Kombinatorika BSc hallgatók számára

Párosítások

Előadó: Hajnal Péter 2011–12. őszi félév

1. Alapfogalmak

Definíció. Legyen G egy gráf, $E(G)$ a G élhalmaza, $V(G)$ gráfunk csúcshalmaza. Legyen $F \subseteq E(G)$. Ekkor $V(F) = \{x \in V : x \text{ illeszkedik egy } F\text{-beli élre}\}$.

$V(F)$ egy v eleméről azt mondjuk, hogy F *lefedi* a v csúcsot.

Egy élnek két végpontja van (esetleg egybeis eshetnek) így minden F élhalmaz esetén $|V(F)| \leq 2|F|$.

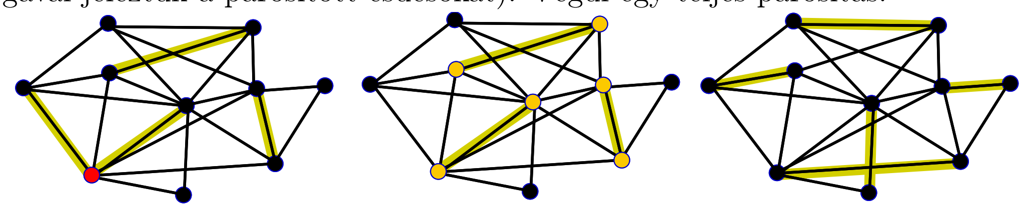
Definíció. M párosítás, ha $|V(M)| = 2|M|$ vagyis M nem-hurok élek végpont-diszjunkt halmaza.

Egy M párosítás által lefedett v csúcsról azt mondjuk, hogy *párosított*. Legyen $\overline{V}(M) = V(G) - V(M)$ az M által nem párosított/M-párosítatlan csúcsok halmaza. $|\overline{V}(M)| = |V(G)| - |V(M)| = |V(G)| - 2|M|$

Definíció. Ha az M párosítás és $V(M) = V(G)$, akkor *teljes párosításról* beszélünk.

Természetesen csak páros pontszámú gráfoknál lehetséges, hogy létezzen teljes párosítás.

Példa. Egy gráf egy élhalmazzal (sárgával kiemelt élek), ami nem párosítás (pirossal jelzett a csúcs, ahol két eleme összefut). Majd egy párosítás, ami nem teljes párosítás (sárgával jeleztük a párosított csúcsokat). Végül egy teljes párosítás.



Definíció. $\nu(G)$ a G-beli párosítások között a legnagyobb méret.

Ekkor $2\nu(G)$ a legtöbb csúcs, amit párosítani tudunk. $|V(G)| - 2\nu(G)$ a legkevesebb csúcs, ami kimarad egy párosításból.

A fenti fogalmak természetes módon vezetnek a következő algoritmikus problémákhoz:

Párosítási problémák: Adott egy G gráf.

(1) Keressünk egy M maximális elemszámú/optimális párosítást.

(2) Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét.

(3) Döntsük el, van-e G-ben teljes párosítás.

(4) Keressünk minél nagyobb elemszámú párosítást.

2. Mohó algoritmus „nagy” párosítás keresésére

A (4) problémát vizsgáljuk. Egy M párosítás kiszámítását elemi döntésekre bontjuk: minden élre el kell döntenünk, hogy beválasztjuk-e a párosításba vagy nem. Az algoritmus mohó jelzője onnan ered, hogy nem vonjuk vissza soha a korábbi döntésünket, vagyis ha egy élt egyszer beválasztottunk a párosításba, már nem vesszük ki később. Azzal, hogy korábbi döntésünket nem bíráljuk felül egy nagyon hatékony, egyszerű eljárást kapunk. Sajnos nincs garancia, hogy az output optimális.

Mohó párosítási algoritmus:

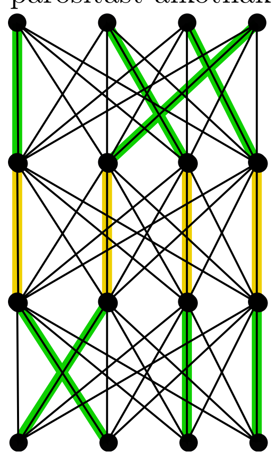
(Inicializálás) $M := \emptyset$
// Egy M párosítást növelünk, ami kezdetben üres.
Rendezzük sorba az éleket: $\pi : e_1, e_2, \ldots, e_m$ ($m = |E(G)|$).
$i = 1, 2, 3, \ldots, m$ esetén
  Ha $M \cup \{e_i\}$ párosítás, akkor
  [(Mohó növelés/bővítés) $M \leftarrow M \cup \{e\}$].
  Ha $M \cup \{e_i\}$ NEM párosítás, akkor „M marad”.
  // Ebben az esetben azt mondjuk e_i-t elvetettük/eldobtuk.
(Ciklusból való kilépés) Az aktuális párosítás az output.
// Ekkor minden M-en kívüli élt vizsgálatakor elvetettünk,
// azaz összefut valamelyik M-beli éllel.

Megjegyezzük, hogy a mohóság miatt nincs ciklizálási veszély, az algoritmus szükségszerűen leáll.

Jelölés. Legyen $\nu_\pi(G)$ a mohó algoritmus által kiválasztott élek száma, ha a π élsorrenddel dolgozik.

Elakadás esetén tudjuk, hogy párosításunk egy speciális módon, a mohó módon nem javítható. Ez nem jelenti azt, hogy ettől eltérő módon nem tudunk nagyobb párosításhoz jutni.

Példa. Gráfunknak négy ugyanannyi csúcsot (legyen ez n, az ábrán $n = 4$) tartalmazó „emelete” van. Két szomszédos emelet között minden élt behúztunk, további élek nincsenek. A sárga élek egy teljes párosítást alkotnak a két középső szint között. Ha a mohó algoritmus ezeket választja ki először, akkor elakad: n élt tartalmaz outputja. A zöld élek egy teljes párosítást alkotnak ($2n$ darab él).



Megemlítünk egy, a fenti algoritmussal kapcsolatos alaptételt. Ez azt garantálja, hogy a nagyon egyszerű algoritmus outputja nem olyan rossz.

1. Tétel. *Tetszőleges π élsorrendre*

$$\frac{\nu(G)}{2} \leq \nu_\pi(G) \leq \nu(G).$$

Bizonyítás. A második egyenlőtlenség nyilvánvaló abból, hogy a mohó algoritmus egy párosítást számol ki.

Az első egyenlőtlenség igazolása: Legyen M_π a mohó algoritmus outputja, $C = V(M_\pi)$ a mohó algoritmus otputja által párosított pontok halmaza.

Definíció. Egy $L \subset V(G)$ csúcshalmaz lefogó ponthalmaz, ha minden $e = xy \in E(G)$ élre $\{x, y\} \cap L \neq \emptyset$.

Megjegyzés. A következő „mese" a lefogó ponthalmaz fogalmát világítja meg: Gondoljunk G-re mint egy múzeum alaprajzára. Az élek a folyosók, a csúcsok a folyosók talákozásai, ahova őröket ültethetünk. Egy csúcsba ültetett őr az ott összefutó éleket ellenőrzi. Egy L csúcshalmaz akkor és csak akkor lefogó ponthalmaz, ha odahelyezve őröket az összes folyosót ellenőrizzük.

A lefogó ponthalmazok szoros kapcsolatban állnak párosításokkal.

Észrevétel. Legyen M egy párosítás és L egy lefogó ponthalmaz. Ekkor

$$|M| \leq |L|.$$

Valóban, ha M k elemű, akkor mind a k élére legalább az egyik végpontja L-beli. Ezek a végpontok M különböző éleire különböző csúcsok, hiszen M párosítás. Így L már M lefogásához legalább k csúcsot igényel.

Az alapészrevétel egy kihasználása a következő egyenlőtlenség

$$\nu(G) = \max\{|M| : \ M \text{ párosítás}\} \leq \min\{|L| : \ L \text{ lefogó ponthalmaz}\} := \tau(G).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti egyenlőtlenség bizonyos gráfokra nem éles (valódi egyenlőtlenség). Például C_5, az öt hosszú kör esetén $\nu(C_5) = 2 < 3 = \tau(C_5)$. Az összes páratlan hosszú kör hasonló példaként szogálhat.

Visszatérve a mohó algoritmushoz azt kell észrevennünk, hogy C az algoritmus által párosított pontok halmaza nyilván lefogó, továbbá $|C| = 2\nu_\pi(G)$. Tudjuk, hogy C mérete minden párosítás méretét felülről becsli, speciálisan $\nu(G) \leq |C| = 2\nu_\pi(G)$. ■

3. Párosítások páros gráfokban

Emlékeztető. Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk A, F színosztályokkal, ha $V(G) = A \dot\cup F$ és minden élének egyik végpontja A-beli, másik F-beli. A páros gráfság a 2-színezhetőségnek egy másik megfogalmazása. Mélyebb jellemzés (és egyben magyarázatot ad az elnevezésre), hogy G akkor és csak akkor páros, ha minden köre páros hosszú.

A páros gráfok vizsgálatában először csak alapfogalmakat definiálunk és eredményeket ismertetünk. A bizonyítani ezek után fogunk.

Emlékeztető. Egy L lefogó és M párosítás esetén $|M| \leq |L|$, így $\nu(G) \leq \tau(G)$. Lehetséges, hogy az egyenlőtlenség szigorú.

2. Tétel (Kőnig Dénes tétele). *Ha G páros, akkor*

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Definíció. Legyen M egy párosítás. Ekkor legyen

$$\delta_A(M) = |A| - |M|,$$

azaz a párosítatlan alsó pontok száma.

Definíció. Legyen $K \subset A$ egy tetszőleges halmaz. Legyen

$$\kappa(K) = |K| - |N(K)|,$$

ahol $N(K)$ a K-beli csúcsok szomszédainak halmaza. Azaz

$$N(K) = \{x : \text{ valamely } k \in K \text{ csúcsra } k \text{ és } x \text{ szomszédos}\},$$

így speciálisan $N(K) \subset F$.

A fenti elsőre idegen jelölést az alábbi észrevétel magyarázza meg.

Észrevétel. Legyen M egy tetszőleges párosítás egy páros gráfban, míg K alsó csúcsok egy tetszőleges halmaza. Ekkor

$$\kappa(K) \leq \delta_A(M).$$

Valóban M a K-beli csúcsokat csak $N(K)$-ból párosíthatja. Így legfeljebb $|N(K)|$ darab K-beli csúcs lehet párosítva. Azaz legalább $|K| - |N(K)|$ darab K-beli csúcs marad párosítatlan. Ebből az észrevétel adódik.

Az észrevételből több dolog is kiolvasható.

Az első olvasatunkhoz úgy jutunk, hogy az észrevételt a legnagyobb párosításra és arra a K-ra alkalmazzuk, amely elemszám többlete a legnagyobb a szomszédságához képest.

$$\max\{\kappa(K) : K \subset A\} \leq \min\{\delta_A(M) : \ M \text{ párosítás}\}.$$

Egyből megemlítjük hogy egyszerű becslésünk igazából egyenlőség. (Ez már nem annyira egyszerű.)

3. Tétel (Kőnig—Ore-formula). *Ha G páros, akkor*

$$\max\{\kappa(K) : K \subset A\} = \min\{\delta_A(M) : \ M \textit{ párosítás}\}.$$

Az észrevételből szintén kiolvasható, hogy ha gráfunkban van olyan $K \subset A$, hogy $\kappa(K) > 0$, akkor nem lehet olyan párosítás, amely az összes alsó pontot lefedi.

Definíció. Egy G páros gráfban $K \subset A$ Kőnig-akadály, ha $\kappa(K) > 0$, azaz az alsó pontok K halmazának szomszédsága kevesebb elemszámú, mint K maga.

Azaz Kőnig-akadály léte megakadályozza az A-t lefedő párosítás létezését. Ez az egyszerű észrevétel ismét megfordítható.

4. Tétel (Kőnig-Hall-tétel). *Legyen G páros gráf. G-ben akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha nem tartalmaz Kőnig-akadályt.*

A tétel egyszerűen következik a Kőnig—Ore-formulából. Vegyük észre, hogy az A-t lefedő párosítás léte megfogalmazható, mint $\min\{\delta_A(M) : M \text{ párosítás}\} \leq 0$. Továbbá Kőnig-akadály hiánya megfogalmazható, mint $\max\{\kappa(K) : K \subset A\} \leq 0$.

5. Tétel (Kőnig-Frobenius-tétel). *Legyen G páros gráf. G-ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |F|$ és nem tartalmaz Kőnig-akadályt.*

A teljes párosítás létére vonatkozó feltételek szükségessége (minden nehéz tétel nélkül) nyilvánvalóak. A feltételek elégsége adódik a Kónig—Hall-tételből. Ez garantálja, hogy legyen A-t lefedő párosítás G-ben. Ez $|A|$ sok F-beli pontot is lefed. Az első feltétel miatt ez minden F-beli pontot lefed, így teljes párosítás.

A fent említett szerzők egymástól függetelnül dolgoztak. Frobenius és Hall munkásága megelőzi Kőnig Dénes munkásságát. Azonban Kőnig Dénes volt az első, aki a gráfelmélet nyelvén mondta ki a tételeket. Megemlítjük, hogy mi volt Hall eredeti tétele. Ehhez azonban néhány fogalmat kell bevezetnünk.

Definíció. Legyen $H_1, H_2, \ldots, H_m$ egy U alaphalmaz részhalmazainak rendszere. Ennek $x_1, x_2, \ldots, x_m$ különböző reprezentáns rendszere, ha

a) x_i-k különbözők,

b) $x_i \in H_i$ minden i-re.

Ismét egy „mese" világítja meg a fogalmat. Legyen U egy város lakosainak halmaza. Legyen $H_1, H_2, \ldots, H_m$ a város klubjainak tagsághalmazai. Az önkormányzat megköveteli minden klubtól, hogy egy titkárt nevezzen meg, aki a klubot képviseli. Hogy ne legyen összeférhetetlenség egy lakos nem képviselhet több klubot is. Egy különböző reprezentáns rendszer éppen egy lehetséges titkár kinevezés.

Definíció. Legyen $H_1, H_2, \ldots, H_m$ egy U alaphalmaz részhalmazainak rendszere. $\mathcal{R}$ legyen egy részrendszer. Ezt Hall-akadálynak nevezzük, ha a kiválasztott részhalmazok uniója kevesebb elemet tartalmaz mint ahány halmazt kivettünk.

6. Tétel (Hall-tétel). *$H_1, H_2, \ldots, H_m$ egy U alaphalmaz részhalmazainak rendszere. Akkor és csak akor létezik különböző reprezentánsok rendszere, ha nincs Hall-akadály.*

Bizonyítás. $\mathcal{H} : H_1, H_2, \ldots, H_m$ halmazok rendszerét ábrázolhatjuk egy $G_{\mathcal{H}}$ páros gráffal. Az alsó pontok halmaza a halamzrendszerünk halmazai. A felső pontok U elemei. Egy $x \in U$ és H_i felső-alsó csúcspár akkor és csak akkor összekötött, ha $x \in H_i$. Ekkor egy különboző reprezentánsok rendszere éppen egy alsó pontokat lefedő párosítás $G_{\mathcal{H}}$-ban. Halmazaink egy részhalmaza (azaz alsó pontok egy részhalmaza) pontosan akkor egy Hall-akadály, ha gráfelméleti értelemben Kőnig-akadály $G_{\mathcal{H}}$-ban. Így a Hall-tétel a Kőnig—Hall-tétel egy átírása. Illetve a Kőnig—Hall-tétel a Hall-tétel gráfelméleti megfogalmazása. ■

Végül lássuk a bizonyításokat.

Először igazoljuk, hogy a Kőnig—Ore-formula adódik Kőnig tételéből: Tudjuk, hogy páros gráfok τ és ν paramétere egyenlő (feltesszük Kőnig tételét). Ekkor vegyünk egy M optimális párosítást és egy L optimális lefogó halmazt. A két halmaz ugyanakkora és L lefogja M éleit. Ez csak úgy lehet, ha L-et az M-beli élek egy-egy végpontja adja össze.

Legyen $A - L$ azon alsó pontok halmaza, amelyek nem esnek L-be. Vizsgáljuk meg $N(A - L)$-et. Egyrészt $L \cap F$ ide tartozik, hiszen ez a halmaz elemei M-en keresztül $A - L$-beli elemekkel szomszédos. Másrészt $N(A - L)$-nek $L \cap F$-en kívüli eleme nem lehet, mert ha lenne egy e él, amely ilyen szomszédot jelentene, akkor e alsó végpontja $A - L$-ben, felső végpontja $F - L$-ben lenne, azaz nem lenne lefogva. Összefoglalva $N(A - L) = L \cap F$.

Így

$$\kappa(A-L) = |A-L|-|F\cap L| = |A|-|A\cap L|-|F\cap L| = |A|-|L| = |A|-|M| = \delta_A(M).$$

Ez az egyenlőség igazolja a Kőnig—Ore-tétel nem-triviális irányát.

Kőnig-tétel bizonyítása: Legyen $\tau(G) = k$. G-ből éleket hagyunk el egészen addíg, amíg megtehetjük úgy, hogy közben a τ paraméter értéke ne változzon (k maradjon). Így egy G_0 gráfhoz jutunk. Erről a következő tulajdonságokat állíthatjuk.

a) $\tau(G_0) = k$.

b) Minden $xy \in E(G_0)$ esetén $G_0 - xy$ gráf τ paramétere nem k. Pontosabban $\tau(G_0 - xy) < k$, hiszen él elhagysással τ nem növekedhet. Még pontosabban $\tau(G_0 - xy) = k - 1$, hiszen egy él elhagyásával legfeljebb egyet csökkenhet τ értéke.

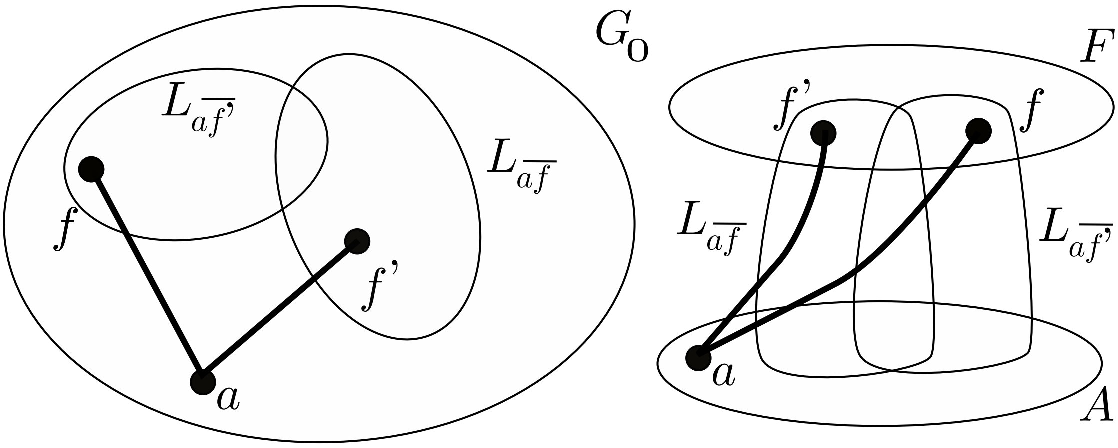
c) G_0 természtesen páros gráf (ugyanazokkal az A es F színosztályokkal, amivel G rendelkezett).

d) G_0 élei egy párosítást alkotnak. Pontosabb G_0-nak k darab független (nem hurok, nem összefutó) éle van.

A bizonyítás lényege a d) tulajdonság. Eljárásunk a $\tau = k$ tulajdonságra nézve egy minimális részgráfot jelölt ki. d) erről mond nagyon erős struktúrális állítást. Ebből a tétel már könnyen adódik:

$$\tau(G) = \tau(G_0) = \nu(G_0) \leq \nu(G) \leq \tau(G).$$

Csak d) igazolása van hátra. Indirekten indoklunk. G_0 páros, így nincs benne hurokél. A párosítás mivolt csak úgy sérülhet meg, ha $a \in A$ és $f, f' \in F$ három különböző csúcsra $af, af' \in E$ (A és F szerepe eddig szimmetrikus volt). Tudjuk, hogy $\tau(G_0 - af) = \tau(G_0 - af') = k - 1$. Legyen $L_{\overline{af}}$ és $L_{\overline{af'}}$ egy-egy optimális ($k-1$ elemű) lefogó halmaz a két gráfban. Ezek persze nem lehetnek lefogó halmazok G_0-ban (túl kicsik). Azaz $L_{\overline{af}}$ nem foghatja le az af élt ($a, f \notin L_{\overline{af}}$), $L_{\overline{af'}}$ nem foghatja le az af' élt ($a, f' \notin L_{\overline{af'}}$). Másrészt $L_{\overline{af}}$-nak le kell fognia az af' élt ($f' \in L_{\overline{af}}$), $L_{\overline{af'}}$-nak le kell fognia az af élt ($f \in L_{\overline{af'}}$). Ezzel előttünk van az indirekt feltevés pontos képe.



Két ábrát is rajzoltunk. A második ábrázolás G/G_0 páros mivoltát is hangsúlyozza. Legyen $\widehat{L} = L_{\overline{af}} \cup L_{\overline{af'}} \cup \{a\}$, $L_0 = L_{\overline{af}} \cap L_{\overline{af'}}$. L tartalmazza L_0-t és további pontokat. Az alábbi észrevételeket tehetjük:

(i) Ezen további pontok $L_{\overline{af}}$-ból, $L_{\overline{af'}}$-ból jönnek és a. $L_{\overline{af}}$ és $L_{\overline{af'}}$ elemszáma ugyanannyi $(k-1)$, így hozzájárulásuk $\widehat{L} - L_0$-hoz ugyanannyi. Az egyetlen a extra pont alapján $\widehat{L} - L_0$ elemszáma páratlan. Az elemszám pontosan $2((k-1) - |L_0|) + 1$.

(ii) G_0-ban minden e élre e-t lefogja L_0 vagy e mindkét végét lefogja $\widehat{L} - L_0$. Valóban af és af' esetén nyilvánvaló a második lehetőség. xy (af és af'-től is különböző) él esetén, ha $x, y \notin L_0$, akkor az élt lefogja $L_{\overline{af}} - L_0$ és $L_{\overline{af'}} - L_0$, két diszjunkt halmaz is (hiszen e a $G - af$ és $G - af'$ grafokban is ott van, ahol $L_{\overline{af}}$, $L_{\overline{af'}}$ lefogó ponthalmazok). Azaz a második lehetőség fennáll.

Úgy is fogalmazhattunk volna, hogy vegyük a $\widehat{L} = L_{\overline{af}} \dot\cup L_{\overline{af'}} \cup \{a\}$ halmazt, ahol a diszjunkt uniót úgy értjük, hogy L_0 elemei kétszersen vannak számolva. Ekkor a zígy leírt multihalmaz (elemszáma $2(k-1)+1 = 2k-1$) minden G_0-beli élt kétszeresen fog le. Ez kis spórolás ahhoz képest, ha G_0 egy optimális lefogó halmazának elemeit kétszeresene vennénk (ennek $2k$ lenne az alemszáma).

Legyen L a következő halmaz: $\widehat{L}$-ből vegyük az L_0-beli csúcsokat és a $\widehat{L} - L_0$ elemei közül (amelyek alsó és felső kategóriákba soroltak) csak azokat tartsuk meg, amelyek ugyanabba a színosztályba esnek és a maradék csúcsok KISEBBSÉGÉT adják. Az így kapott L halmazról a következőket állítjuk:

$\widetilde{\text{(i)}}$ $|L| < k$. Valóban. ez adódik az előző (i) észrevetelből.

$\widetilde{\text{(ii)}}$ L lefogó. Valóban az L_0 által le nem fogott élek mindkét (alsó és felső) végpontjuk $\widehat{L} - L_0$-beli. Így a ritkítás bármelyik színosztályt dobja el a maradék, L lefogó mivolta igaz lesz.

A fenti két észrevétel ellentmond annak, hogy $\tau(G_0) = k$. Az ellentmondás Kőnig tételét bizonyítja. ■

4. Párosítások (általános) gráfokban

Ismét néhány definícióval kezdünk.

Definíció. Legyen M egy párosítás. Ekkor

$$\delta(M) = |V(G)| - |V(M)| = |V(G)| - 2|M|,$$

azaz az M párosítás által nem párosított pontok száma.

Definíció. Legyen $T \subset V(G)$ egy csúcshalmaz.

$$\beta(T) = c_1(G - T) - |T|,$$

ahol c_1 a páratlan pontszámú komponensek számát adja meg.

A fenti definíció fontosságát és természetességét az alábbi észrevétel mutatja.

Észrevétel. Legyen T egy tetszőleges csúcshalmaz és M egy tetszőleges párosítás. Ekkor

$$\beta(T) \leq \delta(M).$$

Valóban nézzük, hogy a $G - T$-beli M-élek hogy párosítják $V(G) - T$ pontjait. Minden páratlan pontszámú komponensben legalább egy csúcs párosítatlan marad. Ez összesen $c_1(G - T)$ párosítatlan csúcs $G - T$-ben. Ezek G-ben párosítottak lehetnek, de csak T-beli csúccsal. Ezt figyelembe véve is legalább $c_1(G - T) - |T|$ csúcsot párosítalanul hagy M.

Az észrevétel nyilvánvaló következménye

$$\max\{\beta(T) : T \subset V(G)\} \leq \min\{\delta(M) : \ M \text{ párosítás}\} = |V(G)| - 2\nu(G).$$

Az észrevétel nyilván olyan T halmazokra lesz érdekes, amelyekre $\beta(T) > 0$, más esetben (a nyilván nem negatív) $\delta(M)$ számra egy triviális becslést ad.

Definíció. A T csúcshalmaz Tutte-akadály, ha

$$\beta(T) > 0,$$

azaz elhagyásával több páratlan pontszámú komponens keletkezik mint ahány csúcsa van.

Az észrevétel egyből adja, hogy Tutte-akadály léte esetén gráfunkban nem lehet teljes párosítás. Azaz a Tutte-akadály a teljes párosítás létét akadályozza meg. A Tutte-akadály fogalma egy sémát ad annak kezébe, aki gráfokról szeretné megmutatni, hogy nincs benne teljes párosítás.

Az alaptételek:

7. Tétel (Tutte-tétel). *G-ben akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha nem tartalmaz Tutte-akadályt.*

Azaz a Tutte-akadály által adott séma teljes. Nincs olyan gráf, amelyben a teljes párosítás hiányát valami más ok okozna.

8. Tétel (Berge-formula).

$$\max\{\beta(T) : T \subset V(G)\} = \min\{\delta(M) : \ M \ \textit{párosítás}\} = |V(G)| - 2\nu(G).$$

Mi csak a Tutte-tételt igazoljuk.

Tutte-tétel bizonyítása: A tétel egyik irányát tudjuk: Ha gráfunkban van teljes párosítás, akkor nem tartalmazhat Tutte-akadályt. A nehéz irány a fordított: Gráfunkban nincs Tutte-akadály, be kell látnunk tartalmaz teljes párosítást.

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy G-ben nincs Tutte-akadály és teljes párosítása sincs (G ellenpélda a tételre). Ekkor nyilván G pontszáma páros (páratlan prontszámú gráf esetén az üreshalmaz mindig Tutte-akadály (miért?)).

Kössük össze gráfunk eddig összekötetlen csúcspárjait addig amíg tudjuk úgy, hogy ne keletkezzen teljes párosítás. Legyen $\widehat{G}$ az így kapott gráf. Erről a következő tulajdonságok egyszerűen adódnak:

a) $\widehat{G}$ nem tartalmaz teljes párosítást.

b) $\widehat{G}$ minden össze nem kötött x, y csúcspárjára $\widehat{G} + xy$ már tartalmaz teljes párosítást (és minden ilyennek szükségszerűen tartalmaznia kell a hozzáadott xy élt).

c) $\widehat{G}$ nem tartalmaz Tutte-akadályt. Valóban, ha G hez egy élt adva kapjuk G^+-t és $T \subset V(G) = V(G^+)$, akkor $\beta_G(T) \geq \beta_{G^+}(T)$: Ha a hozzáadott él illeszkedik T-re akkor a két oldal értéke ugyanaz. Ha nem, akkor két $G-T$-beli csúcsot köt össze. Ha ezek egy $G-T$-beli komponensbe esnek, akkor a két oldal értéke ugyanaz. Különben két $G-T$-beli komponens összeolvad. A páratlan pontszámú komponsensek száma nem nőhet.

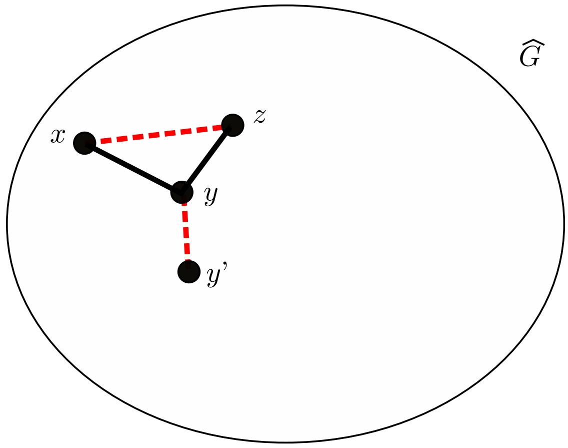
   Az egyenlőtlenség alapján ha G-ből élek hozzáadásával kapott gráfban T Tutte-akadály (β értéke pozitív), akkor G-ben is az volt.

   Így kaptuk, hogy $\widehat{G}$ is ellenpélda.

d) Legyen T azon pontok halmaza $\widehat{G}$-ben, amelyek minden más csúccsal összekötöttek. Ekkor $\widehat{G} - T$ komponensei teljes gráfok.

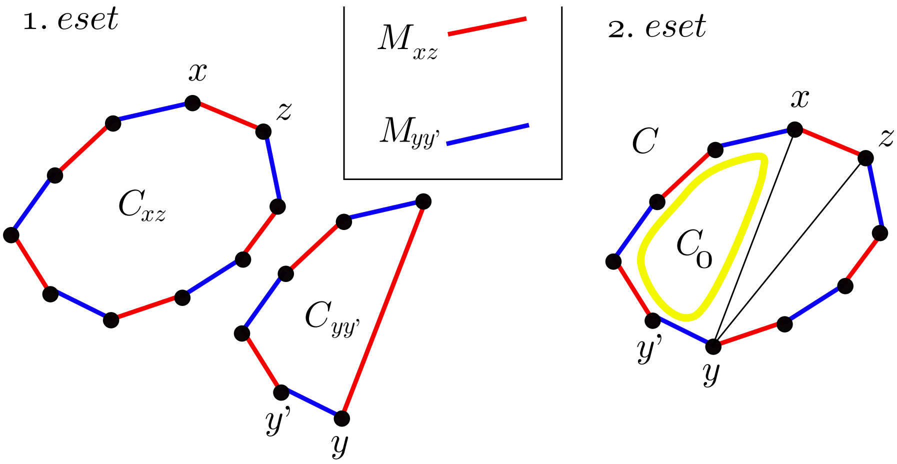
A d) állítás a bizonyítás lényege. Egy ellenpélda gráfot, bővítettünk élek hozzáadásával és egy telített (b) tulajdonság) ellenpéldát kaptunk. d) erről a telített ellenpéldáról ad egy nagyon erős struktúrális ismeretet. Ez alapján könnyen látható, hogy $\widehat{G}$ nem lehet ellenpélda. Az ellentmondás a bizonyítás vége. Valóban, feltevéseink szerint T nem Tutte-akadály. Ekkor $G-T$ komponenseit a páratlan pontszámú komponensekben egy-egy pont kivételével párosíthatjuk. A kihagyott pontokat T elemeivel párosíthatjuk, T kimaradt elemeit egymás között párosíthatjuk. Így egy teljes párosításhoz jutunk.

Hátra van a d) tulajdonság igazolása. Ez is indirekten történik. Tegyük fel, hogy nem igaz. Azaz $G-T$-ben az „azonosnak vagy összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalenciareláció. Ez csak úgy sérülhet meg, ha három különböző csúcsra nem teljesül a tranzitivítás. Azaz x, y, z csúcsokra $xy, yz \in E$, de x, y nem összekötött. Az y csúcsunk is (ahogy x és z is) T-n kívül van. Így egy alkalmas y' negyedik csúcsra y és y' nem összekötött. Ezzel előttünk van az indirekt feltevés képe.



A telítettség miatt $\widehat{G}+xz$-ben és $\widehat{G}+yy'$ található teljes párosítás. Legyen egy-egy ilyen M_{xz} és $M_{yy'}$ ($xz \in M_{xz}$, de $yy' \notin M_{xz}$, továbbá $xz \notin M_{yy'}$, de $yy' \in M_{yy'}$). A két párosítás uniója $M_{xz} \cup M_{yy'} = (M_{xz} \cap M_{yy'}) \dot{\cup} (M_{xz} \Delta M_{yy'})$. xz és yy' a szimmetrikus differencia egy-egy éle. Pontosan ez az a két él, ami nem éle $\widehat{G}$-nek. A szimmetrikus differencia élei diszjunkt, páros hosszú, M_{xz} és $M_{yy'}$ közt alternáló köröket tartalmaz. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: xz és yy' két különböző körre (C_{xz} és $C_{yy'}$) esik. Ekkor $M_{yy'}$-t módosítsuk úgy, hogy $C_{yy'}$-en belül éleit kicseréljük a kör többi (M_{xz}-beli) éleire. Ezzel egy teljes párosításhoz jutunk, ami azonban már $\widehat{G}$-be esik (yy' élt lecseréltük, az xz él azon körön kívül volt, ahol a változtatás történt, azaz nem került be a teljes párosításunkba). Ellentmondás.



2. eset: xz és yy' egy körre (C) esik. Ezen eset kezeléséhez szükségünk lesz az xy és élek yz figyelembevételére is. A C kör y csúcsából induljunk el. Első lépésünk y' felé tegyük és menjünk el C-n az xz él első csúcsához. Feltehetjük, hogy x az első csúcs. Ez összekötött y-nal. Így utunk egy C_0 körré zárható. C_0 minden második éle $M_{yy'}$-beli (speciálisan páros hosszú). Tartalmazza az yy' élt, nem tartalmazza az xz élt. Így az 1. eset gondolata a C_0 körrel megismételhető. Ismét ellentmondáshoz jutunk. ∎