KOMBINATORIKA ElŐADÁS
Matematika BSc hallgatók számára

Alapelvek

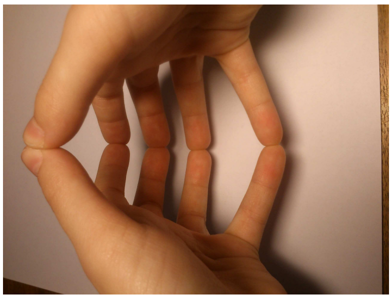
Előadó: Hajnal Péter 2017.

1. Kombinatorikus alapelvek

Három alapelvet ismertetünk. Mindhárom gyökerei az óvodáig vagy még messzebb mennek vissza. Nyelvezetünk középiskolai/egyetemi szintű lesz. Mögötte azonban látni kell a természetes tartalmat. Mindig feltesszük, hogy VÉGES halmazokkal dolgozunk, de erről később még szó lesz.

I.

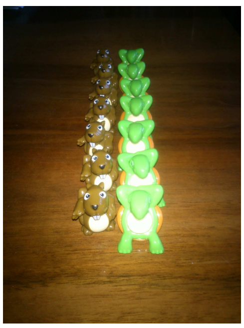
A következő képhez hasonlót mi is könnyen készíthetünk:



1. ábra.

A képen egy kislány teszi össze bal, iletve jobb kezének ujjait. Ő már tud számolni, de ennélkül is látja (ahogy a számolni nem tudók is), hogy bal és jobb kezén ugyanannyi új van.

A következő képen kétfajta Kinder tojás figurák sorakoznak egymás mellett.



2. ábra.

Az egymás mellé került figurák a két fajtából egy-egy. Párok alakulnak ki a két fajta figurák között. Ismét számolás nélkül tudhatjuk, hogy a két fajtából ugyanannyi darabunk van.

A következő kép az internetről származik, bal és jobb lábas cipőket ábrázol.

3. ábra.

Egy pillanat alatt átlátjuk, hogy a balos és jobbos cipők párokat alkotnak. Tehát ugyanannyi balos cipő van a képen mint jobbos. A pontos számuk meghatározása egy számolás, összetettebb mint az egy pillanat alatt látható „azonos elemszámúság”.

A következő (internetes) képen óvodások sétálnak. Mindegyik párt egy fiú és egy lány alkotja

4. ábra.

Ez alapján mindenki számolás nélkül tudja, hogy a csoportban ugyanannyi fiú van mint lány.

Meg is van az első alapelvünk.

HA két halmaz elemeit párokba tudjuk állítani, AKKOR a két halmaz azonos elemszámú.

Azért pontosítsunk. Mit értünk az alatt, hogy két halmaz elemeit párba állítjuk? Ha a párokban álló gyerekek a játszótéren eltöltött idő után visszaindulnak, akkor az óvonéni megkérdezi „Mindenkinek megvan a párja?”. Világos, hogy egy párbaállításnál mindenkinek van egy párja. Egy fiúnak egy lány, egy lánynak egy fiú, egy balos cipőnek jobbos, egy bal kézen lévő ujjnak egy jobb kézen lévő ujj. *A* és B halmazok párbaállításánál van egy $\varphi : A \to B$ és egy $\phi : B \to A$ leképezés. Mindkettő egy elemhez a párját rendeli. Az is nyilvánvaló, hogy a párom párja én vagyok. Matematikai irásmóddal, ha $x \in A$, akkor x párjának ($\varphi(x) \in B$-nek) párja ($\psi(\varphi(x)) \in A$) x, azaz $\psi(\varphi(x)) = x$ bármi legyen is az $x \in A$ elem. Illetve hasonlóan ha $y \in B$, akkor y párjának ($\psi(y) \in A$-nak) párja ($\varphi(\psi(y)) \in B$) y, azaz $\varphi(\psi(y)) = y$ minden $y \in B$ elemre.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy φ egy párbaállító leképezés A-ból B-be, illetve ψ egy párbaállító leképezés B-ből A-be.

Természetesen, ha minden lány tudja a párját, akkor a párbaállítás ismert. Azaz φ meghatározza ψ-t és fordítva is. A két leképezés ellentétes/fordított irányba teszi ugyanazt.

Nézzük csak a párbaállításnak azon felét, ami a fiúkhoz rendeli lány párjukat. Hogyan írhatjuk le , hogy ezen leképezés párbaállító. Nyilván különböző fiúkhoz különböző lányokat kell rendelnünk. Továbbá minden lányhoz kell lenni olyan fiúnak, akihez a kiinduló lányt rendeljük párként. Ezen két tulajdonsággal szokták leírni a párbaállító leképezéseket. Ha „valamit” mindenki számára egyértelműen leírunk, akkor azt mondjuk hogy ezt a „valamit” definiáljuk. A leírás a „valami” definíciója.

Definíció. Egy $\varphi : A \to B$ leképezés párbaállító leképezés, ha rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

(I) $a \neq a'$ esetén $\varphi(a) \neq \varphi(a')$,

(S) tetszőleges $b \in B$ esetén alkalmas $a \in A$ elemre $\varphi(a) = b$.

A matematikus szeretik a fontos tulajdonságokat külön névvel illetni. Az (I) tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a φ leképezés *egy-egyértelmű* leképezés. Néha csak azt írjuk φ 1-1. Az (S) tulajdonság esetén azt mondjuk φ leképezés *ráképezés*.

A mai világban gyakoriak az idegen kifejezések használata. Az egy-egy értelmű φ leképzésre azt mondjuk *injekció*, φ injektív. A ráképzés φ leképzésre azt mondjuk *szürjekció*, φ szürjektív. Tehát $\varphi : A \to B$ leképzés párbaállító az A és B halmazok közt ha injektív és szüjektív is, idegen szóval *bijektív*. Azaz a leképzések párbállító tulajdonságának egy másik neve a bijekció. Nyelvet tanultunk, a matematika nyelvét.

A matematikusok a jelöléseiket is próbálják ügyesen választani. Először talán szokatlan jelölések hosszú használat után természetessé válnak. A legtöbb jelölés hosszú évszázadok alatt végletesedik. $x \mapsto \psi(\varphi(x))$ leképezés neve a két leképzés *kompozíciója* és szokásos jele $\psi \circ \varphi$: először φ-t, majd ψ-t végezzük el. Az elsőre szokatlan sorrend oka, ha $\psi \circ \varphi$-t az x helyen nézzük, azaz $\psi \circ \varphi(x)$-et vizsgáljuk, akkor így x-et először a „közelebbi” függvénybe helyettesítjük, majd az eredményt a távolabbiba.

Ez természetesen csak akkor értelmes, ha a φ függvény által felvett értékeken ψ értelmezett. Speciálisan beszélhetünk a kompozícióról, ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$. A kompozíció sorrendje nagyon FONTOS. A fenti esetben $\psi \circ \varphi : A \to A$ és $\varphi \circ \psi : B \to B$. Ha $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to C$, ahol A, B, C három független halmaz, akkor csak az egyik sorrendű kompozíció értelmes. Az amikor először φ-t, majd ψ-t alkalmazzuk. Azaz ekkor $\psi \circ \varphi$ egy jól definiált leképezés.

Egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi$ is minden alkalmas elemhez önmagát rendeli. A két kompozíció azonban lényegesen különböző. Az egyik A-n, a másik B-n értelmezett. Ha egy $H \to H$ függvény minden $h \in H$ elemhez h-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy függvényünk a H-n értelmezett *identitás* függvény, jele id_H. Tehát egy párbaállító leképezés pár ($\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$) esetén $\psi \circ \varphi$ és $\varphi \circ \psi(x)$ is identitás, DE $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi(x) = \mathrm{id}_B$. Ha két függvénynek ilyen viszonya van, akkor azt mondjuk, hogy egymás inverzei.

Definíció. $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$ leképzések egymás inverzei, ha $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ és $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$.

A fenti gondolatmenet során adódott, hogy bijektív leképzéseknek van inverze. Sőt megfordítva is igaz. Kaptunk egy „tételt”.

1. Tétel. *$\varphi : A \to B$ akkor és csak akkor bijekció, ha van hozzá inverz leképzés.*

Tehát ha fiúk egy A halmazából lányok egy B halmazába történő leképzés párbaállító leképzés ($a \mapsto a$ párja), akkor van a lányok halmazából a fiúk halmazába menő leképzés ($b \mapsto b$ párja), hogy mindenki ($A \cup B$ minden elemére) párjának párja önmaga. Továbbá fordítva is igaz: ha fiúk egy A halmazából lányok egy B halmazába történő leképzéshez ($a \mapsto a$ párja) van a lányok halmazából a fiúk halmazába menő leképzés ($b \mapsto b$ párja), úgy hogy mindenki párjának párja önmaga, akkor a kiinduló leképezés párbaállító.

Két halmaz között leírt leképzésről gyakran úgy a legegyszerűbb belátni, hogy bijekció, hogy megadjuk inverzét. Azaz leírjuk, hogy B egy tetszőleges elemére hogyan mondható meg, hogy mely $x \in A$ elem párja.

Egy $A \to B$ leképzés bijekció mivoltja, vagy hozzá inverz létezése tekinthető a következő módon is. Tegyük fel, hogy egy csoportban leírjuk, megtanítjuk a $\varphi : A \to B$ leképézést. A következő órán emlékeztetőnek, hogy mindenki felidézze a fogalmat egy példát veszünk. Egy konkrét $a \in A$ elemre kiszámoljuk $\varphi(a)$-t. Az eredmény egy $b \in B$ eleme lesz. Letöröljük a táblát, csak b marad fent. Ekkor belép Olga a terembe, aki előző órán ott volt és megértette a φ leképzést. Azt is megértette, hogy ezt a függvényt értékelte ki a csoport és a táblán az eredmény. Ha bármilyen B-beli elem is legyen a táblán, akkor Olga ki tudja következtetni a kiinduló a elemet, akkor leképezésünk párbaállító. Ha valamely b-hez ilyen a nincs, akkor nem (igazából ekkor leképezésünk nem ráképzés). Ha valamely b-hez több a létezik (azaz nem lehet biztos melyik elem volt a példa kiinduló pontja), akkor sem párbaállító leképezésünk (valójában ekkor leképzésünk nem 1-1). A fenti „mese” minden φ leképzéshez egy „fejtörőt” definiál. A fejtörő, akkor és csak akkor oldható meg egyértelmúen (akkor jól definiált), ha leképzésünk bijektív.

⋆

Matematikai nyelvezettel a $\varphi : A \to B$ leképezés akkor állítja párba az A és B halmaz elemeit, ha egy-egyértelmű és ráképezés. Mi történik, ha csak azt tudjuk, hogy leképzésünk egy-egyértelmű (ráképezést nem tudjuk). Az alábbi képen két fajta Kinder játékokat raktunk egymás mellé.

5. ábra.

A zöld teknősök mellé mindig került egy mókus. A zöld teknősök T halmazából van egy „párja” leképezés a mókusok M halmazába. Ez nem ráképzés. Az utolsó két mókus nem lesz kép a leképzésnél. Egyik teknősnek sem lesznek a párjuk. A leképézés egy-egyértelmű/injektív, de NEM ráképzés/szürjektív. Ebből következtethetünk arra, hogy a teknősök kevesebben vannak (azaz a mókusok vannak többen).

A következő tételt mondhatjuk ki:

2. Tétel. *Legyenek A és B véges halmazok. Ha $\varphi : A \to B$ leképézés egy-egyértelmű, de NEM ráképezés, akkor $|A| < |B|$.*

A figyelmes olvasó észrevehet egy eddigeikhez képest új fogalmat. Tételünk egyik feltétele, hogy halmazaink végesek. Mi is ez? Miért is van szükségünk erre a feltételre?

$\star$

Az első alapelvbármilyen két halmazra teljesül. Igazából végtelenekre az alapelv definiálja mikor is mondjuk, hogy a két halmaz elemszáma/mérete/számossága ugyanaz. A pozitív egészek és a negatív egészek ugyanannyian vannak: Az „előjel váltás” párokba állítja őket (azaz egy bijekció a két halmaz között). Akár sétálni is elküldhetjük őket mint egy korábbi képen szereplő óvodásokat. Az első alapelv alapján a pozitív és negatív egész számok „ugyanannyian vannak”.

Ennek ellenére a negatív egészékhez lehet egy-egyértelmű módon párokat rendelni a pozitív egészek közül úgy is, hogy maradjon párnélküli pozitív egész. Például ha x párja $-x+1$, akkor a negatív számok egyikének sem lesz párja az 1. Ha pedig a negatív egész, x párjának $-2x$-et nevezzük ki, akkor minden páratlan pozitív egész olyan lesz, mint a korábbi képünkön az utolsó két mókus. Egy végtelen halmazhoz még egy elemet hozzá adva, vagy akár mindegyik eleme mellé egy új elemet rakva ez nem változtatja meg „nagyságát”. Ennek ellenére vannak „különböző” végtelenek. Egy végtelen halmazt is lehet nagyobbítani. Ez azonban a Halmazelmélet nevű matematikai terület témaköre. Kombinatorikában mi mindig véges halmazokkal dolgozunk.

Akkor jó lenne tisztázni, hogy mik a véges halmazok? Néhány példa véges halmazra:

$$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \ldots$$

A fenti példánk nyilván végtelen, minden n természetes számra $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ a fenti sorozat egy eleme. Erre a halmazra van is egy jelölés: $[n]$. Azaz $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($[0] = \emptyset$, $[1] = \{1\}$). Ezeket standard véges halmazoknak nevezzük.

Definíció. Egy H halmaz véges, ha elemei párba állíthatók egy standard véges halmaz elemeivel.

Ha H elemei és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ elemeit párba állítjuk, akkor azt mondjuk, hogy H egy n elemű halmaz. Azt is mondhatjuk, hogy egy H halmaz véges, ha elemeit meg tudjuk számolni, amely számolás végeredménye egy természetes szám.

A bal kezünkön véges sok ujj van. Meg is számolhatjuk őket: egy, kettő, három, négy, öt. Mit csináltunk? Párbaállítottuk az ujjainkat és az $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazt. Azaz bijekciót létesítettünk ujjaink és egy standard véges halmaz között. Ismét egy óvodás tanulmányt formalizáltunk a matematika nyelvén.

II

Hány erdei gyümölcsöt látunk az alábbi képen?

6. ábra.

A gyümölcsök fajtája nyilván egy rendező elv. Számoljuk meg az áfonyát: 5 darab. Ribizli: 4 darab, fekete ribizli: 3 darab. Összesen $5 + 4 + 3$ erdei gyümölcs van a képen.

A megszámolandó objektumokat csoportosítottuk (minden objektum pontosan egy csoporthoz tartozott), majd a csoportok elemszámait külön megállapítottuk. A részeredmények összege a végső válasz.

Ha egy halmaz elemszámát szeretnénk megszámolni, amely több közös elem nélküli részhalmazra van bontva, akkor a fentiek alapján gondolkodhatunk.

Az új alapelv kimondása előtt vezessünk be egy fogalmat. Két halmazra azt mondjuk, hogy *diszjunkt*, ha nincs közös elemük. Ha több halmazunk van úgy, hogy mindegyik elemük csak egyetlen egyhez tartozik hozzá, azaz bármelyik kettő diszjunkt, akkor azt mondjuk, hogy halmazaink páronként diszjunktak.

Páronként diszjunkt halmazok uniójának elemszáma a halmazok elemszámának összege.

Formulával:

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ha az } A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ páronként diszjunktak, akkor} \\ |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| \ldots + |A_k|.\end{array}}$

Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor összeszámolandó elemeinket két (A és B) közös elem nélküli halmazba osztjuk:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján az összeadás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

III

Nagyinak egy muffin sütője van amibe három sorban, minden sorban négy helyre lehet tenni a muffin tésztáját. Nagyi persze minden helyet megtölt. Éppen most vette ki a sütőből a friss muffinokat.

7. ábra.

Hányat is? Az első sorban négy, a másodikban is, a harmadikban is. Összesen $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

Mindjárt meg is ettem egyet. Melyiket? A második sor harmadik darabját. (Abban láttam a legtöbb málnát.) A 12 muffin mindegyike azonosítható így: melyik sor, melyik helye. A sor három lehetőség közül kerül ki. Az ezen belüli hely négyféle lehet. Mindegyik sorra mindegyik hely egy-egy muffint ír le. Különböző választás (akár közös sor, de azon belül különböző hely, akár azonos hely, de különböző sorokban) különböző muffinhoz vezet. A sor leírása nem mondja meg, hogy az összeszámolandó muffinok melyikéről van szó. Hasonlóan, ha csak a helyet írjuk le, nem tudjuk melyik muffinról is beszélünk. Ezek csak egy „komponensek” az összeszámolandó objektumok leírásában.

⋆

Kis fiam meglátta az alábbi képet az interneten. Ő is ki szerette volna rakni ezt. Hány lego darab fekhasználásával tehette ezt meg?

6 sor mindegyikében 4 pozíció. A (sor, pozíció) párokra a lehetőségek száma, ami a látott lego darabok száma $6 \cdot 4 = 24$.

8. ábra.

⋆

Olga egyetemre jár. A kombinatorika előadás olyan teremben van, ahol a hallgatók székei négy sorban vannak, mindegyikben tíz székkel.

9. ábra.

Hány hallgató számára van ülőhely a teremben? A válasz nyilvánvaló: $4 \cdot 10 = 40$.

⋆

Olga kollégiumi szobájának ablakából kinézve az alábbi képet látja:

Hány ablakot lát? A ház öt szintes és mindegyiken nyolc ablak van (egy kicsi és hét nagy). Összesen $5 \cdot 8 = 40$ ablakot lát Olga, ha kinéz az ablakán.

⋆

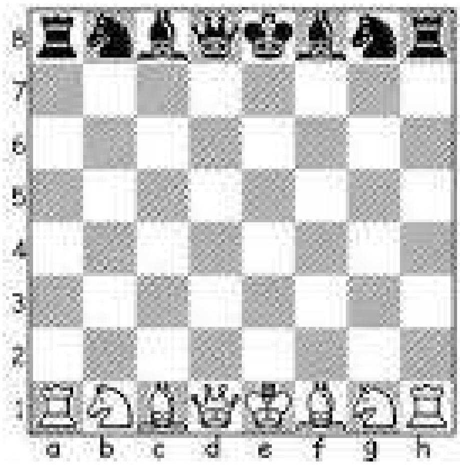
Hány mező van a sakktáblán?

A mezők 8 sorba és 8 oszlopba vannak rendezve. A mezők pontosan azonosíthatók, ha megadjuk melyik sorban és melyik oszlopban van a leírandó mezőnk.

A szokás, hogy az oszlopok balról jobbra haladva a, b, c, d, e, f, g, h „neveket”, a sorok alúlról haladva $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ „neveket” kapnak:

10. ábra.

11. ábra.



12. ábra.

Egy mező például az $a1$: az első mező a legalsó sorban. Vagy $e3$: az ötödik mező az alúlról számított harmadik sorban.

A mezők ugyanannyian vannak mint a betű-szám párok, ahol a betű az angol ábécé első nyolc betűje köül kerül ki és a szám a pozitív egészek első nyolc elemének egyike.

A matematikusok erre egy külön jelölést vezettek be. Az ilyen párok a kétféle lehetőséget adóhalmazok Descartes-szorzata, vagy egyszerűen (halmazelméleti) szorzata. A fenti „koordináta-rendszer” párjai az $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmazt alkotják. Ahogy a sík geometria koordináta párjainak halmazára a jelölés $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, röviden $\mathbb{R}^2$.

Definíció. A és B halmazok Descartes-szorzata $A \times B$ pontosan az (a, b) párokat tartalmazza, ahola $a \in A$ és $b \in B$ tetszőleges elemek.

A két tényezős szorzat könnyen kiterjeszthető, három, négy sőt tetszőleges véges tényezős szorzat esetében. Például három tényezős Descartes-szorzat hármasokat, három hosszú koordinátasorokat tartalmaz, ahol a megfelelő koordináták a megfelelő halmazból jönnek.

Definíció. Az A_1, A_2, $\ldots$, A_k halmazok $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ Descartes-szorzata $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ elem k-asokat tartalmaz, ahol az i-edik elem/koordináta/komponens az i-edik halmazból kerül ki, azaz $a_i \in A_i$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ indexre.

⋆

Költözik a család. Simon dobozokba rakta a holmiját. Az új helyén a szobájába rakták dobozait. Amikor belépett a következőt látta:

13. ábra.

Hány doboza volt? Nyilván a dobozok/a megszámolandó objektumok azonosítására három koordináta kell (szélesség, mélység, magasság). Mindegyik egymástól függetlenül három értéket vehet fel. A válasz $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Ezekután az alapelvünknek már világosnak kell lennie:

Halmazok szorzatának elemszáma a tényező-halmazok elemszámainak szorzata.

Formulával:

Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ halmazok esetén $\lvert A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \rvert = \lvert A_1 \rvert \cdot \lvert A_2 \rvert \cdot \ldots \cdot \lvert A_k \rvert$.

Talán jó ha kiemeljük az egyszerű esetet, amikor két (A és B) tényezőnk van:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Ha belegondolunk ez az alapelv az ami alapján a szorzás fogalmát bevezették és gyakoroltatták (még az óvodában).

2. Alkalmazások

(A) Egy n elemű halmaz részhalmazainak száma

Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak? Ha egy kicsit elgondolkozunk a kérdésen, akkor rájövünk, hogy néhány dolgot tisztánunk kell, ha teljesen világosan szeretnénk látni a kérdést. A feladat egy H halmaz részhalmazairól beszél. De melyikről? Nincs pontosítva, vagyis egyszerre mindegyikről.

Nézzük meg kérdésünk egy speciális esetét. Hány részhalmaza van egy négy elemű halmaznak? Ez az egyszerű kérdés nem állít komoly feladat elé. Vesszük a „kedvenc” négy elemű halmazunkat, mondjuk a $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazt. Ennek részhalmazai:

$$\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\big\}.$$

A részhalmazok felsorolásánál volt egy rendező elvünk. Először az üres halmazt (az egyetlen 0 elemszámú részhalmazt) írtuk le, majd az egy elemű részhalmazokat, amelyeket a két eleműek, majd a három és végül a négy eleműek követtek. Az azonos elemszámú részhalmazok közül a 1-et tartalmazókkal kezdtünk, ezek sorrendejét a a második legkisebb (ha azok is megegyeztek akkor a haramadik legkisebb) elemek határozták meg: amelyik részhalmaznál kisebb volt értéke az került előbbre. Ez a rendező elv nemcsak munkánk megszervezésében volt segítségünkre. Ez adott alapot arra, hogy meggyőződéssel állíthassuk listánk teljes és minden részhalmazt egyszer sorol fel. Tehát a kérdésre a válasz az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaznak tizenhat részhalmaza van.

Vehettük volna az $\{a, b, c, d\}$ halmazt. Ebben az esetben a részhalmazok listája

$$\big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\big\}$$

lett volna. Ismét tizenhat részhalmazhoz jutottunk. Vehettük volna az első négy prímszám halmazát vagy sok más négy elemű halmazt. Mindig ugyanazt az eredményt kaptuk volna? Jól van kitűzve kezdő kérdésünk?

Természetesen igen. Ösztönünk azt sugalja, hogy válaszunk n függvényvében (a választott halmaz elemszáma) megadható. Ez azt jelenti, hogy bárhogy veszünk két n elemű halmazt (két párbaállítható halmazt) — mondjuk H-t és H'-t —, akkor részhalmazaik száma ugyanaz lesz. Azaz részhalmazaik is párbaállíthatók.

Azaz az első alapelv alapján ha $H \sim H'$, akkor $\mathcal{P}(H) \sim \mathcal{P}(H')$

Hogyan tudunk azonban egy kétkedőt meggyőzni?

A továbbiakban legyen két azonos elemszámú halmaz H és H'. Legyen ψ egy párbaállító leképezés, amely „bizonyítja” ezt. Igaz-e, hogy H és H' részhalmazai ugyanannyian vannak, azaz párbaállító leképzést definiálhatunk H részhalmazai és H' részhalmazai között?

Ezekután már egyszerű dolgunk van. H egy H' részhalmaza minden elemének van egy párja. Ezek a párok H' egy részhalmazát adják. Ezen párok halmazát rendeljük hozzá R-hez. Formálisan legyen $\phi(R) = \{\psi(r) : r \in R\}$. Belátjuk, hogy az így leírt ϕ leképézés párbaállító leképezés.

Ehhez a következő típusú rejtvény egyértelmű megoldhatóságát kell igazolnunk: Adott H' egy tetszőleges R' részhalmaza. Keressük meg azt az R részhalmazát H-nak, amelyhez a fenti módon rendelt pár R'. A rejvény megoldása természetes, egyszerű; a hallgatóra bízzuk.

A hosszú kitérő után lássuk a kérdés megválaszolását. Több középiskolában a következő (vagy ehhez nagyon hasonló) az indoklás: R kiválasztásához H mindegyik eleméről el kell döntenünk, hogy R-be benne van-e vagy nincs. Ez n darab két kimenetelű döntés. Ezek a döntesek függetlenek, így meghozataluk (R kiválasztása) $2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$-féle módon leghetséges.

Ezt az ötletet írjuk le „egyetemi nyelven”. Legyen R a $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ n-elemű halmaz egy részhalmaza. Kódoljuk R-et a következő módon: $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ahol b_i azt az információt írja, le, hogy h_i benne van-e R-ben. Ha igen, akkor legyen $b_i = 1$. Más esetben (h_i nincs R-ben) legyen $b_i = 0$. Ismét egy jelölés: Sokszor talákozunk a következó helyzettel. b értéke többféle lehet $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$. Hogy a lehetséges értékék közül melyik lesz az bizonyos feltételektől függ ($\mathcal{F}_i$ annak a feltétele b értéke ℓ_i legyen). Ennek tömör jelölése

$$b = \begin{cases} \ell_1 & \text{ha } \mathcal{F}_1 \\ \ell_2 & \text{ha } \mathcal{F}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \ell_k & \text{ha } \mathcal{F}_k. \end{cases}$$

Esetünkben

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } h_i \in R \\ 0 & \text{különben} . \end{cases}$$

Az így kialakuló $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ kód — amit a továbbiakban $\kappa(R)$-rel jelölünk — $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}$ egy eleme. A szorzatban a tényező-halmazok H elemeivel vannak azonosítva, azaz n darab van belőlük. A fenti szorzathalmazra $\{0,1\}^n$ a szokásos jelölés. Ebből a halmazból kerülnek ki a kódok. Azaz $\kappa : \mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n$.

Példa. Legyen $H = \{a, b, c, d\}$. A kód egyes komponensei az ábécé-sorrendet követve kódolják az egyes elemek viszonyát a részhalmazhoz. Azaz

(i) $\kappa(\{a, c, d\}) = (1, 0, 1, 1)$,

(ii) $\kappa(\{d\}) = (0, 0, 0, 1)$,

(iii) $\kappa(\{a, b, c, d\}) = (1, 1, 1, 1)$,

(iv) $\kappa(\emptyset) = (0, 0, 0, 0)$,

(v) Ha adott $\{0,1\}^n$ egy tetszőleges eleme, mondjuk $(1,0,1,0)$, akkor pontosan egy részhalmaz kódja lesz, esetünkben $\{a,c\}$-é.

A példa után természetes, hogy κ egy párbaállító leképzés. Az első alapelv alapján egy n elemú halmaz részhalmazainak száma ($|\mathcal{P}(H)|$) megegyezik $\{0,1\}^n$ elemszámával, ami a harmadik alapelv alapján $|\{0,1\}|^n = 2^n$.

(A) Egy n elemű halmaz páros elemszámú részhalmazainak száma

Hány páros elemszámu 'részhalmaza van egy nem-üres $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ n-elemú halmaznak?

Egy megszámolandó objektum (egy páros elemszámú részhalmaz) leírásahoz ismét azt kell tisztáznunk, hogy H elemei hogy viszonyulnak R-hez. Ez n darab két kimenetelű döntés. De nem függetlenek! Az első $n-1$ döntést függetlenül meghozhatjuk, de H utolsó eleme az eddig kiválasztott elemek számáank paritását vagy meghagyja (ha az utolsó elem nem kerül be a részhalmazba) vagy megváltoztatja (ha az utolsónak maradt elem R-be kerül). Tudva, hogy páros sok elemet kel kiválasztanunk az utolsó döntés már determinált lesz.

A formális bizonyítás: Jelöljük $\mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$-val H páros elemszámú részhalamzait. Egy $R \in \mathcal{P}_{\text{páros}}(H)$ részhalmaz $\kappa_0(R)$ kódja legyen $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$, ahol b_i a h_i elemhez tartozó, fenti módon defniált bit. Azaz $\kappa_0 : \mathcal{P}_{\text{páros}}(H) \to \{0,1\}^{n-1}$.

Belátjuk, hogy ez bijekció. Ehhez igazolnunk kell. hogy a κ_0-hoz tartozó fejtörő megoldható. A fejtörőre egy példa: Legyen 0010011101 egy kód (a zárojelek, vesszők elhagyhatók, a kód továbbra is egyértelműen olvasható). A H alaphalmaz legyen $[11] = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$, az i-edik bit az i szám viszonyát írja le a kódolt részhalmazhoz. Mi a megfelelő részhalmaz?

Ahogy előbb természetes, hogy [10]-ből a részhalmazunk pontosan a $3, 6, 7, 8, 10$ elemeket tartalmazza. A kérdés 11 viszonya a keresett halmazhoz. Tudva, hogy halmazunk páros sok elemet tartalmaz kikövetkeztethetjük, hogy 11-nek benne kell lenni, azaz $R = \{3, 6, 7, 8, 19, 11\}$.

A példát tisztán átlátó hallgató le tudja írni κ_0 inverzét és ellenőrizheti a szükséges tulajdonságokat, amelyek igazolják, hogy κ_0 bijekció. Ezek után a kiinduló kérdésre a válasz 2^{n-1}.

3. Egy kis jelölés-technika

Az utolsó két alapelvünket egy kicsit tömörebb formában is felírhatjuk. Ehhez egy „jelölés technikai megállapodásra” van szükségünk.

A második alapelvben páronként diszjunkt halmazok uniója szerepelt. A halmazokat A-val jelöltük és ahol indexet használtunk a különböző halmazok megkülönböztetésére. Az unió általános tagja A_i, ahol az i értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”. Szerepelt egy összeg is, amely általános tagja az $|A_i|$ elemszám, ahol az i értékei az $1, 2, \ldots, k$ sorozaton „futnak át”. A középiskolai $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k /\ |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$ jelölésből ki kell találni a sémát, az általános tagot és az indexek futását. Erre a következő jelölést találták ki a matematikusok:

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k} A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i, \quad \text{illetve} \quad \sum_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k} |A_i|, \quad \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

A középiskolai típusú $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$/ $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$ jelölésekre is van tömörebb forma:

$$\prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} A_i, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} A_i, \quad \prod_{i=1}^{k} A_i, \text{ illetve } \prod_{i\in\{1,2,\ldots,k\}} |A_i|, \quad \prod_{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k} |A_i|, \quad \prod_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Σ az összeg/szumma görög nevének kezdőbetűje. Π a szorzat/produktum görög nevének kezdőbetűje.

Szokatlan? Aki először látja, annak majdnem biztos az. Használni kell, „olvasni” az új fajta képleteket. Először lassan majd, majd megszokjuk. A matematikusok is emberek, nem is buták. A jól bevált formalizmus lesz csak általánosan elfogadott. Ezek használata sok elönnyel jár.