

## 2000. TAVASZ, II. GEOMETRIA FELADATSOR: FUNDAMENTÁLIS CSOPORT, FEDŐFELÜLETEK, GEOMETRIAI CSOPORTELMÉLET

**Ismétlés.** Egy  $M$  Hausdorff-tér egy *topologikus  $n$ -sokaság*, ha minden pontjának van a nyílt  $B^n$ -nel homeomorf környezete. A komplexusok lehetnek szimpliciálisok vagy sem, végtelenek és végtelen dimenziósak is, de a továbbiakban minden  $X$  tér ívszerűen és lokálisan ívszerűen összefüggő, mint az összefüggő komplexusok.

Az  $\{f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0) \text{ folytonos}\}$  halmaz homotópia-ekvivalenciaosztályain bevezethetőek a  $\pi_n(X)$  *homotópiacsoportok*; ha valaki csak a  $\pi_1(X)$  fundamentális csoportot ismeri, házi feladat az általánosítás. A fundamentális csoport kiszámítására a legfontosabb eszköz a *Seifert-Van Kampen-tétel*: ha  $U \cup V = X$  összefüggő részkomplexusokra felbontás úgy, hogy  $Y = U \cap V$  is összefüggő és tartalmazza az  $x_0 \in X$  alappontot, továbbá  $\phi : Y \rightarrow U$ ,  $\psi : Y \rightarrow V$  beágyazások, akkor

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(Y, x_0)} \pi_1(V, x_0)$$

amalgámos szabadszorzat, ami a rendes szabadszorzathoz a  $\{\phi_*(c)\psi_*(c)^{-1} = 1 \mid c \in \pi_1(Y, x_0) \text{ generátor}\}$  relációk hozzávételét jelenti. Speciálisan, ha  $V$  1-összefüggő, akkor  $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0)/N$ , ahol  $N$  a  $\phi_*(\pi_1(Y, x_0))$  által generált normálosztó.

Topologikus sokaságok közötti  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  *fedőleképezés*: minden  $x \in M$ -nek van  $U$  környezete, hogy  $p^{-1}(U)$  minden összefüggő komponensfől a  $p$  egy homeomorfizmus. Ilyenkor minden  $\gamma : x \rightarrow y$   $M$ -beli görbe lokálisan felemelhető tetszőleges  $x$  feletti  $x^*$  pontból indulón, és az egész  $\gamma$ -nak legfeljebb egy innen induló felemeltje van. Ezentúl minden fedés reguláris legyen, azaz létezzen is mindenütt a teljes felemelés, az épeszű példák ilyenek. *Monodrómia-tétel*:  $x$  és  $y$  közötti homotóp görbék ugyanabba az  $x^*$ -ba való felemeltjeinek végpontjai megegyeznek, és a felemelt is homotópok.

$D(x^*) = \{\gamma : x \rightarrow x^* \text{ görbék, amelyek felemeltje záródik } x^* \text{-ban}\}$  részcsoportja  $\pi_1(M, x)$ -nek, és különböző  $x^*$  felemeltkhez ezek konjugált részcsoportok. Ráadásul minden  $D \leq \pi_1(M)$ -hez konstruálható  $(\tilde{M}, p)$  fedés, amely ezt a  $D$ -t adja vissza; sőt,  $\pi_1(\tilde{M}) = D$ . Kisebb részcsoporthoz erősebb fedő tartozik,  $D = \pi_1(M)$  esetén  $\tilde{M} \simeq M$ ,  $D = \{1\}$  esetén  $\tilde{M}$  az *univerzális fedő*, ami 1-összefüggő.

Minden  $\gamma$   $M$ -beli görbéhez természetes módon tartozik egy  $f_\gamma \in \text{Aut}(\tilde{M}, p) = \{\phi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} \text{ homeomorfizmus, amire } p(x^*) = p(\phi(x^*)) \forall x^* \in \tilde{M}\}$  *fedőautomorfizmus*, sőt,  $\text{Aut}(\tilde{M}, p) \simeq N_{\pi_1(M)}(D)/D$ , ahol  $N_G(H)$  a normalizátort jelenti egy  $H \leq G$  részcsoporthoz. Ez a csoport diszkrétén hat  $\tilde{M}$ -on, fixpontmentesen és tranzitíven hat a fedés fibrumain, így  $\tilde{M}/\text{Aut}(\tilde{M}, p) \simeq M$ ; speciálisan az univ. fedőre  $\tilde{M}/\pi_1(M) \simeq M$ , mint pld.  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{T}^2$ .

1. A fenti fogalmak megszokásához bevezető példák:

- a. Egy gráf fedője is gráf.
- b. Adjuk meg  $\mathbb{T}^2$  és  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  összes fedőterét!
- c.  $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ .
- d. Egy topologikus csoport fundamentális csoportja kommutatív.
- e. Ha  $n > 1$ , akkor  $\pi_n(X)$  kommutatív.
- f.  $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] = H_1(X, \mathbb{Z})$ .
- g. Ha  $X$ -nek deformációretraktuma az  $Y$ , akkor  $\pi_n(X) = \pi_n(Y)$  minden  $n$ -re.
- h. Ha  $\tilde{M}$  univ. fedője  $M$ -nek, akkor  $n > 1$ -re  $\pi_n(\tilde{M}) = \pi_n(M)$ .

- i. Tegyük fel, hogy a  $G_1$  és  $G_2$  részcsoporthoz együtt generálják  $G$ -t,  $A = G_1 \cap G_2$ ; ehhez definiáljunk egy  $X(V_1, V_2, E)$  páros gráfot, miszerint  $V_i = G/G_i$ , és  $E = \{(gG_1, gG_2) \mid g \in G\}$ . Igazoljuk, hogy az  $X$  pontosan akkor fa, ha  $G = G_1 *_A G_2$ .
2. A Seifert-Van Kampen-tétel segítségével igazoljuk, hogy:
- a. Egy gráf fundamentális csoportja mindig szabad, mégpedig ha veszünk egy  $T$  feszítőfát, ami tartalmazza az  $x_0$  alappontot, akkor a  $T$ -ből kimaradt élek fölötti szabad csoport.
- b. A  $g \geq 0$  génuszú kompakt irányítható 2-sokaságokra

$$\pi_1(M_g) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

A  $g$ -fül-egy-Möbiusz-szalag  $N_g$  felületekre és a  $K$  2-Möbiuszos Klein-kancsóra hasonlóan kitalálható. Több kompakt 2-sokaság nincs.

- c. Adjunk meg két nem homotóp 2-sokaságot, amik fundamentális csoportja megegyezik.
- d. Minden  $G = \langle S \mid R \rangle$  végesen generált csoporthoz természetesen tartozik egy 2-komplexus  $\mathcal{C}_G(S, R)$ , amelyre  $\pi_1(\mathcal{C}_G) = G$ . Ha tényleg természetesen konstruáltuk, akkor ennek univerzális fedője,  $\text{Cayley}_G^2(S, R)$  olyan, hogy az ő 1-csontváza izomorf a csoport  $\Gamma(G, S)$  Cayley-gráfjával. Ha  $G$  végesen prezentált, akkor  $\mathcal{C}_G(S, R)$  véges sok cellából áll, de általában még ekkor sem egy 2-sokaság.
- e. Igazoljuk, hogy minden végesen prezentált csoporthoz van olyan kompakt 4-sokaság, aminek ő a fundamentális csoportja. (Használjuk azt, hogy a  $(t, t^2, t^3, t^4, t^5)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , momentumgörbe segítségével minden szimpliciális 2-komplexus, és ezért a fenti  $\mathcal{C}_G$  komplexus is beágyazható  $\mathbb{R}^5$ -be.)
3. Legyen  $M$  egy kompakt Riemann-sokaság.
- a. Az  $(\tilde{M}, p)$  univerzális fedőn pontosan egy Riemann-metrika vezethető be úgy, hogy a  $p$  egy izometria legyen. Ilyenkor a  $\pi_1(M) \simeq \text{Aut}(\tilde{M}, p)$  fedőtranszformációk egy diszkrét részcsoporthát alkotják  $\text{Isom}(\tilde{M})$ -nak.
- b. Milyen állandó görbületű metrikák vezethetők be a **2.b.** feladat  $M_g$  felületein?
4. Számoljuk ki a következő fundamentális csoportokat!
- a.  $\pi_1(S^n)$ ,  $\pi_n(S^1)$ .
- b.  $\pi_1(SO(3))$ ;  $\pi_1(GL(n, \mathbb{C}))$  legalább  $n = 1$ -re.
- c. Igazoljuk, hogy minden  $f: \mathbb{P}^2 \mathbb{R} \rightarrow S^1$  leképezés nullhomotóp.

Aki tudja, hogy minden folytonos leképezéshez van vele homotóp sima is, ismeri a Sard-tételt, továbbá tisztában van a sima leképezések fokának fogalmával, bizonyíthatja, hogy  $\pi_k(S^n) = 0$  ha  $k < n$ , és  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ . Aki még a fibrált nyálábok egzakt homotópia-sorozatát is tudja, az az  $S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{\gamma} S^2$  Hopf-fibráció segítségével, ahol  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\} \simeq SU(2)$ ,  $S^2 \simeq \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$ ,  $\gamma: (z, w) \mapsto -z/\bar{w}$ , bizonyíthatja a fentiek után eléggé meglepő  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  tételt.

Megjegyzendő még, hogy Shelah egy tétele szerint egy kompakt  $X$  fundamentális csoportja végesen generált vagy kontinuum számosságú, így pld.  $\mathbb{Q}$ -val sem lehet izomorf. Érdekes továbbá, hogy az előző bekezdés eredményei alapján az  $S^1$  és az  $S^2$  egy pontbeli összeragasztásával kapott véges szimpliciális komplexus második és harmadik homotópiacsoporthoz is  $\mathbb{Z}^\infty$ -nel izomorf, azaz a fundamentális csoporttal ellentétben nem végesen generált.

5. Bizonyítsuk be a 4.a. feladat felhasználásával  $n \leq 2$ -re a legfontosabb fixpont-tételeket:

- a. *Brouwer*: ha  $f : B^n \rightarrow B^n$  folytonos, akkor van fixpontja.
- b. *Borsuk-Ulam*: nincsen  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  folytonos antipodális leképezés, azaz, ahol  $f(-x) = -f(x)$  lenne.

A Borsuk-Ulam egy következménye, hogy  $\mathbb{R}^n$ -nek nincsen  $S^n$ -nel homeomorf részhalmaza. (Bizonyítsuk!) Egy másik, amit talán egy majdani *Fixponttételek* feladatsoron láthatunk bizonyítva, hogy bármilyen csúnyán megcsinált zsemle-sonkásajt szendvicset is pontosan kettéoszthatunk egyetlen egyenes vágással.

*Csomónak* hívjuk az  $S^1$  egy  $\mathbb{R}^3$ -ba való beágyazását. Két csomó ekvivalens, ha van olyan  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  homeomorfizmus, ami a  $K_1$  és  $K_2$  beágyazott  $S^1$ -képeket is egymásba viszi. Egy  $K$  csomó csoportjának a  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ -t nevezzük. Néha vesszük az  $\mathbb{R}^3$  egy-pont-kompaktifikáltját,  $S^3$ -at, és a kompakt  $S^3 \setminus K$ -t nézzük; igazoljuk, hogy a hozzárendelt fundamentális csoport ugyanaz! Tipikus példák a *tórusz csomók*: a  $K(m, n)$  csomót az  $l(x) = (m/n)x \subseteq \mathbb{R}^2$  egyenesből ( $1 \leq m \leq n$ ,  $(m, n) = 1$ ) kapjuk a szokásos  $\mathbb{Z}^2$ -tel való faktorizálással.

6. Igazoljuk, hogy a  $K(m, n)$  csomó csoportja  $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^m \beta^n = 1 \rangle$ . Lássuk be (esetleg a mindjárt következő csoportelméleti eredmények felhasználásával), hogy ezek a csoportok minden  $1 < m < n$  értékre különböznek egymástól, és az  $m = 1$ -hez tartozó  $\mathbb{Z}$  csoporttól is! Tehát ez egy csomó különböző csomó!

7. Legyen  $F_r$  az  $r$  elem által generált szabad csoport.

- a.  $F_r$  minden részcsoportha szabad.
- b. Ha  $N \triangleleft F_r$  nem-triviális normálosztó, akkor  $N$  pontosan akkor végesen generált, ha  $[F_r : N] \leq \infty$ . (Ld. még 11.a-t!)

8. Legyen  $F_r$  ugyanaz, mint fent.

- a.  $F_r \simeq F_s$  pontosan akkor, ha  $r = s$ . (Nézzük meg, hány 2 indexű részcsoporth van  $F_r$ -ben!)
- b. Ha  $r \geq 2$ , akkor  $F_r$ -nek minden  $n \geq 2$ -re van  $n$  indexű részcsoporthja, és az  $F_t$ -vel izomorf, ahol  $t = 1 + n(r - 1)$ .
- c. Adjuk meg két  $S^1$  egy pontbeli összeragasztásával kapott  $B_2$  csokor **a**-nak megfelelő 2-rétegű nem-izomorf fedőit.

Csoportok geometriai tulajdonságainak vizsgálatához természetes fogalom a következő: a metrikus terek közötti  $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$  leképezés egy *kváziizometria*, ha  $\exists \lambda \geq 1, C \geq 0$  konstansok, hogy  $1/\lambda d_1(x, y) - C \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + C$  minden  $x, y \in M_1$  pontpárra, és  $\exists D \geq 0$ , hogy  $M_2$  minden pontjától van  $f(M_1)$ -nek legfeljebb  $D$  távolságra pontja.

Tetszőleges,  $S$ -sel végesen generált  $G$  csoporthoz vehetjük a  $\Gamma(G, S)$  Cayley-gráfon a szokásos gráf-metrikát. Esetleg az éleket külön-külön még elláthatjuk a  $[0, 1]$  szakasz metrikájával. Egy csoport *végeinek számán* azt a maximális számot értjük, ahány végtelen összefüggő komponenst kapunk, ha  $\Gamma(G, S)$ -ből elhagyunk egy véges csúcshalmazt. Mindjárt látni fogjuk, hogy ez nem függ  $S$ -től.

9.a. Ha  $S_1$  és  $S_2$  két véges gen-rendszer, akkor a két Cayley-gráf kváziizometrikus.

- b. Rajzoljuk fel pld. a  $PSL(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$  csoport Cayley-gráfját a természetes generátorokkal, és keressünk egy  $F_2$ -vel izomorf részcsoporthot 6-os indexszel! (Ld. még 13.c-t!)

- c. Minden csoportautomorfizmus kváziizometriaként hat a Cayley-gráfon.
  - d. Egy csoport végeinek száma kváziizometria-invariáns. Így pld. biztos nem kváziizometrikusak: egy valamilyen  $F$  véges csoport,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2$ , ill.  $F_r$ . (Amúgy a végek száma eleve csak 0, 1, 2 vagy  $\infty$  lehet.)
10. *A geometriai csoportelmélet alaptétele.* Ha az  $(X, d)$  tér lokálkompakt, teljes, és bármely két pontja között van geodetikus, továbbá a  $G$  csoport diszkrétén hat izometriákkal, és az  $X/G$  faktor kompakt, akkor  $G$  végesen generált, és tetszőleges  $x \in X$ -re a  $G \rightarrow X, g \mapsto g(x)$  beágyazás egy kváziizometria.
11. Az előző tétel segítségével igazoljuk, hogy:
- a. Ha  $G$  végesen generált és  $H$  egy véges indexű részcsoportha, akkor  $H$  is végesen generált. (Ennek kombinatorikus csoportelméleti bizonyítása nagyon strapás.)
  - b. Ha  $M$  egy kompakt Riemann-sokaság, akkor  $\pi_1(M)$  kváziizometrikus az  $\tilde{M}$  univerzális Riemann-metrikus fedőhöz, ld. **3.a-t**.
  - c.  $F_r$  kváziizometrikus  $F_s$ -sel tetsz.  $r, s \geq 2$  értékekre. Sőt, tetszőleges véges sok (legalább 2) véges csoport szabad szorzata is kváziizometrikus velük.

A **11.a.** feladat komplementereként fogható föl, hogy minden megszámlálható csoport beágyazható valamilyen 2-generátoros csoportba, ami a kombinatorikus és geometriai csoportelmélet alapvető fontosságú Higman-Neumann-Neumann-bővítésének egy szép alkalmazása. Speciális esetként:

12. Legyen  $Sym_f(\mathbb{Z})$  azon  $\mathbb{Z}$ -permutációk csoportja, amelyek csak véges sok elemet mozgatnak. Ez nyilván nem végesen generált.
- a. A  $\tau : n \mapsto n + 1$  permutációval együtt generált csoport már végesen generált.
  - b.  $Sym_f(\mathbb{Z})$  részcsoportha annak a  $\langle \tau, \psi \rangle$  két elem által generált csoportnak, amely a  $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  halmazon hat,  $\tau(\infty) = \infty$  (amúgy a fenti eltolás), illetve  $\psi(0) = \infty, \psi(\infty) = 0$ , amúgy az identitás.

Az előzővel együtt az utolsó két feladat is kilóg kicsit, főleg a **13.e.** miatt kerültek most pont ebbe a feladatsorba.

13. A  $G$  csoport *reziduálisan véges*, ha  $\forall 1 \neq g \in G$ -re létezik egy véges  $F$  csoport és egy  $\phi : G \rightarrow F$  homomorfizmus, hogy  $\phi(g) \neq 1$ .
- a. Ha egy csoport rez. véges, akkor minden részcsoportha is az.
  - b. A természetes  $SL(n, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(n, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  leképezés miatt  $SL(n, \mathbb{Z})$  rez. véges.
  - c. Az  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  elemek szabadon generálnak egy  $F_2$  részcsoporthot  $SL(2, \mathbb{Z})$ -ben, így  $F_r$  rez. véges minden  $r$ -re.
  - d. Ha  $G$  rez. véges, akkor minden  $G \rightarrow G$  szürjektív homomorfizmus bijekció is.
  - e. Ha a  $\{g_1, \dots, g_r\}$  elemhalmaz generálja  $F_r$ -et, akkor ez egy szabad generátorrendszer.
14.  $G$  pontosan akkor rez. véges, ha létezik egy  $M$  Hausdorff-tér és ezen  $G$ -nek egy hű csoporthatása úgy, hogy az *kaotikus*, azaz
- (i) a véges pályák uniója sűrű  $M$ -ben, és
  - (ii) topologikusan tranzitív a hatás, azaz bármely két nemüres nyílt  $U, V \subseteq M$ -re létezik  $g \in G$ , hogy  $g(U) \cap V \neq \emptyset$ .
- Adjuk meg  $SL(n, \mathbb{Z})$ -nek egy kaotikus hatását a  $\mathbb{T}^n$  tóruszon!