Matematikai alapelvek

Előadó: Hajnal Péter 2017.

1. A matematika ellentmondásmentes

A matematika ellentmondásmentességét nem említjük, de jó tudni, hogy az alábbi nyilvánvaló alapelv ennek egy következménye.

> HA egy kérdést két módon is, logikailag helyesen válaszolunk meg,
> AKKOR a két válasz megegyezik.

Egy nyilvánvaló példa: Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? Egy lehetőség, hogy mindegyik sorban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/sorösszegeket összegezzük. Egy másik megoldás, hogy mindegyik oszlopban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/oszlopösszegeket összegezzük. Nyilván mindkét eredmény az összes szám összegét adja ki.

Azaz egy táblázatban a sorösszegek összege megegyezik az oszlopösszegek összegével. Formálisan: Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban (n darab sor és k darab oszlop) az i-edik sorban és j-edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1,j=1}^{n,k} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}.$$

Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy kettős összegben a két szumma sorrendje felcserélhető. Az ártatlannak tűnő megállapítás meglepően mély állításokat igazol.

1. Feladat. *Vegyük az $1, 2, \ldots, n$ számok összes/$n!$ darab átrendezését Mindegyik esetén számoljuk meg, hány olyan i elem van, amely marad a helyén (azaz $\pi(i) = i$, az ilyen elemeket a π sorbaállítás fixpontjainak nevezzük). Azaz minden sorbaállításhoz vesszü k fixpontjainak számát. Igazoljuk, hogy az átlagos fixpont szám éppen* 1.

Például az $1, 2, 3$ számoknak $3! = 6$ sorbállítása van: 123, 132, 213, 231, 312, 321. A fixpontok száma rendre: 3, 1, 1, 0, 0, 1. Az átlag valóban éppen $(3+1+1+1)/6 = 1$.

A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy átrendezésnek felel meg. Oszlopai az átrendezett elemekkel, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal azonsítottak. Az π átrendezésnek megfelelő sor és az i elem oszlopának talákozásában legyen 1, ha $\pi(i) = i$, azaz i fizpont. Különben álljon 0. Mennyi a táblázatban szereplő számok összege?

Minden sorban a megfelelő sorbaállítás fixpontjainak számát adja az összegzés. A sorösszegek összege éppen az összes fixpontszám, az átlagos fixpontszám n!-szorosa.

Az első oszlop elemeit összegezve azokat a π sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$. Azaz 1 az első helyen áll, a többi elemre nincs feltétel. Azaz az összeg $(n-1)!$, hiszen a többi/$n-1$ darab elemet ennyiféleképpen álíthatjuk sorba. Ugyanez az összeg lesz az öszes többi oszlopban is. Így az oszlopösszegek összege $n \cdot (n-1)! = n!$.

A két eredmény összevetéséből adódik az állítás.

2. Átlagolás, skatulya-elv

Adott n valós szám $v : v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.

További fontos paraméterek a „közepek". Talán a legegyszerűbb a számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

A további közepek bevezetéséhez célszerű feltenni, hogy számaink nem negatívok. Ebben az esetben a mértani közép

$$G(v) = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n},$$

a harmonikus közép

$$H(v) = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}},$$

négyzetes közép

$$Q(v) = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}}.$$

Alaptétel, hogy nem negatív v_i számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik. Egy speciális részét emelem ki:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

Ez a fenti egyenlőtlenség-sorozat egy triviális töredéke. Igazolása például indirekten történhet. Tegyük fel, hogy $A(v) \leq \max(v)$ nem teljesül, azaz mindegyik v_i kisebb mint $A(v)$. Az így kapott n egyenlőtlenség összege ellentmondás (azonos irányban álló szigorú egyenlőtlenségek összegezhetők).

Számunkra a következő speciális eset nagyon fontos lesz. Adott t tárgyunk és s skatulyánk. A t tárgyat osszuk szét a skatulyák között. Az i-edik skatulyába került tárgyak száma legyen v_i. (tehát v_i egy 0 és t közötti egész szám. Ha $v_i = 0$, akkor egy tárgyat se raktunk az i-edik skatulyába. Ha $v_i = t$, akkor mindegyik tárgyat az i-edik skatulyába raktuk.)

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_s}{s} = \frac{t}{s},$$

az átlagos skatulya terheltség. A fenti nyilvánvaló elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

HA t tárgyat k skatulyába osztunk szét,
AKKOR lesz olyan skatulya, amelybe legalább $\frac{t}{k}$ tárgy esik,
és lesz olyan skatulya is, amelybe legfeljebb $\frac{t}{k}$ tárgy esik.

A skatulya-elv fenti nagyon általános megfogalmazását gyakran speciális esetekben alkalmazzuk. Érdemes néhány speciális esetet külön megfogalmazni.

2. Tétel. *Ha $n+1$ tárgyat n skatulyában osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely legalább kettő tárgyat is tartalmaz.*

3. Tétel. *Ha $\ell n+1$ tárgyat n skatulyában osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amelybe legalább $\ell+1$ tárgyat is tartalmaz.*

4. Tétel. *Ha $n-1$ tárgyat n skatulyában osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely üres marad.*

Az állításaink megint „triviálisak”. Mégis ügyes alkalmazással mély/nehéz eredményeket lehet elérni.

5. Tétel (Dirichlet-tétel). *Legyen α irracionális szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok p, q egész szám, amelyekre*

$$|p\alpha - q| < \frac{1}{p}, \text{ azaz } \left|\alpha - \frac{q}{p}\right| \leq \frac{1}{p^2}.$$

Bizonyítás. Legyen N egy tetszőleges pozitív egész. Vegyük az $\{0\cdot\alpha\}, \{1\cdot\alpha\}, \{2\cdot\alpha\}, \ldots, \{(N-1)\cdot\alpha\}, \{N\cdot\alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0,1]$ intervallumban. Ekkor N különböző(!) számot kapunk a $(0,1)=]0,1[$ intervallumban (miért?). Ezek balról jobbra tekintve (ez nem szükségszerűen ugyanaz a sorrend mint ahogy kezdetben felsoroltuk őket) az intervallumunkat $N+1$ részszakaszra osztják. Az átlagos hossza a szakaszoknak $\frac{1}{N+1}$. Így lesz olyan két egymásutáni pont/szám amely $\frac{1}{N+1}$-nél közelebb van egymáshoz. Azaz

$$0 < \{k_1\cdot\alpha\} - \{k_2\cdot\alpha\} \leq \frac{1}{N+1},$$

(esetleg $0 < 1 - \{k_2\cdot\alpha\} \leq 1/(N+1)$).

Így alkalmas ℓ_1, ℓ_2 egészekre

$$0 < (k_1\cdot\alpha - \ell_1) - (k_2\cdot\alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2)\cdot\alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

Legyen $p = k_1 - k_2$ és $q = \ell_1 - \ell_2$. Ekkor nyilván $p \neq 0$ és $|p| \leq N$. Speciálisan

$$0 < p\cdot\alpha - q \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{|p|}.$$

Azaz találtunk egy jó (p,q) párt (másikat mint a triviális $(0,0)$). A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő (p,q) párhoz egy tetszőleges N pozitív egész választásan alapult.

Ha már találtunk valahány jó (p,q) párt, akkor vegyük

$$\delta(p,q) = |p\alpha - q|$$

számok minimumát. Válasszunk olyan N-et, hogy ennél a minimumnál kisebb legyen $\frac{1}{N+1}$. A fenti eljárást ezzel a N-nel megismételve biztos újabb (eddig meg nem talált (p,q) párt találunk. (Miért?)

Ez igazolja az állítást. ■

3. Geometriai skatulya-elv

A saktulya-elv egy megfogalmazása: Ha n skatulyába ugy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb n tárgy helyezhető el. Geometriai környezetben is kimondhatunk egy hasonló állítást: Egy n területű alakzatba 1 területű alakzatokat helyezünk átfedés nélkül. Ekkor legfeljebb n „számára van hely”.

Ezekután természetes kimondani a következő tételt:

6. Tétel. *Egy adott A területű alakzatba $A_1, A_2, \ldots, A_k$ területű alakzatokat pakolunk. Ha $A_1 + A_2 + \ldots + A_k > \ell \cdot A$, akkor bárhogy végezzük is a pakolást, lesz olyan pont alakzatunkban, amelyet legalább $\ell + 1$ bepakolt alakzat lefed.*

A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom. Tisztázása általában nem középiskolai fogalom. Legtöbb esetben alakzataink „szépek”, ismertek. Például körök, háromszögek, téglalapok. Ekkor a fenti tétel/elv középiskolás szemmel is jól érthető és nyilvánvaló.