legyenek  $\rightarrow \mathcal{A}'_+, \mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_-$ .
- (Eliminálás)  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}'_0$  és azok az egyenlőtlenségek, amik egy  $\mathcal{A}'_+$ -beli és egy  $\mathcal{A}'_-$ -beli összege.



# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicializálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk  $x$  együtthatójának előjele szerint  $\rightarrow \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_-$ .
- (Normálás) Pozitív számmal szorozzuk egyenlőtlenségeinket, hogy  $x$  együtthatói  $\{-1, 0, 1\}$ -beliek legyenek  $\rightarrow \mathcal{A}'_+, \mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_-$ .
- (Eliminálás)  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}'_0$  és azok az egyenlőtlenségek, amik egy  $\mathcal{A}'_+$ -beli és egy  $\mathcal{A}'_-$ -beli összege.
- (Változó update)  $X \leftarrow X - \{x\}$ .

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk  $x$  együtthatójának előjele szerint  $\rightarrow \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_-$ .
- (Normálás) Pozitív számmal szorozzuk egyenlőtlenségeinket, hogy  $x$  együtthatói  $\{-1, 0, 1\}$ -beliek legyenek  $\rightarrow \mathcal{A}'_+, \mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_-$ .
- (Eliminálás)  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}'_0$  és azok az egyenlőtlenségek, amik egy  $\mathcal{A}'_+$ -beli és egy  $\mathcal{A}'_-$ -beli összege.
- (Változó update)  $X \leftarrow X - \{x\}$ .

Vissza (Ciklus)-hoz.

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk  $x$  együtthatójának előjele szerint  $\rightarrow \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_-$ .
- (Normálás) Pozitív számmal szorozzuk egyenlőtlenségeinket, hogy  $x$  együtthatói  $\{-1, 0, 1\}$ -beliek legyenek  $\rightarrow \mathcal{A}'_+, \mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_-$ .
- (Eliminálás)  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}'_0$  és azok az egyenlőtlenségek, amik egy  $\mathcal{A}'_+$ -beli és egy  $\mathcal{A}'_-$ -beli összege.
- (Változó update)  $X \leftarrow X - \{x\}$ .

Vissza (Ciklus)-hoz.

Ha  $\mathcal{A}$ -ban minden jobb oldal nemnegatív, akkor Output="  $\mathcal{E}$  megoldható".

# Fourier-Motzkin elimináció: A teljes kép

## Fourier-Motzkin elimináció

Input:  $\mathcal{E}$  egyenlőtlenségrendszer ( $Ax \preceq b$ ). Output: Megoldható vagy nem.

(Inicizálás)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  // nem eliminált változók,

$\mathcal{A} : Ax \preceq b$  // aktuális egyenlőtlenségrendszer.

(Ciklus) Amíg  $X \neq \emptyset$

- Válasszunk  $x \in X$  változót.
- (Szétbontás) Válasszuk szét rendszerünk  $x$  együtthatójának előjele szerint  $\rightarrow \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_-$ .
- (Normálás) Pozitív számmal szorozzuk egyenlőtlenségeinket, hogy  $x$  együtthatói  $\{-1, 0, 1\}$ -beliek legyenek  $\rightarrow \mathcal{A}'_+, \mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_-$ .
- (Eliminálás)  $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}'_0$  és azok az egyenlőtlenségek, amik egy  $\mathcal{A}'_+$ -beli és egy  $\mathcal{A}'_-$ -beli összege.
- (Változó update)  $X \leftarrow X - \{x\}$ .

Vissza (Ciklus)-hoz.

Ha  $\mathcal{A}$ -ban minden jobb oldal nemnegatív, akkor Output="  $\mathcal{E}$  megoldható".

Ha  $\mathcal{A}$ -ban van negatív jobb oldal, akkor Output="  $\mathcal{E}$  nem megoldható".

# Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ \frac{5}{2}y \leq 4 \\ -2y \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$



## Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ \frac{5}{2}y \leq 4 \\ -2y \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}y \leq 4 \\ y \leq 2 \\ -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ -2y \leq 0 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ \frac{5}{2}y \leq 4 \\ -2y \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}y \leq 4 \\ y \leq 2 \\ -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ -2y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{8}{5} \\ y \leq 2 \\ -y \leq 4 \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Példa

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ -x - y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ \frac{5}{2}y \leq 4 \\ -2y \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}y \leq 4 \\ y \leq 2 \\ -\frac{1}{2}y \leq 2 \\ -2y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{8}{5} \\ y \leq 2 \\ -y \leq 4 \\ -y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Megoldható:} \\ 0 \leq y \leq \frac{8}{5} \end{array}$$

# Fourier—Motzkin-elimináció: Példa (folytatás)

Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer megoldható. Legyen  $y^0 = 1$ . Ekkor behelyettesítünk az előző (eredeti fekete) egyenlőtlenségrendszerbe  $y^0 = 1$ -et:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} \cdot 1 \leq 1 \\ x - 1 \leq -1 \\ -x - 1 \leq 1 \\ -x + 2 \cdot 1 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq 0 \\ x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

# Fourier—Motzkin-elimináció: Példa (folytatás)

# Fourier—Motzkin-elimináció: Példa (folytatás)

- Ha  $x$ -et ennek megfelelően választjuk, akkor találtunk egy megoldást az eredeti egyenlőtlenség-rendszerhez.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Példa (folytatás)

- Ha  $x$ -et ennek megfelelően választjuk, akkor találtunk egy megoldást az eredeti egyenlőtlenség-rendszerhez. Például  $(x^0, y^0) = (-\frac{1}{2}, 1)$ .

# Fourier—Motzkin-elimináció: Példa (folytatás)

- Ha  $x$ -et ennek megfelelően választjuk, akkor találtunk egy megoldást az eredeti egyenlőtlenség-rendszerhez. Például  $(x^0, y^0) = (-\frac{1}{2}, 1)$ .
- Ellenőrizhetjük, hogy valóban teljesül-e az összes feltétel:

$$\begin{cases} -x - y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq 1 \\ 0 \leq 2 \\ \frac{5}{2} \leq 3 \\ -\frac{3}{2} \leq -1 \end{cases}$$

Azt látjuk, hogy minden egyenlőtlenség igaz, azaz minden feltétel teljesül, így a Fourier-Motzkin elimináció segítségével találtunk egy megoldást.



## Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ 2x + y \leq -4 \\ -x + y \leq -5 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{array} \right.$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ 2x + y \leq -4 \\ -x + y \leq -5 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x + \frac{1}{2}y \leq -2 \\ -x + y \leq -5 \\ -x - \frac{2}{3}y \leq -2 \end{array} \right.$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ 2x + y \leq -4 \\ -x + y \leq -5 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x + \frac{1}{2}y \leq -2 \\ -x + y \leq -5 \\ -x - \frac{2}{3}y \leq -2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq -5 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{array} \right.$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x + y \leq -4 \\ -x + y \leq -5 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x + \frac{1}{2}y \leq -2 \\ -x + y \leq -5 \\ -x - \frac{2}{3}y \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -5 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -5 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x + y \leq -4 \\ -x + y \leq -5 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x + \frac{1}{2}y \leq -2 \\ -x + y \leq -5 \\ -x - \frac{2}{3}y \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -5 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -5 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -5 \\ y \leq -\frac{14}{3} \\ -y \leq -3 \\ -y \leq -24 \end{cases}$$

## Fourier-Motzkin elimináció: Újabb példa

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -x + y \leq -5 \\ 2x + y \leq -4 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x + y \leq -4 \\ -x + y \leq -5 \\ -3x - 2y \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x + \frac{1}{2}y \leq -2 \\ -x + y \leq -5 \\ -x - \frac{2}{3}y \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -5 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -5 \\ \frac{3}{2}y \leq -7 \\ -\frac{2}{3}y \leq -2 \\ -\frac{1}{6}y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -5 \\ y \leq -\frac{14}{3} \\ -y \leq -3 \\ -y \leq -24 \end{cases}$$

NEM megoldható:  
 $24 \leq y \leq -5$

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)



# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható. A Fourier—Motzkin-elimináció algvégzését elemezve egy formális levezetés is látható.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható. A Fourier—Motzkin-elimináció algvégzését elemezve egy formális levezetés is látható.
- Az ellentmondás előtt láttuk, hogy  $y \leq -5$  és  $-y \leq -3$ . Ezek összege  $0 \leq -8$ . Ennek  $\frac{1}{8}$ -szorososa a standad  $0 \leq -1$  ellentmondás.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható. A Fourier—Motzkin-elimináció algvégzését elemezve egy formális levezetés is látható.
- Az ellentmondás előtt láttuk, hogy  $y \leq -5$  és  $-y \leq -3$ . Ezek összege  $0 \leq -8$ . Ennek  $\frac{1}{8}$ -szorososa a standard  $0 \leq -1$  ellentmondás.
- $y \leq -5$  az  $x \leq 0$  és  $-x + y \leq -5$  kiinduló egyenlőtlenségek összege volt.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható. A Fourier—Motzkin-elimináció algvégzését elemezve egy formális levezetés is látható.
- Az ellentmondás előtt láttuk, hogy  $y \leq -5$  és  $-y \leq -3$ . Ezek összege  $0 \leq -8$ . Ennek  $\frac{1}{8}$ -szorososa a standard  $0 \leq -1$  ellentmondás.
- $y \leq -5$  az  $x \leq 0$  és  $-x + y \leq -5$  kiinduló egyenlőtlenségek összege volt.
- $-y \leq -3$  az  $-\frac{2}{3}y \leq -2$  egyenlőtlenség  $\frac{3}{2}$ -szerese.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható. A Fourier—Motzkin-elimináció algvégzését elemezve egy formális levezetés is látható.
- Az ellentmondás előtt láttuk, hogy  $y \leq -5$  és  $-y \leq -3$ . Ezek összege  $0 \leq -8$ . Ennek  $\frac{1}{8}$ -szorososa a standard  $0 \leq -1$  ellentmondás.
- $y \leq -5$  az  $x \leq 0$  és  $-x + y \leq -5$  kiinduló egyenlőtlenségek összege volt.
- $-y \leq -3$  az  $-\frac{2}{3}y \leq -2$  egyenlőtlenség  $\frac{3}{2}$ -szerese. Amely egyenlőtlenség  $x \leq 0$  és  $-x - \frac{2}{3}y \leq -2$  összege.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Ezzel azt kaptuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségrendszer NEM megoldható. A Fourier—Motzkin-elimináció algvégzését elemezve egy formális levezetés is látható.
- Az ellentmondás előtt láttuk, hogy  $y \leq -5$  és  $-y \leq -3$ . Ezek összege  $0 \leq -8$ . Ennek  $\frac{1}{8}$ -szorosa a standad  $0 \leq -1$  ellentmondás.
- $y \leq -5$  az  $x \leq 0$  és  $-x + y \leq -5$  kiinduló egyenlőtlenségek összege volt.
- $-y \leq -3$  az  $-\frac{2}{3}y \leq -2$  egyenlőtlenség  $\frac{3}{2}$ -szerese. Amely egyenlőtlenség  $x \leq 0$  és  $-x - \frac{2}{3}y \leq -2$  összege. Ezek közül az első egy eredeti egyenlőtlenség, a második az eredeti  $-3x - 2y \leq -6$  egyenlőtlenség  $\frac{1}{3}$ -szorosa.

# Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)



## Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Összegezve:

$$\begin{array}{rcl} x \leq 0 & / \cdot \frac{5}{16} \\ -x + y \leq -5 & / \cdot \frac{2}{16} \\ 2x + y \leq -4 & / \cdot 0 \\ -3x - 2y \leq -6 & / \cdot \frac{1}{16} \\ \hline 0 \leq -1 \end{array}$$

## Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Összegezve:

$$\begin{array}{rcl}
 x \leq 0 & / \cdot \frac{5}{16} & \\
 -x + y \leq -5 & / \cdot \frac{2}{16} & \\
 2x + y \leq -4 & / \cdot 0 & \\
 -3x - 2y \leq -6 & / \cdot \frac{1}{16} & \\
 \hline
 0 \leq -1 & & 
 \end{array}$$

- Azaz

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x \leq 0 \\
 -x + y \leq -5 \\
 2x + y \leq -4 \\
 -3x - 2y \leq -6
 \end{array} \right. \vdash 0 \leq -1,$$

## Fourier—Motzkin-elimináció: Újabb példa (folytatás)

- Összegezve:

$$\begin{array}{rcl}
 x \leq 0 & / \cdot \frac{5}{16} & \\
 -x + y \leq -5 & / \cdot \frac{2}{16} & \\
 2x + y \leq -4 & / \cdot 0 & \\
 -3x - 2y \leq -6 & / \cdot \frac{1}{16} & \\
 \hline
 0 \leq -1 & & 
 \end{array}$$

- Azaz

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x \leq 0 \\
 -x + y \leq -5 \\
 2x + y \leq -4 \\
 -3x - 2y \leq -6
 \end{array} \right. \vdash 0 \leq -1,$$

így az egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

# Vége van!

Köszönöm a figyelmet!