KOMBINATORIKA ElŐADÁS
Matematika BSc hallgatók számára

Klikkek gráfokban

Előadó: Hajnal Péter 2017

1. Az alapkérdés

Emlékeztetünk egy a gráfok színezésénél tárgyalt fontos fogalomra:

Definíció. Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

Turán Pál vetette fel az alábbi fontos kérdés. Hány éle lehet legfeljebb egy n pontú teljes gráfnak, ha nem tartalmaz k elemű klikket?

A kérdés megválaszolásához az n pontú egyszerű gráfok közt meg kell adnunk egy sok élű gráfot, amely nem tartalmaz k elemű klikket. Majd be kell látnunk, hogy MINDEN ennél több élű gráf már szükségszerűen tartalmaz k elemű klikket. Vagy pedig igazolnunk kell hogy MINDEN olyan gráf, amely nem tartalmaz k elemű klikket annak élszáma felülről becsülhető a megkonstruált gráfunk élszámával.

2. Turán-gráfok, Turán Pál tétele

Az r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva ($O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \cdots \dot\cup O_r$) és két csúcs csak akkor lehet összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak.

Egy r részes gráf nem tartalmazhat $r+1$-elemű klikket. Valóban, $r+1$ csúcs kivétele esetén a skatulya-elv alapján lenne két csúcs, amely ugyanabba az osztályba esik. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetnek összekötve, a kivett csúcsok nem alkothatnak klikket. Egy másik indoklás lehet a következő: Az r-részes gráfok r színezhetőek. Így minden részgráfjuk is az. Speciálisan nem lehet $r+1$ pontú teljes részgráfjuk. Azaz nincs $r+1$ elemű klikk benne.

Mivel minél több élű gráfot szeretnénk adott méretű klikk nélkül, ezért természetes, hogy az r-részes gráfok közül kiemeljük a teljeseket: A teljes r-részes gráf egy olyan gráf, amely csúcsai r darab diszjunkt osztályba vannak sorolva ($O_1 \dot\cup O_2 \dot\cup \ldots \dot\cup O_r$) és két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha különböző osztályhoz tartoznak. Azaz az osztályozás után, ha két csúc sösszeköthető, akkor össze is kötjük őket.

Turán Pál első fontos észrevétele volt, hogy az teljes r-részes gráfok köül azoknak van a legtöbb éle, amelyekban a csúcsok a lehető legegyenletesebben vannak szét osztva az osztályok között.

A legegyenletesebb szétosztás fogalma magyarázatra szorul. Ha $r|n = |V(G)|$, akkor a legegyenletesebb szétosztása pontjainknak r osztályba úgy történhet, hogy minden osztályba $\frac{n}{r}$ csúcs kerül. Ha az oszthatóság nem teljesül, akkor nem követelhetjük meg az osztályok azonos méretűségét. A helyes féltétel: Bármély két osztály mérete legfeljebb egyben térhet el. Ha $k \nmid n$, akkor n/k — az átlagos osztályméret

— nem egész szám, két szomszédos egész közé $(\lfloor n/k \rfloor, \lceil n/k \rceil)$ közé esik. Sőt lennie kell olyan osztálynak amely mérete legfeljebb $\lfloor n/k \rfloor$, és olyannak is, amely mérete legalább $\lceil n/k \rceil$. Könnyen látható, ha lenne ettől a két számtól eltérő osztályméret, akkor lenne két osztály amely mérete legalább kettővel különbözne. Azaz a fentivel ekvivalens leírása az egyenletes osztályméretnek, hogy mindegyik osztály mérete a $\{\lfloor n/r \rfloor, \lceil n/r \rceil\}$ halmazból kerül ki. Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk. Vegyünk r osztályt $\lfloor n/r \rfloor$ mérettel. Ezzel lesz egy $n - r\lfloor n/r \rfloor$ méretű „hiányunk" az n-es csúcshalmaz-mérethez képest. Ez éppen n-nek r-rel való maradékos osztásánál a maradék, azaz egy 0 és $r-1$ közötti szám. Ennyi darab osztályt növeljünk meg eggyel (így méretük $\lceil n/r \rceil$ lesz). Ezzel kaptuk meg az n csúcs egyenletes osztályozását r osztályba.

Definíció. Az n pontú, r-részes $T_{n,r}$ Turán-gráf az az teljes r részes gráf, amely osztályai a fenti értelemben egyenletes méretűek.

1. Feladat (Turán Pál). *Legyen T egy teljes r-részes gráf, amelyben van két osztály, amelyek közül az egyik legalább kettővel több csúcsot tartalmaz mint a másik. Az osztályozást változtassuk meg úgy, hogy a nagyobb osztályból egy csúcsot átteszünk a másikba. Az új osztályozás is definiált egy teljes r-részes gráfot. Igazoljuk, hogy a változtatás során nőtt az élszám.*

2. Feladat (Turán Pál). *Igazoljuk, hogy az n pontú r részes gráfok között a Turán-gráfnak van legtöbb éle.*

Ezzel Turán Pál az első lépést megtette a kezdeti kérdés megválaszolásához. A további lépések sokkal nehezebbek voltak. Belátta, hogy semilyen más módszerrel nem adható megtöbb élű gráf, amely elkerül egy adott méretű klikket.

3. Tétel (Turán-tétel). *Ha G egy n pontú k elemű klikket nem tartalmazó egyszerű gráf, akkor*

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

A tétel egy másik alakja:

4. Tétel (Turán-tétel). *Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amelyre*

$$|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|,$$

akkor G tartalmaz k-elemű klikket.

A $k = 2$ eset semmit mondó: Az 1-részes Turán-gráf csúcsai egyetlen osztályba vannak sorolva. Benne nem halad él, hiszen csak a különböző osztályok között vezet él. Azaz az 1-részes Turán-gráf az üres gráf. Az ennél több élet tartalmazó gráfban van él, így két elemű klikk is.

A $k = 3$ eset már érdekes, nem egyszerű. Ezt jóval korábban a XX. század Mantel tűzte ki feladatként. Ezt a speciális esetet ma Mantel tételének nevezik.

5. Tétel (Mantel-tétel). *Ha G egy n pontú háromszöget nem tartalmazó egyszerű gráf, akkor*

$$|E(G)| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = |E(T_{n,2})|.$$

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges háromszöget nem tartalmazó n pontú egyszerű gráfot. Legyen D gráfunk maximális fokszáma, és legyen v egy D fokú csúcs. Jelölje N a v csúcs szomszédainak halmazát. Legyen $M = V(G) - N$. Ekkor nyilván $|N| = D$, $|M| = n - D$, $v \in M$.

Az eredeti $V(G)$ csúcshalmazon egy új gráfot, $\widetilde{G}$-t definiálunk: N és M között minden élt behúzunk.

Nézzük meg, hogy a két gráfban előforduló fokszámok hogyan viszonyulnak. Belátjuk, hogy minden csúcs $\widetilde{G}$-beli fokszáma legalább akkor mint G-beli foka. Azaz minden $x \in V$ csúcs esetén

$$d_G(x) \le d_{\widetilde{G}}(x).$$

Ha $x \in M$, akkor $d_{\widetilde{G}}(x) = |N| = D$, ami a G-beli maximális fokszám. Az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Ha $x \in N$, akkor $\widetilde{G}$-ben x minden M-beli ponttal össze van kötve. Ugyanekkor G-ben legfeljebb az M-beli csúcsokkal lehet összekötve, hiszen más esetben az összekötés két végpontja és v egy háromszöget alkotna.

Ezzel kaptuk, hogy $\widetilde{G}$-ben a fokok rendre lagalább akkorák mint G-ben. Így az élszám is legalább akkora mint G-ben:

$$|E(G)| \le |E(\widetilde{G})| = |N| \cdot |M| = D(n - D) \le \left(\frac{D + (n - D)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

Ebből az állítás nyilvánvaló. ■

Megjegyezzük, hogy Turán Pál nem állt meg a kiinduló kérdés megválaszolásánál. További kérdéseket tett fel. Többek között a négy pontú teljes gráfot mint a tetraéder gráfja fogta fel. Tétele ennek „tiltása" mellett megadta milyen sok éle lehet egy egyszerű gráfnak. Megkérdezte mi a helyzet, ha más szabályos testnek a gráfját tiltjuk. Speciálisan hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak ha nem tartalmazza a kocka gráfját mint részgráfot. Ez a kérdés a mai napig megválaszolatlan.

Turán Pál tétele nagyon sok kutatást ösztönzött és segített. További problémái a mai napig fontos kutatási irányokat jelölnek ki. Az általa kialakított gráfelméleti ágat extremális gráfelméletnek nevezzük.

3. Ramsey-tétel

Egy ismert középiskolai feladattal, fejtörővel kezdünk.

6. Feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges hatfős társaságban található három ember, akik áronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)*

A feladat zárójelbeli megjegyzése arra utal, hogy a társaság emberei között az ismerettséget egy egyszerú gráffal írhatjuk le. Két ember pontosan akkor szomszédos/összekötött ha ismerik egymást. Három ember, akik páronként ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű klikket alkotnak. Három ember, akik páronként nem ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű független csúcshalmazt alkotnak.

Definíció. Egy gráfban egy $F \subset V(G)$ csúcshalmaz független, ha nincs olyan él, amely mindkét végpontja F-beli.

Egy H csúcshalmazt nevezzünk homogénnek, ha bármely két különböző eleme az összekötöttség szempontjából ugyanolyan. Azaz a H csúcshalmaz homogén, ha klikk vagy független.

Ezek után feladatunkat úgy is megfogalmazhatjuk, hogy: *Minden hatpontú egyszerű gráfban van három elemű homogén halmaz.*

A feladat „gráfelméleti lefordítására ” van más lehetőség is. A társaságot alkotó emberek most is gráfunk csúcshalmazát alkotják. Azonban bármely két csúcsot öszekötünk. Ezzel egy teljes gráfot kapunk. (Mondhatjuk azt is, hogy $V(G)$, a teljes csúcshalmaz egy klikk lesz.) Az ismeretség/nem ismerős viszonyt most színekkel „kódoljuk”. x-et és y-t összekötő élt kékre színezzük ha az x csúcs által reprezentált személy ismeri az y csúcs által reprezentált személyt. Különben az összekötő él piros lesz. A társaság ismeretségi visoznyát egy piros/kék élszínezett teljes gráffal „kódoltuk”. Egy M csúcshalmaz monokromatikus, ha az M-en belüli csúcsokat összekötő összes él ugyanolyan színű.

Ezek után feladatunkat úgy is megfogalmazhatjuk, hogy: *A hatpontú teljes gráf minden piros/kék élszínezésében van három elemű monokromatikus halmaz.*

A továbbiakban a színezési nyelvezetet használjuk. Lássuk a feladat megoldását.

Bizonyítás. Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát. A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék. A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többen. Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v-ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt. Két esetet különböztetünk meg.
1. eset: J-n belül halad kék él. Legyen egy ilyen él az xy él. Ekkor $\{v, x, y\}$ egy kék monokromatikus halmaz.
2. eset: J-n belül nem halad kék él. Ekkor J egy piros monokromatikus halmaz, készen vagyunk. ■

Ramsey volt az aki észrevette, hogy ha célunk nem háromelemű monokromatikus halmaz keresése, hanem k eleműé, akkor is garantált lesz a siker, ha a csúcshalmaz/társaság elég nagy (az „elég nagy” fogalmát persze tisztáznunk kell, a fogalom k értékétől függeni fog).

7. Tétel (Rasmey-tétel). *Tetszőleges 4^k fős társaságban található k ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)*

Azaz a 4^k pontú teljes gráf minden piros/kék élszínezésében van k-elemű monokromatikus halmaz.

Megjegyezzük, hogy a 4^k méret távolról sem optimális. $k = 3$ esetén 64-et ad az eredeti feladat 6-os méretéhez képest. Ennek ellenére nagyon sok kutató probálkozása ellenére sem sikerült a méretet $3{,}9999999^k$-ra csökkenteni.

Bizonyítás. Rendezzük sorba a csúcsokat. Vegyük az első v csúcsot és a többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v-ből piros vagy kék él megy. A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy legalább a csúcsok fele túlélő csúcs.

A túlélő csúcsokkal ismételjük meg a fentieket: Az első túlélő u csúcsot kiválasztjuk (a már kiválasztott v mellé) és a több túlélő csúcsot a hozzávezető él színétől függően két csoportba osztjuk. A többségi szomszédokat meghagyjuk, a többit eldobjuk.

Ezt ismételjük addig amíg a túlélő csúcsok elfogynak. Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszzám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.

Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros. De a másodiknak kiválasztott u esetén a rá illeszkedő többségi szín lehet kék. Azt tudjuk, hogy a sorrendben minden kiválasztott csúcsból a későbbi csúcsok felé haladó éle egyszínűek (vagy piros vagy kék).

A bizonyítás vége egyszerű. Minden kiválasztott csúcsra nézzük meg, hogy hátrafelé piros vagy kék él halad. Vegyük a többséget a két csúcskategória közül. Ezek legalább k-an lesznek és nyilvánvalóan monokromatikus halmazt alkotnak. ■

4. Ramsey-számok

Láttuk, hogy a Ramsey-tételben szereplő méret nem optimális, azaz nem a lehető legkisebb ($k = 3$ esetén nagyon távol van az „igazságtól"). Mi a helyzet az eredeti feladattal?

Könnyű látni, hogy az abban szereplő 6 társaságméret optimális. Ha ötfős társaságokat nézünk, akkor a megfelelő feladat nem igaz. Ehhez csak egy ellenpélda-társaságot kell kitalálnunk. Vegyünk öt embert, akik egy köralakú asztal körül ülnek. Tegyük fel, hogy a szomszédosak ismerik egymást, a többiek nem. Ez egy speciális társaság, ami egy lehetőség a feladatban. Könnyű látni, hogy itt bárhogy veszünk ki három embert, lesz köztük ismerős és nem ismerős pár is.

Mi a helyzet ha k fős monokromatikus halmazt keresünk?

Definíció. Legyen $R(k)$ az a minimális n szám, hogy az n pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemeú monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

A kiinduló feladat és a fenti példa szerint $R(3) = 6$. Ramsey tétele szerint $R(k) \leq 4^k$.

Erdős és Szekeres élesítette Ramsey becslését. Belátták, hogy $R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}$. Ez a becslés $k = 3$ esetén már a 6-ot adja felső becslésként (ahogy a kiinduló feladat). Azonban nagy k esetén ez sem lesz jobb mint $3{,}9999999^k$.

Erdős Pál belátta, hogy az $R(k)$ számok valóban exponenciális növekedésűek.

8. Tétel (Erdős Pál tétele).

$$R(k) \geq \sqrt{2}^k.$$