Halmazelmélet és matematikai logika

Alapok

2017 Előadó: Hajnal Péter

1. Naív halmazelmélet és problémái

Az a felfogás, hogy a halmaz elemek egy összessége és minden probléma nélkül „összepakolhatunk” elemeket egy halmazba, az veszélyekkel jár.

Lássuk a naív felfogás hogy vezet ellentmondásra:

Definíció. H halmaz tartalmazkodó, ha $H \in H$. Ha $H \notin H$, akkor azt mondjuk hogy a H halmaz nem tartalmazkódó.

Például $\emptyset$ nem tartalmazkodó ($\emptyset$-nek nem eleme önmaga, hiszen egyáltalán nincs eleme). Az összes halmazt tartalmazó halmaz tartalmazkodó hiszen mint halmaz eleme önmagának.

Legyen

$$\mathcal{N} := \{H : \ H \text{ nem tartalmazkódó}\}.$$

$\mathcal{N}$ tartalmazkodó-e?

1. eset: Ha igen, akkor $\mathcal{N}$ kielégíti azt a tulajdonságot, amire építettük $\mathcal{N}$ leírását, azaz $\mathcal{N}$ nem tartalmazkodó.

2. eset: Ha nem, akkor $\mathcal{N}$ nem elégíti azt a tulajdonságot, amire építettük $\mathcal{N}$ leírását, azaz $\mathcal{N}$ tartalmazkodó.

Az ellentmondás feloldása: Nem létezik az összes halmaz halmaza. Nem létezik a tartalmazkodó halmazok halmaza.

2. Alapműveletek

A tisztán axiómatikus és tisztán naív halmazelméleti felépítés között próbálunk egy járható középutat találni.

Kiindulunk néhány halmazból és továbbiakat építünk fel.

I) A halmaz és eleme reláció alapfogalom. A halamzelmélet tárgyalása során csak halmazokkal foglalkozunk, minden objektumunk halmaz lesz.

II) H és H' halmazok pontosan akkor egyenlőek, ha minden e halmazra $e \in H$ akkor és csak akkor, ha $e \in H'$. Másképpen egy halmazt akkor ismerünk, ha minden e-ről tudjuk, hogy eleme-e.

Egy következménye ennek a megállapodásnak, hogy egy halmaz elemeinek nincs sorrendje.

III) Létezik egy halmaz, amelyre minden e esetén e nem eleme neki. II alapján egyetlen ilyen halmaz van. Jelölése: $\emptyset$.

IV) Ha H és H' két halmaz, akkor létezik olyan halmaz, amelynek e pontosan akkor eleme, ha $e = H$ vagy $e = H'$. II alapján egyetlen ilyen halmaz létezik. Ennek jelölése $\{H, H'\}$.

$H = H'$ is lehetséges. Ekkor a $\{H, H\}$ egy alternatív jelölése $\{H\}$. Ennek egyetlen eleme van: H.

Három vagy több halmaz esetére is kiterjeszthetjük a fenti elvet. Ha adottak a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ halmazok akkor létezik egy olyan $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ halmaz amelynek pontosan a kezdő listabeli halmazok az elemei.

Egy rokon fogalom a részhalmaz fogalma: H részhalmaza H'-nek (jelölésben $H \subset H'$), ha H minden eleme h'-nek is eleme.

Egy ellenörző feladat: Igazoljuk, hogy $H = H'$ akkor és csak akkor, ha $H \subset H'$ és $H' \subset H$.

V) Az üres halmaz mellett megjelentek új halmazaink:

$$\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\};$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}; \ldots$$

A sor teljes indukcióval folytatható. A természetes számokat azonosíthatjuk ezekkel a halmazokkal

$$0 \equiv \underline{0} = \emptyset; \quad 1 \equiv \underline{1} = \{\emptyset\}; \quad 2 \equiv \underline{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \quad 3 \equiv \underline{3} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}; \quad \ldots$$

Általában $\underline{n} \equiv \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots, \underline{n-1}\}$. $\mathbb{N} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots\}$. A halmazelméletben minden halmaz, így a 2 természetes számra úgy gondolunk mint a $\underline{2}$ halmaz. Az aláhúzast el is hagyhatjuk.

VI) Ha $\mathcal{T}$ egy jól leírt, formalizált tulajdonsága halmazoknak és H egy halmaz, akkor H azon elemei, amelyek $\mathcal{T}$ tulajdonságúak is egy halmazt alkotnak. Ezen halmaz jelöléssel: $\{x \in H : \ x \ \mathcal{T} \text{ tulajdonságú}\}$.

VII) H és H' halamzok esetén van egy egyesítésük, amely pontosan azokat az elemeket tartalmazza amelyek H és H' közül legalább az egyiknek eleme. Jelölése $H \cup H'$.

Végtelen halmazok esetén is elmondhatjuk ezt: Legyenek H_i-k halmazok minden $i \in H$ esetén (I-re mint indexhalmaz hivatkozunk). $\cup_{i \in I} H_i$ pontosan azokat az e elemeket tartalmazza, amelyekhez van olyan $i \in I$, hogy $e \in H_i$.

Általában H halmaz esetén $\cup H$ a H elemeinek unióját jelöli.

VIII) H és H' halamzok esetén van egy metszetük, amely pontosan azokat az elemeket tartalmazza amelyek H-nak és H'-nek is eleme. Jelölése $H \cap H'$.

Végtelen halmazok esetén is elmondhatjuk ezt: Legyenek H_i-k halmazok minden $i \in H$ esetén (I-re mint indexhalmaz hivatkozunk). $\cap_{i \in I} H_i$ pontosan azokat az e elemeket tartalmazza, amelyekre minden $i \in I$ esetén $e \in H_i$.

Általában H halmaz esetén $\cap H$ a H elemeinek metszetét jelöli.

IX) A H halmaz komplementer egy U alaphalmazra, ahol $H \subset U$ az a halmaz, amely pontosan U azon elemeit tartalmazza,a melyek nincsenek benne H-ban.

X) Egy H halmaz esetén létezik egy $\mathcal{P}(H)$-vel jelölt hatványhalmaz, amely pontosan H részhalmazait tartalmazza.

XI) H és H' halmazok esetén lehet képezni egy olyan (H, H')-vel jelölt halmazt, amelyre $(H, H') = (J, J')$ akkor és csak akkor, ha $H = J$ és $H' = J'$. Egy lehetőség

(H, H') definiálására $\{H, \{H, H'\}\}$. Ennek neve a H és H'-ből alkotott rendezett pár. Itt a sorrend nagyon fontos. Ha $H \neq H'$ akkor $(H, H') \neq (H', H)$.

XII) H és H' halmazok esetén $H \times H'$ pontosan azon (x, x') rendezett párokat tartalmazza, amelyekre $x \in H$ és $x' \in H'$. $H \times H'$ „neve" a H és H' halmazok Descartes-szorzata.

A két tényezős szorzat kiterjeszthető három, illetve több tényezőre. Ehhez először a rendezett hármasokat kell definiálni: $(H, H', H'') := (H, (H', H''))$. Ezek után a három tényezős Descartes-szorzat fogalma magától értetődő. A többtényezős Descartes-szorzat is könnyen definiálható.

XIII) Ahogy algebrából megszoktuk leírhatók a relációk és függvények is mint speciális halmazok Descartes-szorzatainak bizonyos tulajdonságú részhalmazai.

XIV) H, K halmazok hatványa ${}^K H$ vagy egyszerűbben H^K az $f : K \to H$ függvények által alkotott halmaz.

XI*) Definiálható a H_i $(i \in I)$ halmazsereg Descartes-szorzata: H_i $(i \in I)$ egy kiválasztási függvénye $f : I \to \cup_{i \in I} H_i$ függvény, amely minden $i \in I$ esetén teljesíti, hogy $f(i) \in H_i$. H_i $(i \in I)$ halmazok Descartes-szorzata az a halmaz, amely pontosan a kiválasztási függvényeket tartalmazza. A Descartes-szorzata jelölése $\prod_{i \in I} H_i$.

XI**) H_i $(i \in I)$ nem üres halmazok estén $\prod_{i \in I} H_i$ sem üres. Azaz nem üres halmazok egy halmazára létezik kiválasztási függvény.

$\star$

A halmazelméletben a fenti elvek alapján egyszerűbb halmazokból felépített összetett halmazokkal fogalkozunk. Egy *semmiből előhúzott* elem összegségnél mindig alapkérdés, hogy halmazt alkotnak-e.

A kezdeti ellentmondásnak tünő gondolatmenet igazából az alábbi tétel indirekt bizonyítása.

1. Tétel. *(i) Nincs olyan halmaz, amely elemei pontosan a nem tartalmazkodó halmazok.*

(ii) Nincs olyan halmaz, amely az összes halmazt tartalmazza.