KOMBINATORIKA ElŐADÁS

Matematika BSc hallgatók számára

Párosítások gráfokban

Előadó: Hajnal Péter 2017.

1. A párosítás alapfogalma

Definíció. Egy G gráfban egy M élhalmaz *párosítás*, ha $2|M|$ darab csúcsra illeszkedik M-beli él.

Ha egy gráfban veszünk egy élt, akkor annak egy darab vagy két darab végpontja van/egy vagy két csúcsra illeszkedik. k darab él legfeljebb $2k$ csúcsra illeszkedik. Egy M élhalmaz egy párosítás, ha éppen annyi csúcsra illeszkedik, mint amennyi a fenti gondolatmenet alapján egy felső becslés.

Másképpen: M élhalmaz egy párosítás, ha nem tartalmaz hurokélet és semelyik két élének nincs közös végpontja.

Szemléletesen M élei párokat alakítanak ki a V csúcshalmaz bizonyos elemei között. Azaz M elemei/élei a párosítás párjai. Ha egy M párosításra $|M| = k$. akkor k párunk van. Az M-beli élekre illeszkedő csúcsok száma $2k$. Ezeket (az M által) párosított pontoknak nevezzük.

Egy n pontú gráfban legfeljebb $n/2$ éle lehet egy párosításnak (hiszen legfeljebb n párosított csúcs lehet).

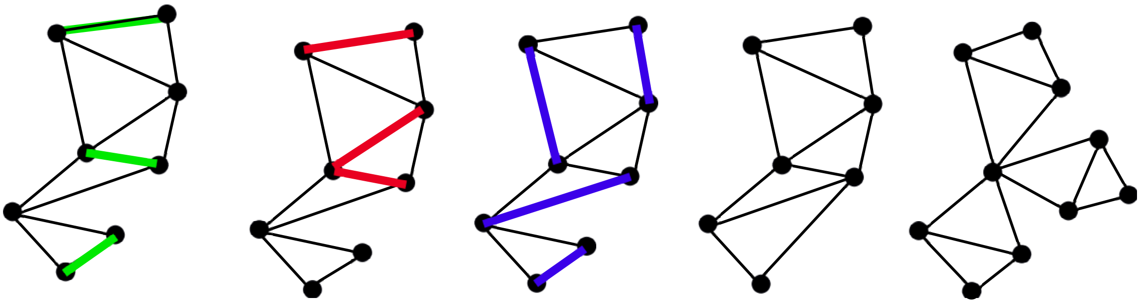
Definíció. Egy n pontú gráfban M *teljes párosítás*, ha párosítás és elemszáma $n/2$. Azaz az M párosítás teljes párosítás, ha az összes csúcs párosított csúcs.

Nyilván csak páros pontszámú gráfban lehet teljes párosítás. A páratlan pontszám kizárja a teljes párosítás létezését.

Példa. $\emptyset$ mindig párosítás. Ekkor a párosított csúcsok száma 0.

Ha e egy nem-hurokél, akkor $\{e\}$ párosítás. Élszáma 1, a párosított csúcsok száma 2 (éppen e két végpontja).

Példa.



A zöld élek párosítást alkotnak (3 él/pár, 6 párosított csúcs) az első gráfban. A piros élek NEM alkotnak párosítást (3 él/pár, 5 illeszkedő csúcs, 1 csúcsra két piros él is illeszkedik). A zöld élek (3 él) párosítást alkottak, de NEM teljes párosítást ($|V|/2 = 4$). A kék élek párosítást alkotnak, elemszámuk $4 = |V|/2$, azaz a kék élek teljes párosítást adnak.

Az utolsó két gráfban nincs teljes párosítás. A két gráf közül az elsőnek páratlan sok csúcsa van. A másiknak páros sok csúcsa van, de más okok miatt nincs benne teljes párosítás (miért?).

Láttuk, hogy könnyű egy 1-elemű párosítást találni. Ami nehezebb: minél nagyobb párosítást találni egy adott gráfban. A párosítások alapfeladata: Adott gráfban keressünk egy párosítást, amely mérete/elemszáma a lehető legnagyobb. Formálisan:

Definíció.

$$\nu(G) = \max\{|M| \mid M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

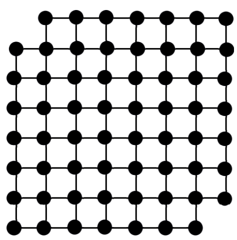
Azaz az alapfeladat egy új megfogalmazása: Adott G gráf esetén határozzuk meg/számítsuk ki $\nu(G)$-t.

magya

Példa.

- $\nu(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$. Kivehetünk tetszőlegesen $2\lfloor n/2 \rfloor (\leq n)$ csúcsot, párokba rakhatjuk őket. A párok között vezető élek (egy teljes gráfban szükségszerűen léteznek) egy $\lceil n/2 \rceil$ élű párosítást adnak. Nagyobb párosítás nem létezhet n csúcson.

- Legyen S_{n+1} az az $n+1$ pontú fa, amely egy speciális csúcsot (középpont) és ezt az összes többi (n darab) csúccsal összekötő n élet tartalmaz. Ezt $n+1$ pontú/n élű csillagnak nevezzük. $\nu(S_{n+1}) = 1$. Valóban. Bármelyik éle egy 1 elemű párosítást alkot. Viszont bármely két éle összefut, azaz már nem lesz párosítás.

- 

  A fenti 62 csúcsú gráf ν paraméterének meghatározásának feladata a következőképpen is leírható: Vegyünk egy sakktáblát és két szemközti sarokmezőjét törjük le. Az így maradt 62 mezőre legfeljebb hány dominó helyezhető el úgy, hogy mindegyik dominó két szomszédos mezőt fedjen le és a dominók között ne legyen átfedés? Könnyen látható (akár csak vízszintesen fekvő) 30 dominó elhelyezhető (a fenti G gráfra $\nu(G) \geq 30$). A teljes csonkított-tábla viszont nem fedhető le teljesen ($\nu(G) < 31$). Ehhez a sakktábla eredeti színezését kell tekinteni. Ebben 32 fekete és 32 fehér mező szerepel. A csonkítással két azonos színű mezőt távolítottunk el. Az egyensúly a két szín között felbomlott. Viszont minden dominó egy fehér és egy fekete színű mezőt fedhet le. Így a teljes fedés lehetetlen. Összefoglalva $\nu(G) = 30$.

Láttuk, hogy a ν paraméter megállapítása két részből áll: Mutatunk sok élű párosítást. Belátjuk, hogy több él nem alkothat párosítást. Ebből az első rész próbálkozással, keresgéléssel általában megoldható. A másik azonban matematikai ötleteket kíván. Két lehetőséget is mutatunk arra, hogy egy tetszőleges gráfban hogyan becsülhető felülről a párosítások mérete.

2. Lefogó ponthalmazok

Definíció. Egy G gráfban egy L csúcshalmaz *lefogó*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L-beli.

A fogalmat a következő „mesével” világíthatjuk meg. Adott egy múzem. Ennek térképét egy gráf írja le. Az élek egyenes folyosók, a csúcsok a folyosók talákozási pontjai. Őrökkel szeretnénk védeni a múzeumot.

Az őrök csúcsokba ültethetők/állíthatók, ahol az ott összefutó összes folyosót ellenőrzésük alatt tarthatják. Ha célunk úgy elhelyezni az őröket, hogy minden folyosó védve legyen, akkor egy lefogó ponthalmazt kell keresnünk.

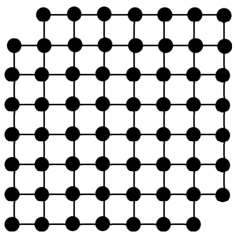
Optimalizálási feladat esetén nyilván minél kisebb lefogó ponthalmaz keresése az értelmes.

Jelölés.

$$\tau(G) = \min\{|L| : \ L \text{ lefogó csúcshalmaz}\}$$

Példa.

- $\tau(K_n) = n - 1$. Tetszőlegesen választott $n - 1$ csúcs lefogja a gráfot (ahogy minden n pontú egyszerű gráfot). Tetszőleges $n-2$ elemú csúcshalmaz kihagy két csúcot, amelyek a teljes gráfban szükségszerűen összekötöttek. Azaz nincs $n - 2$ elemű lefogó ponthalmaz.
- $\tau(S_{n+1}) = 1$. Valóban. A középpont által álkotott egyelemű csúcshalmaz az összes élt lefogja.
-



Gondoljunk csúcsainkra mint mezőkre. Tegyük fel, hogy 32 fekete és 30 fehér mezőnk van. A 30 fehér mező egy lefogó csúcshalmazt ad. Kevesebb nem lehet, mert a korábbiakban elhelyezett dominók alatti két mező valamelyike a lefogó ponthalmazhoz kell hogy tartozzon. A 30 dominó 30 különböző csúcsot/mezőt garantál tetszőleges lefogó ponthalmazba. Azaz $\tau = 30$.

Az utóbbi érvelés már az általános összefüggésre is rávilágít:

Észrevétel. Legyen G egy tetszőleges gráf. Benne $M \subset E$ egy párosítás és $L \subset V$ egy lefogó csúcshalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

Valóban a párosítás éleinek legalább egyik végpontja L-beli. A párosítás mivolt miatt bámelyik végpont „oldja meg” a lefogás problémáját különböző csúcsokhoz kell jutnunk. Azaz tetszőleges lefogáshoz legalább $|M|$ csúcs kell, ahogy bizonyítandó volt.

Speciálisan $\nu(G) \leq \tau(G)$ minden G gráfra.

Tehát annak megmutására, hogy nincs $k+1$ élű párosítás egy lehetőség k darab lefogó pontot felmutatni. Ez egy sémát ad a ν paraméter felső becslésére.

Sajnos ez a séma nem „teljes”: Vegyük az ötpontú kört, C_5-t. Ekkor a legnagyobb párosítás 2-elemű (5 pont nem is ad lehetőséget három élű párosításra). Lefogó ponthalmazzal viszont nem érvelhetünk: nincs 2-elemű lefogó ponthalmaz.

Megemlítjük, hogy páros gráfok esetén a séma teljes:

1. Tétel (Kőnig Dénes tétele). *Ha G páros gráf, akkor*

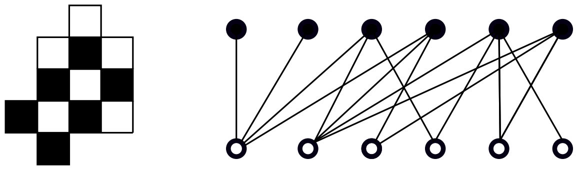
$$\nu(G) = \tau(G).$$

3. Páros gráfok és Kőnig-akadályok

Emlékeztetünk a páros gráfok fogalmára: Ha G egy páros gráf, akkor csúcsai két osztályba vannak osztva/oszthatók úgy, hogy bármely él egyik végpontja egyik osztályhoz, a másik végpont pedig a másik osztályhoz tartozzon. A két osztályra sokféléppen hívatkozhatunk. Lehetnek piros/kék csúcsok (a páros gráfok pontosan a két színnel jól színezhető gráfok). Lehetnek fiúk/lányok. Lehetnek alsó/felső csúcsok. Mi ez utóbbi terminológiát alkalmazzuk. Ezt a páros gráfok lerajozlásánál is tükrözzük: a csúcsok egy vízszintes egyenes alá és fölé kerülnek. Összekötések csak az egyenesre vontakozólag „keresztbe” lesznek.

A korábbi példáink utolsó, 62 csúccsal/mezővel rendelkező gráfja páros volt. Párosságát a sakktábla szokásos fehér/fekete színezése mutatja. A teljes párosítás hiányát az bizonyította, hogy egy páros gráfban a teljes párosítás alapján párba állíthatjuk a két színű mezőket. Azaz a két színosztály méretének különbözősége bizonyítja a teljes párosítás hiányát. Igazából többet is mondhatunk. A nagyobb színosztály (ez esetünkben a fekete mezők voltak) összes eleme nem lehet párosítva. Valóban a 32 fekete mező párjai a 30 fehér mezőből kerülnek ki. Így legalább kettő fekete mező marad párosítatlan.

A fenti módszer alkalmazásához nem szükségszerű, hogy az összes fehér/fekete mezővel dolgozzunk:



A fenti töredék táblán ugyanannyi fehér és fekete mező van. Még sem lehet dominókkal lefedni. A tábla bal alsó sarka viálgít erre: Két fekete mező, ami egyetlen módon fedhető le, de ehhez közös fehér mező kell. Az ábra jobb oldalán a hat-hat mező páros gráfja szerepel. A fenti gráfban is megismételhetjük a gondolatmenetet: A felső csúcsok közül az első kettő együttses szomszédsága egyetlen pont.

Ugyanezt a gondolatmenetet elismételhetjük, ha a csúcsokra mint fiúk és lányok gondolunk. Egy táncesten vesz részt egy osztály. Fiú-lány párok táncolnak, de nem akárhogy. Az osztályokbeli viszonyok miatt nem minden fiú-lány pár hajlandó táncolni. A hajnlandóságukat egy páros gráf írja le. Tegyük fel, hogy találunk L darab lányt és felíratjuk velük mely fiúkkal hajlandók táncolni. Azaz listájukon pontosan azok a fiúk szerepelnek, amelyikükkel legalább egyikük táncol. Tegyük fel, hogy a lista f fiút tartalmaz. Ha $L > f$, akkor nem tud minden lány egyszerre táncolni. Sőt már a kiválasztott L lány sem táncolhat egyszerre. Sőt a kiválasztott lány közül legfeljebb f táncolhat egyszerre. Azaz minden pillanatban legalább $L-f$ lány hoppon marad (a fal mellöl nézheti a táncolókat).

A gondolatmenet absztrakt (a matematika, speciálisan a gráfelmélet nyelvét használó) megfogalmazása:

Definíció. Legyen G egy páros gráf A és F csúcsosztályokkal (alsó/felső csúcsok). Legyen $K \subset A$ az alsó csúcsok egy részhalmaza. Legyen $N(K)$ a K-beli pontok szomszédainak uniója, azaz tartalmazza azokat a csúcsokat, amelyek valamely K-beli ponttal összekötöttek ($N(K) \subset F$). Legyen

$$\delta(K) = |K| - |N(K)|.$$

Azok a K alsó csúcshalmazok „érdekesek”, amelyekre $\delta(K) > 0$. Ekkor a kifejezés értelme, hogy K-ból legalább $\delta(K)$ darab csúcs párosítatlan marad bármilyen „okosan” párosítsunk (hisz a K-beli csúcsok párjai $N(K)$-ból kerülhetnek csak ki).

Észrevétel. Legyen $G(A, F)$ egy páros gráf. $K \subset A$ tetszőleges alsó csúcshalmaz és M egy tetszőleges párosítás. Ekkor

$$\delta(K) \leq |A| - |M|.$$

Azaz minden M párosítás által nem párosított alsó pontok száma ($|A| - |M|$) legalább $\delta(K)$.

A fenti gondolatmenetek ismét lehetőséget adnak arra, hogy belássuk egy páros gráfban nincs $k+1$-elemű párosítás: Felmutatunk egy K alsó halmazt, amelyben $|A| - k$-val több csúcs van mint az ő $N(K)$ szomszédságában. Valóban K egy bizonyíték, hogy minden M párosítás legalább $|A|-k$ darab alsó csúcsot párosítatlanul hagy. K megakadályozza, hogy legyen $k+1$-elemű párosítás.

Ez a séma azonban teljes:

2. Tétel (Kőnig Dénes). *Legyen $G(A, F)$ egy páros gráf. Ekkor*

$$\min\{|A| - |M| : \ M \textit{ párosítás}\} = \max\{\delta(K) : K \subset A\}.$$

Hasznos az alábbi elnevezés:

Definíció. Egy $K \subset A$ csúcshalmaz *Kőnig-akadály*, ha $\delta(K) > 0$. Azaz K alsó csúcsok halmazának szomszédsága kisebb elemszámú, mint ő.

Megemlítünk két fontos tételt:

3. Tétel (Kőnig–Hall-tétel). *Legyen $G(A, F)$ egy páros gráf. Akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás G-ben, ha nincs Kőnig-akadály.*

4. Tétel (Kőnig–Frobenius-tétel). *Legyen $G(A, F)$ egy páros gráf. Akkor és csak akkor van teljes párosítás G-ben, ha nincs Kőnig-akadály és $|A| = |F|$.*