

2000. TAVASZ, I. GEOMETRIA FELADATSOR
RÁCSGEOMETRIA ÉS DISZKRÉT FOURIER-TRANSZFORMÁLT

1. Egy G lokálkompakt Abel-csoport D részhalmazát *Deloné-halmaznak* nevezzük, ha *uniforman diszkrét*, azaz létezik az 0 egységelemnek egy U környezete, hogy $(D - D) \cap U = \{0\}$, és *viszonylag sűrű*, azaz létezik olyan kompakt $K \subseteq G$, hogy $D + K = G$. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) egy $\Lambda \leq G$ részcsoporthoz ekvivalens az a két feltétel, hogy Λ Deloné, illetve, hogy Λ a G -ből öröklött topológiában diszkrét, és G/Λ kompakt. Ezeket a Λ -kat hívjuk *rácsnak*.
 - (b) \mathbb{R}^n -ben vagy \mathbb{Q}^n -ben pontosan az n darab lineárisan független elem által generált szabad Abel-csoportok a rácsok.
 - (c) Ha egy $\Lambda \leq \mathbb{R}^n$ rács generátorai az f_1, \dots, f_n vektorok, mégpedig az \mathbb{R}^n egy e_1, \dots, e_n bázisában felírva $f_k = \sum_i c_{ki} e_i$, akkor az $F_\Lambda := \{x = \sum_{i=1}^n c_i f_i \in \mathbb{R}^n : 0 \leq c_i < 1\}$ fundamentális paralelogrammára $\text{Vol}(F_\Lambda) = \det(c_{ij})$, ahol az e_i -k által feszített "egységkocka" térfogata az egység. Ez a $\text{Vol} F_\Lambda$ nem függ az f_i generátorrendszerteről. Ha $\Gamma \leq \Lambda$ egy részrács, akkor $[\Lambda : \Gamma] = \text{Vol} F_\Gamma / \text{Vol} F_\Lambda$.
2. Legyen $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ egy rács, és $K \subseteq \mathbb{R}^n$ egy 0-ra centrálszimmetrikus konvex kompakt halmaz nemüres belsővel. Defináljuk a $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ számokat úgy, hogy $\lambda_k = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda K \text{ tartalmaz } k \text{ db lin. független vektort } \Lambda\text{-ból}\}$.
 - (a) *Minkowski 1. számgeometriai tétele*: Ha $\text{Vol} K \geq 2^n \text{Vol} F_\Lambda$, akkor K tartalmaz az origón kívül rácspontot.
 - (b) *Minkowski 2. számgeometriai tétele*: $\lambda_1 \cdots \lambda_n \text{Vol} K \leq 2^n \text{Vol} F_\Lambda$.
3. Tekintsük a $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ rácsot és egy S sokszöget, melynek minden csúcsa rácspont. Igazoljuk, hogy ha S határán k db, belsejében n db rácspont van, akkor S területe $n + k/2 - 1$.
4. Tetszőleges T síkbeli alakzatra,
 - (a) ha területe nagyobb n -nél, akkor eltolható úgy, hogy legalább $n + 1$ rácspont legyen a belsejében;
 - (b) ha területe kisebb 1-nél, akkor eltolható úgy, hogy ne legyen a belsejében rácspont.
5. Legyen $R(t) = |\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 \leq t\}|$. Igazoljuk, hogy $R(t) - \pi t = O(\sqrt{t})$.
 A hibatag pontos nagyságrendje a Riemann-sejtéshez kapcsolódó nagyon nehéz probléma.
6. Vegyünk egy origó középpontú 50 sugarú kertet a síkon, ahol minden \mathbb{Z}^2 -beli rácspontban egy ρ sugarú fa áll. Igazoljuk, hogy
 - (a) $\rho \geq 1/50$ esetén nem látunk ki az origóból a kerten kívülre, de
 - (b) $\rho < 1/\sqrt{2501}$ esetén már igen.
7. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) ha p egy $4k + 1$ alakú prím, akkor előáll két négyzetszám összegeként.
 - (b) minden pozitív egész előáll négy négyzetszám összegeként.
 - (c) minden $\epsilon > 0$ -hoz és ehhez képest elég nagy n pozitív egészhez vannak olyan x, y, z természetes számok, hogy $n^2 + x^2 = y^2 + z^2$, és amelyekre $y, z \leq (1 + \epsilon)n/\sqrt{2}$.

8. Egy $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = n$ algebrai testbővítésben az $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ algebrai egészek gyűrűje egy n elem által generált szabad \mathbb{Z} -modulus.
9. Az $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Z}_N$ számokhoz tartozó $\delta > 0$ sugarú $B(r_1, \dots, r_k; \delta)$ Bohr-környezeten az $\{s \in \mathbb{Z}_N : |r_i s| \leq \delta N, i = 1, \dots, k\}$ halmazt értjük. \mathbb{Z}_N -nek egy részhalmaza d -dimenziós számtani sorozat, ha

$$\left\{ x_0 + \sum_{i=1}^d a_i x_i : 0 \leq a_i < s_i, i = 1, \dots, d \right\}$$

alakú, valamely $x_0, x_1, \dots, x_d, s_1, \dots, s_d$ számokkal. Egy ilyen számtani sorozat valódi, ha mindegyik $\sum_i a_i x_i$ különböző.

- (a) A $B(r_1, \dots, r_k; \delta)$ halmaz legalább $\delta^k N$ elemet tartalmaz.
- (b) A $B(r_1, \dots, r_k; \delta)$ halmaz tartalmaz egy valódi k -dimenziós számtani sorozatot legalább $(\delta/k)^k N$ elemmel.
10. Egy $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ függvényhez definiáljuk az

$$\widehat{f}(r) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_N} f(s) \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} sr\right), \quad r \in \mathbb{Z}_N$$

diszkrét Fourier-transzformáltat. Egy $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ halmaz Fourier-együtthatói az $\widehat{A}(s)$ karakterisztikus függvényének transzformáltja. Definiáljuk továbbá a konvolúciót: $(f * g)(s) = \sum_t f(t) \overline{g(t-s)}$. Igazoljuk, hogy

- (a) $\sum_r \widehat{f}(r) \overline{\widehat{g}(r)} = N \sum_s f(s) \overline{g(s)}$.
- (b) $\widehat{(f * g)}(r) = \widehat{f}(r) \overline{\widehat{g}(r)}$.
- (c) $\sum_r |\widehat{f}(r)|^4 = N \sum_{a+b=c+d} f(a) \overline{f(b)} \overline{f(c)} f(d)$.
11. Igazoljuk, hogy kis halmazok nem lehetnek nagyon véletlenszerűek, azaz:
- (a) Ha az $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ halmazba p valószínűséggel függetlenül és véletlenszerűen választjuk be \mathbb{Z}_N elemeit, akkor $N \rightarrow \infty$ közben 1-hez tartó valószínűséggel

$$c_p n^{1/2} \leq \max_{r \neq 0} |\widehat{A}(r)| \leq C_p n^{3/4},$$

ahol c_p, C_p csak p -től függő konstansok, míg $\widehat{A}(0) = |A| \sim pn$. Tehát az $\widehat{A}(0)$ -n kívüli Fourier-együtthatók viszonylag kicsik.

- (b) Ha viszont $|A| \leq 1/20 \log_2 N$, akkor létezik $r \neq 0$, hogy $|\widehat{A}(r)| \geq |A|/2$.
12. *Bogoljubov-lemma*: Ha $A \subseteq \mathbb{Z}_N$, $|A| \geq \alpha N$, akkor a $2A - 2A$ halmaz tartalmaz egy legfeljebb α^{-2} dimenziós számtani sorozatot, legalább $(\alpha^2/4)\alpha^{-2} N$ elemmel.

Ez az lemma az egyik kulcsa a kombinatorikus számelmélet és geometria egyik ünnevelt eredményének, a *Freiman-Ruzsa-tételnek*, miszerint ha $A \subseteq \mathbb{Z}$ -re $|A+A| \leq C|A|$, akkor az A lefedhető egy legfeljebb $K|A|$ elemszámú d -dimenziós számtani sorozattal, ahol K és d csak C -től függenek. Az persze világos, hogy a számtani sorozatok valóban teljesítik az $|A+A| \leq C|A|$ feltételt.

Itt meg kell említeni *Szemerédi Endre tételét*, mely szerint a természetes számok tetszőleges pozitív felső sűrűségű részhalmazában van akármilyen hosszú számtani sorozat. 3 hosszúakra ezt először *K. Roth* igazolta a Fourier-módszerrel, majd bizonyítását tetszőleges hosszúakra pont a Freiman-Ruzsa-tétel segítségével módosította *Tim Gowers*. Fontos vívmánya Gowers bizonyításának, hogy épeszű korlátot ad arra, hogy adott $\delta > 0$ sűrűség esetén mekkora $\{1, \dots, N_\delta\}$ kezdőszeletet elég nézni — ezt sem Szemerédi regularitási lemmás kombinatorikus, sem *Fürstenberg* ergodelméletes módszere nem adta.