Halmazelmélet és matematikai logika

Azonos méretű halmazok

2017 Előadó: Hajnal Péter

1. Halmazok párbaállíthatósága

Definíció. H és H' halmazok párbaállíthatók, ha létezik $f : H \to H'$ bijekció. Jelölésben
$$H \sim H'.$$

Nyilván

(i) $H \sim H$,

(ii) $H \sim H'$ akkor és csak akkor, ha $H' \sim H$,

(iii) ha $H \sim H'$, $H' \sim H''$, akkor $H \sim H''$ is.

Csábító azt mondani, hogy $\sim$ egy ekvivalenciareláció. Ez azonban nem lenne korrekt. Egy ekvivalenciarelációhoz szükséges egy alaphalmaz. Itt az összes halmazról beszélünk, amelyek nem olvaszthatók egy halmazba.

A $H \sim H'$ viszony jelentése, hogy H és H' azonos nagyságúak.

2. A számosság fogalma

Definíció. Egy H halmaz véges, ha valamely $\underline{n} \in N$ esetén $H \sim \underline{n}$.

Egy H halmaz végtelen, ha nem véges.

Definíció. Azt mondjuk, hogy $|H| = n \in N$, ha $H \sim \underline{n}$.

Ez a definíció egy kissé veszélyes. Ha $n \neq m \in \mathbb{N}$ esetén előfordulhatna, hogy $H \sim \underline{n}$ és $H \sim \underline{m}$ egyszerre teljesüljön, akkor a fenti definíció nem lenne értelmes. Szerencsére a skatulya-elv alapján ez nem fordul elő: ha H véges, akkor egyetlen egy $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy $H \sim \underline{n}$.

Szerencsénk van. A véges halmazok közt egy-egy jól definiált standard véges halmazt ki tudtunk jelölni, hogy azok egymással nem állíthatók párba, de mindegyik véges halmaz valamelyikkel párba állítható. Jó lenne ezt az összes halmaz esetén elvégezni.

Az ekvivalenciarelációk esetén van egy alaptételünk. Egy halmazon értelmezett ekvivalenciareláció estén a halmazt osztályokra oszthatjuk úgy, hogy két elem akkor és csak akkor tartozik egy osztályba, ha relációban állnak. A $\sim$ mögött nincs alaphalmaz, a fenti alaptétel nem alkalmazható. Mégis igaz, amit sejtünk, amit szeretnénk.

1. Tétel. *Van egy olyan $\mathcal{O}$ operáció, ami minden H halmazhoz hozzárendel egy $\mathcal{O}(H)$ halmazt, amelyre* *(i)* $H \sim H'$ *esetén* $\mathcal{O}(H) = \mathcal{O}(H')$,

(ii) *míg* $H \not\sim H'$ *esetén* $\mathcal{O}(H) \neq \mathcal{O}(H')$,

A fenti tétel nem egyszerű, technikailag igényes, hosszú. Nem bizonyítjuk. Elfogadjuk és használjuk. A H halmazhoz rendelt $\mathcal{O}(H)$ halmazt H számosságának nevezzük. Jelölése $|H|$ vagy $\sharp H$.

3. A megszámlálhatóan végtelen számosság

Definíció. Egy H halmaz megszámlálhatóan végtelen ha $H \sim \mathbb{N}$. Jelölése $|H| = \aleph_0$.

Megszámlálhatóan végtelen halmazok például: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, az algebrai számok halmaza.

4. Kontinuum számosság

Definíció. Egy H halmaz kontinuum számosságú ha $H \sim \mathbb{R}$. Jelölése $|H| = c$.

Kontinuum számosságú halmazok például $[0, 1]$, $]0, 1[$, $\mathbb{R}^2$, a sík egyeneseinek halmaza, $\mathbb{C}$, a folytonos valós fügvények halmaz.

5. Számosságok rendezése

Definíció. Legyen κ és λ számosságok ($\kappa = |K|$ és $\lambda = |L|$). $\kappa \leq \lambda$ ha létezik $f : K \to L$ egy-egy leképzés.

A számosságok rendezése jól definiált, azaz a fenti viszony nem függ a számosságokhoz választott K és L halmazoktól (amik egyáltalán nem egyértelműek).

Definíció. Legyen κ és λ számosságok. ($\kappa = |K|$ és $\lambda = |L|$). $\kappa < \lambda$ ha $\kappa \leq \lambda$ és $\kappa \neq \lambda$.

Nyilván

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \aleph_0 \leq c.$$

2. Tétel (Cantor).

$$\aleph_0 < c.$$

Bizonyítás. Csak $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$ problémás. Indirekten tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$ elemei sorbarendezhetők: $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Mindegyik számra mint végtelen tizedestört gondolunk. Legyen d_i az r_i szám i-edik számjegye a tizedesvessző után. Legyen $\widetilde{d_i} \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\} \setminus \{d_i\}$, egy d_i-től különböző számjegy.

Legyen $r = 0{,}\widetilde{d_1}\widetilde{d_2}\widetilde{d_3}\widetilde{d_4}\ldots$ r mint számjegysorozat különbözik az összes r_i-től (az r_i-től való különbözőség a tizedesvessző utáni i-edik jegy miatt nyilvánvaló).

Ha mint valós szám is különbözik r az összes r_i-től akkor meg van az ellentmondásunk. Ez nem triviális, hiszen két különböző számjegysorozat adhat azonos értéket. Például: $0{,}500000\ldots = 0{,}49999999\ldots$. r felírásában sok a szabadságunk. Ha nem használunk 0 és 9 számjegyeket (ezt könnyen megtehetjük), akkor r felírása egyértelmű és az ellentmondás adódik. ■

3. Tétel. *Tetszőleges H halmazra*

$$|H| < |\mathcal{P}(H)|.$$

Bizonyítás. Csak $H \not\sim \mathcal{P}(H)$ a problémás. Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, $f : H \to \mathcal{P}(H)$ párbaállító leképezés.

Vegyük a fenti képzeletbeli táblázatot: Sorai H elemei, oszlopai ugyanebben a „sorrendben” H elemeinek párja f-nél. Azaz az oszlopok a részhalmazokkal azonosítottak. Beszélhetünk a táblázat diagonális elemeiről, amik egy $h \in H$-nak megfelelő sor $f(h) \subset H$-nak megfelelő oszlop találkozásaiban állnak.

A táblázat minden pozíciójába ($h \in H$ és $R \subset H$ találkozásnál) írjuk be, hogy $\in$ vagy $\notin$ (ahogy h és R viszonyul). A diagonális elemeket vegyük és fordítsuk meg őket: $\in$ helyett vegyünk $\notin$-t és $\notin$ helyett vegyünk $\in$-t. Az így kapott sor jelei rendre H elemeinek felelnek meg, így leírnak egy E részhalmazát H-nek.

Állítólag ez táblázatunk egyik oszlopa, ami nem lehetséges a megfelelő diagonális elem megfordítása miatt. ■

A fenti két bizonyítás nagyion hasonló gondolatmenetű. A Cantor nevézhez fűzött ötletet átlós módszernek nevezik.

Az utolsó tétel egy fontos következménye: végtelen sok végtelen számosság van. Ezek közül $\aleph_0$ a legkisebb:

4. Tétel. *Ha κ végtelen számosság, akkor*

$$\aleph_0 \leq \kappa.$$

A számosságok esetén $\leq$ rendelkezik a rendezési reláció tulajdonságaival (habár nem reláció, hiszen nincs alaphalmaza):

5. Tétel. *(i) $\kappa \leq \kappa$,*

(ii) (Berstein ekvivalencia-tétele) $\kappa \leq \lambda$ és $\lambda \leq \kappa$ esetén $\kappa = \lambda$.

(iii) $\kappa \leq \lambda$ és $\lambda \leq \mu$ esetén $\kappa \leq \mu$.

(iv) Tetszőleges κ, λ számosságok esetén vagy $\kappa < \lambda$, vagy $\kappa = \lambda$, vagy $\kappa > \lambda$.

Bizonyítás. (i) és (iii) lényegében triviális. (iv) nehéz, ebben a kurzusban nem fogjuk bizonyítani.

(ii) viszont egy nem-triviális, a kurzusban is bebizonyítható állítás. Kifejtve: Tegyük fel, hogy léteznek $f : K \to L$ és $g : L \to K$ 1-1 leképzések. Ekkor létezik $h : K \to L$ párbaállító leképzés is.

Mi egy Kőnig Dénestől eredő bizonyítást vázolunk. Ehhez definiálunk egy diagramot/irányított gráfot: Csúcshalmaza $K \cup L$ (feltehetjük, hogy K és L diszjunktak). Minden $k \in K$ esetén behúzunk egy $\overrightarrow{kf(k)}$ nyilat/élt és Minden $\ell \in L$ esetén behúzunk egy $\overrightarrow{\ell g(\ell)}$ nyilat/élt. A kapott gráfban minden csúcsból pontosan egy él vezet ki és legfeljebb egy él vezet be. Ebből adódik, hogy a gráf komponensei a következő három kategóriába esnek:

(i) véges irányított kör,

(ii) mindkét irányban végtelen irányított út,

(iii) egy a kezdőponttal rendelkező végtelen irányított út.

A (iii) esetben $a \in K$, illetve $a \in L$ eseteknek megfelelően $(iii)_K$ és $(iii)_L$ altípusokat vezetünk be. Minden $k \in K$ pontosan egy komponenshez tartozik. Ha ez a komponens (i), (ii) vagy $(iii)_K$ típusú, akkor legyen $h(k) = f(k)$. Ha ez a komponens $(iii)_L$ típusú, akkor legyen $h(k) = g^{\langle -1 \rangle}(k)$. Ezzel egy párbaállító leképezést definiáltunk, ami az állítást igazolja. ■