KOMBINATORIKA ElŐADÁS
Matematika BSc hallgatók számára

Ramsey-számok alsó becslései

Előadó: Hajnal Péter 2017

1. Az alapkérdés

Bevezető feladat: Tetszőleges társaságban (ahol az ismerettség kölcsönös reláció) garantáltan található három olyan tag, akik vagy mind ismerik egymás, vagy senki nem ismer senkit.

Ezt a feladatot kétféleképpen is megfogalmazhatjuk a gráfelmélet nyelvén:

Gráf változat: Tetszőleges G hat pontú egyszerű gráfban garantáltan található három csúcs, hogy köztük az összes lehetséges (három darab) él szerepeljen (három elemű klikket alkossanak) vagy egyikük se legyen a másik kettővel összekötve (három elemű független halmazt alkossanak).

Élszínezéses változat: K_6 tetszőleges piros/kék élszínezésében garantáltan található három olyan csúcs, amelyek között mindhárom él ugyanolyan színű (monokormatikus).

Frank Plumpton Ramsey (1903—1930) brit matematikus (jelentős filozófiai és közgazdaságtani munkássággal) bizonyította be az alábbi tételt:

1. Tétel (Ramsey tétele 1929). *K_{4^k} éleit tetszőlegesen színezve piros/kékkel garantáltan található k csúcs, amelyek között haladó összes ($\binom{k}{2}$ darab) él ugyanolyan színű.*

Nyilván K_k-ra nem lett volna igaz a fenti tétel. Természetes kérdés: mi az a minimális pontszám, aminél a tétel állítása igaz lesz.

$$R(k) = \min\{S \in \mathbb{N} : K_S \text{ éleit tetszőlegesen piros/kék színekkel színeve garantáltan lesz } k \text{ csúcs, amelyek közt minden él ugyanolyan színű}\}.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$, Ramesy tétele átfogalmazva: $R(k) \leq 4^k$.

2. Ramsey-számok alsó becslései, konstrukciók

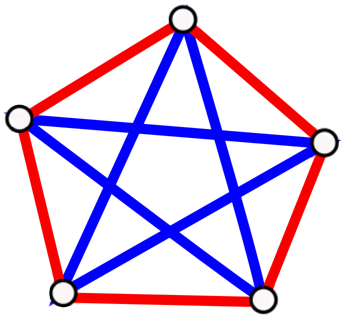
$R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.

Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezéset egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat. Az álábbiakban két ilyen állítást írok fel. Bizonyításukról nem írok semmit csak „láttatom” a konkrét színezéseket.

2. Lemma.

$$R(3) > 5.$$

Bizonyítás.

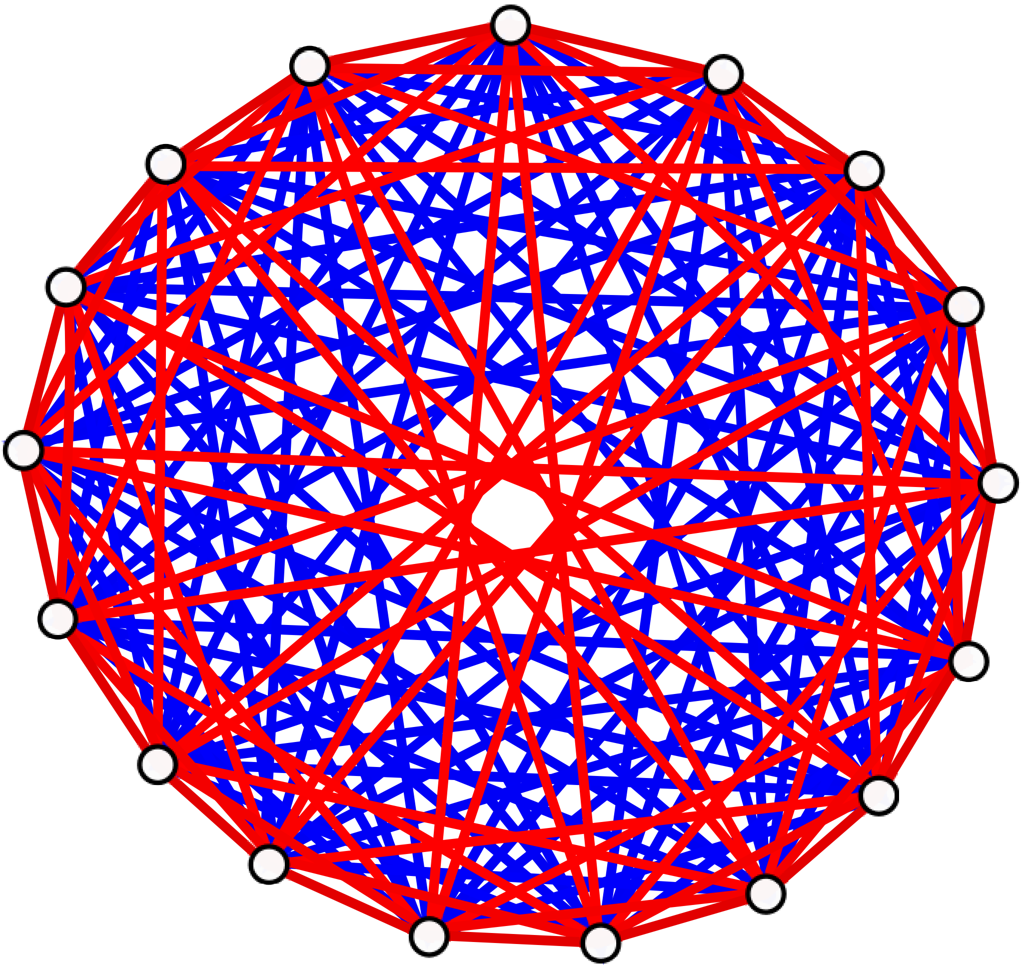


■

3. Lemma.

$$R(4) > 17.$$

Bizonyítás.



A csúcsok halmaza $Z_{17} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 16\}$. ij pontosan akkor piros, ha $i - j \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$, ahol a „számtan” a modulo 17 ($\mathbb{Z}_{17}$-beli aritmetika).

$\blacksquare$

Megjegyezzük, hogy a fenti becslések élesek, abban az értelemben, hogy $R(3) = 6$ (ez a bevezető feladat alapján nyilvánvaló) és $R(4) = 18$. $R(5)$ értéke mind a mai napig nem ismert.

3. Ramsey-számok alsó becslései, Erdős Pál módszere

Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Azaz úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést. Egy példán mutatjuk be módszerét.

4. Tétel.

$$R(20) > 1000.$$

Bizonyítás. Vegyünk fel egy 1000 elemű csúcshalmazt, mondjuk $V = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Legyen K a V csúcshalmazon definiált teljes gráf. Látnunk kellene, hogy az élek kiszínezhetők piros/kék színekkel, hogy ne legyen olyan 20 elemű csúcshalmaz, amelyen belül minden él ugyanolyan színű.

A K teljes gráf piros/kék élszínezéseiből készítünk egy táblázatot. A táblázat sorai az összes lehetséges 20 elemű csúcshalmaznak felelnek meg. Egy R részhalmaz sorában élszínezések lesznek. Pontosan azok, amelyek R-en belül minden élt ugyanarra a színre színeznek.

Mekkora lesz táblázatunk? Nyilván $\binom{1000}{20}$ sora lesz. Egy sorba (az R részhalmaz sorába) élszínezéseket rajzolunk. A sorban kialakuló lista egy eleméhez el kell döntenünk, hogy az R-en kívüli élek (ebből $\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}$ darab van) színezését hogyan végezzük el. Ezt az éleken külön-külön egymástól függetlenül végezhetjük. Másrészt el kell döntenünk, hogy az R-en belüli élek közös színe mi legyen. Ez utóbbi választás két lehetőséget jelent, míg az első $2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$-t. Tehát minden sorban

$$2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$$

színezés lesz.

A táblázatunk színezései egy

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}}$$

hosszú lsitába fűzhetők. Számszerúen kevesebben lesznek, hiszen színezések ismétlődnek. Például a „minden él piros” az összes sorban ott lesz. Ha belátjuk, hogy van olyan színezés, ami táblázaatunkban nem szerepel, akkor tételünket beláttuk. Ez nyilvánvaló lesz, ha

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2}-\binom{20}{2}} < 2^{\binom{1000}{2}}.$$

Azaz táblázatunk listája nem tartalmaz annyi elemet mint K összes élszínezése. Biztosak lehetünk a tábláaztban nem szereplő színezés létezésében, annak ellenére hogy ilyet nem látunk (maga a táblázat is felrajzolhatatlan, áttekinthetetlenül hatalmas).

A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű. A mindkét oldalon szereplő 2-es tényezőkkel egyszerűsítsünk. Így a bizonyítandó egy ekvivalens formáját kapjuk:

$$\binom{1000}{20} < 2^{\binom{20}{2}-1} = 2^{189}.$$

A bal oldalon szereplő binomiális együttható becslése egyszerű:

$$\binom{1000}{20} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 981}{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 1} < \frac{1024 \cdot 1024 \cdot \ldots \cdot 1024}{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{(2^{10})^{20}}{(2^4)^5} = 2^{200-20} = 2^{180},$$

ahol a számláló összes tényezőjét (a legkézenfekvőbb kettő hatvánnyal) felülről becsültük, míg a nevező első öt tényezőjét alúlról becsültük 16-tal, a többit pedig 1-gyel. A tétel adódik. ∎

Megjegyezzük, hogy akik ismerik a valószínűségszámítás nyelvét, azok másképpen is elmondhatják a fenti bizonyítást.

Bizonyítás. Legyen γ egy véletlen piros/kék élszínezése K-nak uniform eloszlással (mindegyik lehetséges színezés ugyanolyan valószínűségű). Legyen M_R az az esemény, hogy egy R 20-elemű csúcshalmazt γ monokormatikusan színez. Legyen M az az esemény, hogy γ valamelyik 20-elemű csúcshalmazt monokromatikusan színezi. Azaz

$$M = \cup_{R:R\subset V,|R|=20} M_R.$$

Így nyilván

$$\mathbb{P}r[M] \leq \sum_{R:R\subset V,|R|=20} \mathbb{P}r[M_R].$$

A fenti számolás alapján

$$\mathbb{P}r[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínúségű. Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz. Ezt kellett igazolnunk. ∎

A nyelv változtatása nem tűnik jelentősnek. Első látásra idegen is lehet. Az új nyelv azonban a kombinatorika egyik legfontosabb módszerét alapozta meg: a valószínűségszámítási módszerét. A későbbi alkalmazásokban a nyelv már nem egy öncélú dolog az összeszámolási kérdések eltakarására. A valószínűségszámítás fontos, kikerülhetetlen eszközzé vált. Ebben Erdős Pálnak központi szerepe volt.

Végül (a számolások mellékelése nélkül) megemlítjük, hogy a módszer általában milyen becslést ad:

5. Tétel (Erdős Pál tétele 1947). *Ha $k \geq 2$, akkor*

$$R(k) \geq (\sqrt{2})^k.$$

Ramsey és Erdős tétele összegezve

$$(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k.$$

A becslések közel 70 éve ismertek és élesítésük központi probléma. Ennek ellenére az exponenciális becslések alapjain mind a mai napig nem sikerült javítani.