KOMBINATORIKA ElŐADÁS
Matematika BSc hallgatók számára

Multihalmazok

Előadó: Hajnal Péter 2017.

1. Példák

Egy halmaz elemeinek sokasága. Két halmaz akkor ugyanaz, ha minden objektum, ha az egyikben benne van, akkor a másikban is. Ha az egyikben nincs benne, akkor a másikban sincs benne. Egy halmazt ismerünk, ha minden objektumról tudjuk, hogy hozzátarozik vagy sem.

Ez a fogalom azonban sokszor nem elegendő egy valóságos helyzet matematikai megfogalmazására.

Példa. A kémiai egy korai forradalma az volt, amikor felismerték, hogy egy homogén kémiai anyagot molekulák alkotnak, amelyek meghatározott módon épülnek fel atomokból.

A molekula egyik (legyegyszerűbb és lagnaívabb) leírása az, hogy megadjuk milyen atomokból hány alkotja. A víz esetén ez 2 darab hidrogén és 1 darab oxigén atom. Azt mondjuk a víz kémiai képlete H_2O.

Igaz, hogy a víz molekulát hidrogén és oxigén atomok alkotják, de kémiailag igen fontos, hogy a hidrogén atomok kettő multiplicitással szerepelnek a molekulában.

További példák kémiai képletekre:
$NaHCO_3$: nátrium-hidrogén-karbonát,
HNO_3 : salétromsav,
Na_2SiO_3 : nátrium-szilikát.

Példa. Ismert, hogy minden pozitív egész felírható prímek szorzataként és ez a felírás (ha a tényezők sorrendje nem számít, akkor) egyértelmű. Például

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31,$$

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1.$$

A prímtényezős felbontás több mint a prímosztók halmaza. Minden prímosztóról tudnunk kell, hogy hányszorosan osztja a kiinduló számot.

Példa. A polinomok/betűs kifekezések matamatikájában a monom fogalma alapvető. Az x, y, z betűkre épített szorzatok (ahogy számoknál megszoktuk) a tényezők sorrendjének felcserélésével, hatvány írásmóddal átírhatók. Így x, y, x, z, x, x, z, x, x, z, y szorzata $x^6y^2z^3$. A kialakult monom nem csak azt fejezi ki, hogy milyen betűk alkotják, hanem azt is, hogy melyikből hány tényező szerepelt a szorzásban.

Példa. A XIX., XX. század kávéházi életének egy kedvenc játéka volt az anagramma. Egy adott szó, név, mondat betűkészletét kell venni és újrarendezni (kis/nagy betűk nem számítanak, közök, írásjelek tetszés szerint használhatók; gyakran rövid, hosszú magánhangzók is egyenértékűek) úgy, hogy értelmes szavak, mondatok alakuljanak ki. A MISSISSIPPI szó betűkészlete 1 darab M, 4 darab I, 4 darab S és 2 darab P.

Példák anagrammákra:
Anyján a sor. (Arany János)
Nos, anya jár. (Arany János)
silány szerepeim (Szinyei Merse Pál)
A doni gáz gyér. (Gárdonyi Géza)
siető dán prof (Petőfi Sándor)
jó árnyasan (?)
Dani, por festő (?)
De bősz a szó. (?)

Példa. Középiskolás vagy szórakoztató feladatokban visszatérő szereplő egy fiók, amelyben különböző színű zoknik vannak. Az azonos színű zoknik nem megkülönböztethetők. Hogyan írhatjuk le a fiók tartalmát? A benne lévő zoknik színei egy halmazt alkotnak, de ez a halmaz nem írja le pontosan a tartalmat. Minden színhez meg kell mondanunk, hogy hány olyan színű zokni van a fiókban.

2. A multihalmaz fogalma

A bevezető példák után természetes az alábbi fogalom.

Definíció. M egy multihalmaz a H halmaz felett, ha

$$M : H \to \mathbb{N}.$$

Az alaphalmaz (H) egy eleme (h) esetén $M(h)$-t a h elem multiplicitásának nevezzük. A fogalom további elnevezésekhez, jelölésekhez vezet.

Jelölés. $h \in H$ esetén azt írjuk, hogy $h \in M$, ha $M(h) > 0/M(h) \geq 1$.

R, M multihalmazok H felett. $R \subset M$ akkor és csak akkor, ha minden $h \in H$ elemre $R(h) \leq M(h)$.

M multihalmaz H felett. M elemszáma

$$|M| = \sum_{h:h\in H} M(h).$$

M multihalmaz H felett. $\mathcal{P}(M)$ az a halmaz, amely pontosan M rész-multihalmazait tartalmazza.

Legyen H egy halmaz. $\left(\!\binom{H}{k}\!\right)$ az a halmaz, amley a H feletti k elemű multihalmazokat „gyűjti össze”.

Megjegyezzük, hogy számunkra általában H egy véges halmaz. Ha valaki egy szám prímtényezős felbontásának tényezői által alkotott multihalmazt úgy tekinti, hogy az összes prím halmaza (erről ugye mindeki tudja, hogy végtelen) feletti multihalmaz, akkor is véges elemszámú tényező-halmazhoz jut.

Jelölés. Legyen M egy multihalmaz H felett. M tartója

$$\mathrm{supp}(M) = \{h \in H : h \in M/M(h) > 0\}.$$

Mi mindig véges tartójú multihalmazokat vizsgálunk. Ekkor az elemszámot leíró összeg — ami formálisan egy végtelen összeg, ha H végtelen — egy álvégtelen összeg (véges sok kivétellel 0 tagok szerepelnek benne).

3. Egy multihalmaz részhalmazai

Az alapkérdés: Adott M multihalmaz. Hány rész-multihalmaza van? Középiskolai nyelvvel: Osztálykirándulásra utazunk és bepakolunk. Kihúzzuk a zoknis fiókot és valamennyi zoknit elrakunk (többek között esetleg egyet sem, esetleg mindet). Hány lehetőségünk van az elvitt zoknik kiválasztására?

1. Tétel.

$$|\mathcal{P}(M)| = \prod_{h:h\in H}(M(h)+1).$$

Megjegyzés. A tételt nagyon tömör „egyetemi” jelöléssel írtuk le. Érdemes egy kicsit megállni és visszaírni a középsikolás jelölésre. Legyen $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Legyen M az a multihalmaz H felett, ahol a h_i elemnek m_i a multiplicitása ($M(h_i) = m_i$/ az i-edik színből m_i darab zokninK van). Ekkor a rész-multihalmazok száma

$$(m_1+1)\cdot(m_2+1)\cdot(m_3+1)\cdot\ldots\cdot(m_{n-1}+1)\cdot(m_n+1),$$

vagy

$$\prod_{i=1}^{n}(m_i+1).$$

Bizonyítás. A rész-multihalmaz kiválasztását független döntésekre bontjuk. Az alaphalmaz első elemének (h_1) mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban? Az alaphalmaz második elemének mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban? Az alaphalmaz harmadik elemének mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban? ... Az alaphalmaz utolsó elemének mekkora legyen a multiplicitása a rész-multihalmazban?

Az első döntésnél a $\{0, 1, 2, \ldots, M(h_1)\}$ halmazból kell kikerülnie a válasznak. Azaz $M(h_1) + 1$ lehetőség van A második döntésnél $M(h_2) + 1$ lehetséges kimenetel van. ... Az utolsó döntésnél $M(h_n) + 1$ lehetséges kimenetel van ($n = |H|$).

A rész-multihalmazok száma

$$(M(h_1)+1)\cdot(M(h_2)+1)\cdot\ldots\cdot(M(h_n)+1) = \prod_{h:h\in H}(M(h)+1).$$

■

A tétel csak a szorzási alapelv ismétlése volt.

4. Adott halmaz feletti multihalmazok

Az alapkérdés: Legyen H egy tetszőleges n elemű halmaz. $\left|\left(\!\binom{H}{k}\!\right)\right| =?$

Jelölés.

$$\left|\left(\!\!\binom{[n]}{k}\!\!\right)\right| = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right).$$

Középiskolás nyelven. Adott n számozott golyó. Húzzunk ki k-t úgy, hogy minden húzás után visszatesszük az éppen kihúzott golyót. Hányféle eredménye lehet a k húzásnak, amennyiben a húzás sorrendjét nem vesszük figyelembe?

2. Tétel.

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. I: A $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ feletti k elemű multihalmaz leírása a $m_1, m_2, \ldots, m_n$ multiplicitások megadása (az h_i elem multiplicitása m_i, így $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = k$). Ez kódolható a következő módon:

$$\underbrace{\circ\ldots\circ}_{m_1 \text{ darab}} \mid \underbrace{\circ\ldots\circ}_{m_2 \text{ darab}} \mid \underbrace{\circ\ldots\circ}_{m_3 \text{ darab}} \mid \ldots \mid \underbrace{\circ\ldots\circ}_{m_{n-1} \text{ darab}} \mid \underbrace{\circ\ldots\circ}_{m_n \text{ darab}}$$

Nyilván k darab $\circ$ karakter és $n-1$ darab $\mid$ karakter/elválasztójel alkotja a kódot.

Nézzünk egy példát. Legyen $H = \{a, b, c\}$, $k = 6$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\langle a,a,a,b,c,c\rangle = a^3bc^2 &\mapsto \circ\circ\circ|\circ|\circ\circ,\\
\langle a,b,b,b,c,c\rangle = ab^3c^2 &\mapsto \circ|\circ\circ\circ|\circ\circ,\\
\langle a,a,a,b,b,b\rangle = a^3b^3 &\mapsto \circ\circ\circ||\circ\circ\circ,\\
\langle a,a,a,a,a,a\rangle = a^6 &\mapsto \circ\circ\circ\circ\circ\circ||,\\
\langle b,b,b,b,c,c\rangle = b^4c^2 &\mapsto |\circ\circ\circ\circ|\circ\circ.
\end{aligned}$$

A kódok halmaza az $n+k-1$ hosszú $\circ$-$|$ sorozatok k darab $\circ$ karakterrel. Ha adott egy kód, akkor a kiinduló multihalmaz könnyen kiolvasható. Folytatva/megfordítva az előző példát:

$$\begin{aligned}
\circ|\circ\circ\circ\circ|\circ &\mapsto ab^4c,\\
\circ\circ\circ\circ|\circ\circ| &\mapsto a^4b^2,\\
|\circ\circ\circ\circ\circ\circ| &\mapsto b^6,\\
\circ\circ\circ\circ\circ||\circ &\mapsto a^5c,\\
\circ\circ\circ\circ||\circ\circ &\mapsto a^4c^2.
\end{aligned}$$

A példa matematikai jelentése: a kódoló függvénynek van inverze, párbaállító leképezés.

Azaz az összeszámolandó multihalmazok ugyanannyian vannak mint a lehetséges kódok. Egy kódhoz az $n+k-1$ pozícióból ki kell választanai a k darab $\circ$ karakter helyét. Ez $\binom{n+k-1}{k}$ lehetőség.

Ez a tételt igazolja.

II. Nyilvánvalóan

$$\left(\!\binom{1}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$$

minden n, k természetes számra. Ha az $\left\{\left(\!\binom{n}{k}\!\right)\right\}_{n=1,k=0}^{\infty,\infty}$ számokat egy síknegyedet elfoglaló táblázatba képzeljük, akkor a fenti képletek a táblázat szélét/peremét írják le: ott 1-esek állnak.

A bizonyítás folytatása ezen képlet bizonyítása, ami a nem szélső számokra mondja meg, hogy számolható ki a korábbiakból:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right).$$

Ahogy a Pascal-háromszöget leíró rekurziónál tettük a megszámolandó objektumokat (mostani estünkben a k elemű multihalmazokat) két csoportba osztjuk aszerint, hogy az 'n' elem bennük van-e vagy nem. A két esethez tartozó multihalmazokat külön-külön megszámoljuk és az összeadási elvre hivatkozva összeadjuk a két eredményt.

Ha 'n' elem nincs benne a multihalmazunkban, akkor a k elemű multihalmazt az $[n-1] = [n] \setminus \{n\}$ halmaz felett kell választanunk, a lehetőségek száma $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$.

Ha 'n' elem benne van a multihalmazunkban, akkor a k elemű multihalmazhoz, még mellé kell választani egy $k-1$ elemű multihalmazt. Ez a választás a $[n]$ halmaz felett értendő. (Itt van a különbség a részhalmazokhoz képest.) Az 'n' elem multihalmazhoz tartozása 1 multiplicitást jelent. Amikor mellé választunk objektumokat, hogy k elemű multihalmazhoz jussunk, akkor 'n' elem újra választható, multiplicitása növelhető (ez a lehetőség nem állt rendelkezésünkre a részhalmazok választásánál). A lehetőségek száma $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$.

Az összefüggést igazoltuk.

A bizonyított összefüggés a táblázatra vonatkozólag azt jelenti, hogy minden nem-perem- pozícióban álló szám ($\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$) a felette álló (északi szomszéd: $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$, előző sor, de ugyanaz az oszlop) elem és előtte álló (nyugati szomszéd: $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$ ugyanaz a sor, de az előző oszlop) elem összege:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	21
4	1	4	10	20	35	56
5	1	5	15	35	70	126

Jól látható a Pascal-háromszög számainak megjelenése. A tételben szereplő képlet helyességének igazolása egyszerű teljes indukció. ■

5. Egy multihalmaz sorbaállításai

A kávéházban ülő irók, költők minden probléma nélkül megértették, hogy mit értünk egy név betűkészletének sorbarendezésén. A fogalom természetes. A formalizmus azonban elrejtheti a természetességet. Addig kell „rágnunk” a formulánkat, míg jelentése egybeolvad a természetes értelmezéssel.

Definíció. Legyen M egy multihalmaz $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ n elemű halmaz felett. Legyen m_i a H_i elem multiplicitása. Legyen $\ell = |M| = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Ekkor M sorbaállítása egy

$$\pi : [\ell] = \{1, 2, 3, \ldots, \ell - 1, \ell\} \to H$$

leképezés, ahol minden h_i elem pontosan m_i darab pozícióhoz lett rendelve.

A sorbaállítási tulajdonság formálisan leírva:

$$|\{p \in [\ell] : \pi(p) = h\}| = M(h), \qquad \text{minden } h \in H \text{ esetén.}$$

Jelölés. Legyen $\sigma(M)$ az a halmaz, amely az M multihalmaz sorbaállításait gyűjti össze.

Az alapkérdés: Adott M multihalmaz. $|\sigma(M)| =?$ Középiskolai nyelven: Kimossuk a zoknis fiókunk tartalmát. (A fiókban az s_i színből m_i zokninkvolt $(i = 1, 2, \dots, k)$.) A mosás után kiakasztjuk a szárítókötélre száradni őket. Hányféle sorrendben akaszthatjuk ki őket?

3. Tétel. *Legyen M egy multihalmaz H felett. Ekkor*

$$|\sigma(M)| = \frac{|M|!}{\prod_{h:h\in H} M(h)!}.$$

Bizonyítás. Legyen $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, ahol $n = |H|$ M-et helyettesítsük egy $M^{\{\}}$ halmazzal: minden elemet helyettesítsünk multiplictásnyi különböző indexelt elemmel.

Példa $H = \{a, b, c\}$ esetben:

$$M = a^4bc^2 \mapsto M^{\{\}} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, c_1, c_2\},$$
$$M = a^2b^5 \mapsto M^{\{\}} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}.$$

A hozzárendelt $M^{\{\}}$ halmaz nyilván $|M|$ elemszámú. Így $|M|!$ darab sorbaállítása van. Mindegyiket soroljuk fel és töröljük le az indexeket. Így egy $|M|!$ hosszú listát kapunk M sorbaállításaiból. Általában egy sorbaállítás többször is szerepelhet. Azaz általában „túlszámolunk”.

A túlszámolás azonban könnyen követhető. M minden π_0 sorbaállítása $M^{\{\}}$-nek azokból az az elemeiből ered, amiket úgy kapunk, hogy a π_0 sorbeli $M(h_1)$ darab h_1 elemet $1, 2, \dots, M(h_1)$ indexekkel láttuk el, majd ettől függetlenül az $M(h_2)$ darab h_2 elemet $1, 2, \dots, M(h_2)$ indexekkel láttuk el valamilyen sorrenben, és így tovább. Az indexelésre $M(h_1)! \cdot M(h_1)! \cdot \ldots \cdot M(h_n)!$ lehetőség van. Minden $\sigma(M)$-beli elemet ennyiszeresen számolunk túl.

$\sigma(M)$ elemszaám egy osztással adódik, ahogy a tétel leírta. ■

6. Újból polinomok: Trinomiális tétel, multinomiális tétel

Térjünk vissza a polinomokhoz. Ismét a disztributív szabály segítségével bontsuk fel a zárójeleket, de a tényezők sorrendjéhez NE nyúljunk:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y) = xx + xy + yx + yy.$$

$$\begin{aligned}(x + y)^3 =&(x + y)(x + y)(x + y) = x(x + y)(x + y) + y(x + y)(x + y) =\\ =&xx(x + y) + xy(x + y) + yx(x + y) + yy(x + y) =\\ =&xxx + xxy + xyx + xyy + yxy + yxy + yyx + yyy.\end{aligned}$$

Mit látunk? A harmadik hatványnál az összes x, y tényezőkből felírt 3 tényezős szorzatokat ($2^3 = 8$ darab, szorzási szabály!). A tényezők sorrendjének figyelembe vételével ezeket felfoghatjuk mint az $\{x, y\}$ halmaz feletti három elemű multihalmazok sorbaállításai.

Hozzuk a monomokat rendezett alakba (egy x hatvány szorozva egy y hatvánnyal). x^iy^j alakú monomok lesznek, ahol $i+j=3$. Hányszor kapjuk meg x^iy^j-t? Annyiszor, ahány sorbaállítása can az $\langle\underbrace{x,\ldots,x}_{i\text{ darab}},\underbrace{y,\ldots,y}_{j\text{ darab}}\rangle$ multihalmaznak.

Ugyanez n-edik hatvánnyal is megismételhetőés kapjuk a binomiális tétel új alakját:

4. Tétel (Binomiális tétel).

$$(x+y)^n=\sum_{i,j\in\mathbb{N}:i+j=n}\frac{n!}{i!j!}x^iy^j.$$

Az új bizonyítás erénye, hogy háromtagú/trinom polinomok hatványozására is alkalmazható:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2=&(x+y+z)(x+y+z)=x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)=\\=&xx+xy+xz+yx+yy+yz+zx+zy+zz.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3=&(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)=\\=&x(x+y+z)(x+y+z)+y(x+y+z)(x+y+z)+\\&+z(x+y+z)(x+y+z)=\\=&xx(x+y+z)+xy(x+y+z)+xz(x+y+z)+yx(x+y+z)+\\&+yy(x+y+z)+yz(x+y+z)+zx(x+y+z)+zy(x+y+z)+\\&+zz(x+y+z)=\\=&xxx+xxy+xxz+xyx+xyy+xyz+xzx+xzy+xzz+\\&+yxx+yxy+yxz+yyx+yyy+yyz+yzx+yzy+yzz+\\&+zxx+zxy+zxz+zyx+zyy+zyz+zzx+zzy+zzz.\end{aligned}$$

Természetesen az utolsópéldánkban az össze nem vont, sorrend-tartó leírásban $3^3=27$ monom szerepel. Mennyi lesz az összevonás után x^2z együtthatója? Ahány monom „vonódik össze erre”? A 27-ből hány monom adja rendezés után x^2z-t? Ahány sorbaállítása van az $\langle x,x,z\rangle$ multihalmaznak. Azaz $\frac{3!}{2!0!1!}=3$.

Az n-edik hatványra elmondva ugyanezt kapjuk a következő tételt:

5. Tétel (Trinomiális tétel).

$$(x+y+z)^n=\sum_{i,j,k\in\mathbb{N}:i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}x^iy^jz^k.$$

A gondolatmenet minden probléma nélkül kiterjeszthető t tagú polinomok hatványozására: A kezdeti példák végigszámolását, majd a részletek kidolgozásáta az érdeklődő hallgatókra bízzuk.

6. Tétel (Multinomiális tétel).

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_t\in\mathbb{N}:i_1+i_2+\ldots i_t=n}\frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_t!}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_t^{i_t}.$$

Ha valaki a jelölés technikát szeretné gyakorolni, akkor olvassa el a következő formalizálását a multinomiális tételnek.

$$\left(\sum_{i=1}^t x_i\right)^n=\sum_{(k_i)_{i=1}^t\in\mathbb{N}^t:\sum_{i=1}^t k_i=n}\frac{n!}{\prod_{i=1}^t k_i!}\prod_{i=1}^t x_i^{k_1}.$$