ALGEBRAI GEOMETRIA FELADATSOR (1999. ŐSZ)

PETE GÁBOR <gpete@sol.cc.u-szeged.hu>

Egy k-as vizsgajegyhez $2k$ db feladat megoldása szükséges, a csillaggal jelölt feladatok kettőt érnek, de azért ők sem nagyon nehezek. (Néha csak nem volt szívem kettétörni őket, viszont részmegoldás is beadható. Csillagtalan feladat csillagossá minősítéséért is lehet folyamodni.) Az óra követéséhez a feladatok elolvasása melegen ajánlott. Bármilyen kérdést vagy észrevételt örömmel fogadok.

Algebrai görbék, Bézout-tétel

1. Határozzuk meg azt a legkisebb $d = d(m, n)$ dimenziót, amelyre minden $\mathbb{K}$ test esetén létezik $\mathbb{P}^n\mathbb{K} \times \mathbb{P}^m\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{P}^d\mathbb{K}$ zárt algebrai részvarietásként való beágyazás!

2. Legyen $\mathbb{K}$ tetszőleges test, az (a) részben algebrailag zárt.

(a) Biz. be, hogy tetszőleges m-edfokú homogén $p(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ polinom felbomlik m db lineáris $\alpha_i x + \beta_i y$ tényező szorzatára, ahol $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Igaz-e ez több változóra?

(b) Legyen $P(x_1, \ldots, x_n)$ egy m-edfokú homogén polinom. Biz. be, hogy

$$x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + x_n \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = mP(x_1, \ldots, x_n).$$

(c) Igazoljuk, hogy ha vesszük $\mathbb{K}^n$-ben a $p(x_1, \ldots, x_n)$ polinom által definiált C részsokaság topológiai lezárását $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$-ban, akkor ez a C^* részsokaság nem más, mint a $P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ homogenizált polinom által definiált projektív részsokaság!

3. Tekintsük a $C = \{xy = y^2 : x, y \in \mathbb{C}\}$ és $D = \{y^2 = x^3 : x, y \in \mathbb{C}\}$ komplex görbéket! Keressük meg szingularitási helyeiket! Vegyük az $S_\epsilon = \{|z| = \epsilon : z \in \mathbb{C}\}$ gömbfelületet, $\epsilon > 0$ kicsi, és határozzuk meg a $C \cap S_\epsilon$ és $D \cap S_\epsilon$ sokaságok homeomorfizmus típusát!

4. Írjuk ki rendesen a *Bézout-tétel* bizonyítását, azaz:

(a) ha a P és Q polinomok által definiált C és D komplex projektív görbéknek nincsen közös komponense és $[1 : 0 : 0] \notin C \cup D$, sőt, semelyik olyan egyenesen sincsen rajta, ami $C \cap D$ két pontján is átmegy (ez átkoordinátázással elérhető), akkor az $I_p(C, D)$ metszési indexre jó definíció az a legnagyobb k, hogy $p = [a : b : c] \in C \cap D$-re $(bz - cy)^k$ osztja az $\mathcal{R}_{P,Q}(y, z)$ rezultánst.

(b) Ezzel az $I_p(C, D)$-vel valóban igaz tetszőleges n és m-edfokú komplex projektív görbékre, hogy $\sum_{p \in C \cap D} I_p(C, D) = nm$.

(c) Ez az egyetlen jó definíció $I_p(C, D)$-re.

***4.5.** Két apróság, amibe az órán belebuktam:

(a) Biz. be Bézout tételéből Pascal "misztikus hatszög" tételét.

(b) Egy $P(a, b, 1) = 0 \neq P_y(a, b, 1)$ pont esetén a Hesse-determináns $\mathcal{H}_P(a, b, 1) = 0$ pontosan akkor, ha az $[a : b : 1]$ körül $P(x, y(x), 1) = 0$-val definiált $y(x)$ görbére $\partial^2 y/\partial x^2|_{x=a} = 0$ — azaz a két inflexiós pont definíció megegyezik.

5. Legyen C egy d-edfokú nemszinguláris görbe $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$-ben. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $d \geq 2$, akkor C-nek legfeljebb $3d(d - 2)$ inflexiós pontja van.

(b) ha $d \geq 3$, akkor C-nek legalább egy inflexiós pontja van.

6. Igazoljuk, hogy minden nemszinguláris 3-adfokú komplex projektív görbe egy projektív transzformációval az $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$ alakra hozható, ahol $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

7. Biz. be, hogy minden nemszinguláris 3-adfokú komplex projektív görbének pontosan 9 inflexiós pontja van!

8. Igazoljuk a *Cayley-Bacharach tételt*, azaz: legyen C és D két 3-adfokú komplex projektív görbe úgy, hogy $C \cap D = \{P_1, \ldots, P_9\}$ különböző pontok. Ha E egy harmadik köbgörbe, ami átmegy a $P_1, \ldots P_8$ pontokon, akkor a P_9-en is átmegy! Általánosíthatjuk a $\deg E \leq \deg C + \deg D - 3$ esetre is!

9. Igazoljuk a Cayley-Bacharach-tételből

(a) a Pascal-féle "misztikus hatszög" tételt!

(b) hogy az egyenesmetszéssel geometriailag definiált összeadás az elliptikus görbéken asszociatív!

10. Mint tudjuk, a valós projektív kúpszeletek $\mathcal{S}_2$ halmaza azonosítható a 3×3-as valós szimmetrikus mátrixok terével, és így $\mathbb{R}^6$-nal. Tetszőleges $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ pontokra jelölje $\mathcal{S}_2(P_1, \ldots, P_n)$ az ezen pontok mindegyikén átmenő másodfokú görbék halmazát, azaz $\mathbb{R}^6$ egy részhalmazát. Igazoljuk, hogy ez a részhalmaz egy differenciálható sokaság, sőt, egészen speciális! Továbbá $\dim \mathcal{S}_2(P_1, \ldots, P_n) \geq 6 - n$, és egyenlőség is igaz abban az esetben, ha $n \leq 5$ és semelyik 4 pont sem kollineáris.

11. Egy $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ polinom *racionális parametrizálásán* olyan $x, y : \mathbb{P}^1\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{K}$ racionális függvényeket (azaz polinomok hányadosait) értjük, melyekkel az $\{f(x,y) = 0 : x, y \in \mathbb{K}\}$ ponthalmaz az $\{f(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{P}^1\mathbb{K}\}$ alakba írható.

(a) Találjunk ilyen parametrizálást az $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 = y^3$, $y^2 = x^3 + x^2$, $x^4 + y^4 + x^2y - y^3 = 0$ görbékhez!

(b) Lehet-e vajon parametrizálni az $y^2 = x^3 - x$ és az $x^3 + y^3 = 1$ görbéket?

Leképezések foka, fedések, Lie-csoportok

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges M topológikus térre a $\pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ csoport (a kommutátorral való faktorizált) izomorf a $H_1(M, \mathbb{Z})$ homológiacsoporttal!

***13.**

(a) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diffható, és $C \subset \mathbb{R}^m$ Lebesgue-mértéke 0, akkor $f(C)$ is 0-mértékű. (Ötlet: használjuk a Lagrange középérték-tételt, avagy a Taylor sorbafejtést, ami ugyanaz.)

(b) Bizonyítsuk be *Sard tételét*: ha $f : M \longrightarrow N$ egy m és egy n dimenziós diffható sokaság közötti diffható leképezés, akkor a kritikus értékek halmaza N-ben 0-mértékű. (Ötlet: n-re indukció és Fubini, és persze az (a) pont.) Igaz-e, hogy a kritikus helyek is 0-mértékűek M-ben?

***14.** Biz. be, hogy $f : M \longrightarrow N$ diffhatóra $\deg f|_y$ valóban független az $y \in N$ reguláris érték választásától, és f-re nézve homotópiainvariáns!

***15.** Igazoljuk, hogy

(a) az $f, g : M \longrightarrow S^n$ leképezések pontosan akkor homotópok, ha deg-jük megegyezik;

(b) ha $f : M \longrightarrow N$-re vesszük az $f_{*n}^{\mathbb{Z}} : H_n(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(N,\mathbb{Z})$ indukált homomorfizmust, akkor $\deg f = f_{*n}^{\mathbb{Z}}(1)$.

16. Mint tudjuk, tetszőleges $f : M \longrightarrow M$ leképezés $x \in M$ izolált fixpontja esetén definiálhatjuk az $\operatorname{ind}_x f$ indexet mint az x körüli Gauss-leképezés deg-jét. Fogadjuk el a *Lefschetz-formulát*, miszerint

$$\sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \operatorname{Tr} f_{*k}^{\mathbb{Q}} =: L(f) = \sum_{x \in Fix(f)} \operatorname{ind}_x f,$$

és bizonyítsuk ebből a *Brouwer fixponttételt* (a B^n gömb tetszőleges folytonos transzformációjának van fixpontja) és a *Poincaré-Hopf indextételt* (tetszőleges $\xi : M \longrightarrow TM$ vektormezőre $\sum_{x \in Fix(\xi)} \operatorname{ind}_x \xi = \chi(M)$).

17. Igazoljuk a következő Lie-csoport dimenziókat!

$$\dim GL(n,\mathbb{R}) = n^2, \quad \dim SL(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1, \quad \dim SL(n,\mathbb{C}) = 2n^2 - 2$$

$$\dim O(n) = \dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dim U(n) = n^2, \quad \dim SU(n) = n^2 - 1$$

18. Ha $f : H \longrightarrow G$ egy fedőleképezés, G Lie-csoport, és $f(e') = e$, akkor létezik pontosan egy e' egységelemű Lie-csoportstruktúra H-n, hogy $H/\ker f \simeq G$, és $\ker f \leq Z(H)$ diszkrét részcsoport. Megfordítva, egy H Lie-csoport esetén minden $\Gamma \leq Z(H)$ diszkrét részcsoportra H/Γ egy Lie-csoport.

***19.** Legyen $p : E \longrightarrow B$ egy lokálisan triviális fibráció F fibrummal. Ha választunk $x \in B$ és $y \in E$ alappontokat, $p(y) = x$, $F = p^{-1}(x)$, akkor a p projekció és az $\iota : F \longrightarrow E$ beágyazás természetes módon indukálják a $p_* : \pi_k(E,y) \longrightarrow \pi_k(F,x)$ és a $\iota_* : \pi_k(F,y) \longrightarrow \pi_k(E,y)$ homomorfizmusokat. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy $\partial : \pi_k(B,x) \longrightarrow \pi_{k-1}(F,y)$ homomorfizmus úgy, hogy a következő sorozat egzakt:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(B) \xrightarrow{\partial} \pi_k(F) \xrightarrow{\iota_*} \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

Használjuk a $p : E \longrightarrow B$ fibráció *relatív homotópiafelemelési tulajdonságát* tetszőleges $Q \subseteq P$ szimpliciális komplexus párra, azaz: minden $f_t : P \longrightarrow B$ homotópiára, az f_0 kezdőleképezés egy tetszőleges $g_0 : P \longrightarrow E$ felemeltjére, és az $f_t|_Q$ egy tetszőleges $h_t : Q \longrightarrow E$ felemeltjére, amire $h_0 = g_0|_Q$, létezik egy h_t-t kiterjesztő f_t feletti g_0 kezdetű g_t homotópia.

***20.** Igazoljuk, hogy
(a) $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm 1\}$ mint Lie-csoportok, és ezek diffeomorfak $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$-rel.
(b) $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$, ha $n \geq 3$.
(c) $\pi_1(GL(n,\mathbb{C})) = \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$, ha $n \geq 1$.

***21.** Egy G lokálkompakt Abel-csoport D részhalmazát *Deloné-halmaznak* nevezzük, ha *uniforman diszkrét*, azaz létezik az 0 egységelemnek egy U környezete, hogy $(D - D) \cap U = \{0\}$, és *viszonylag sűrű*, azaz létezik olyan kompakt $K \subseteq G$, hogy $D + K = G$. Bizonyítsuk be, hogy
(a) egy $\Lambda \leq G$ részcsoportra ekvivalens az a két feltétel, hogy Λ Deloné, illetve, hogy Λ a G-ből öröklött topológiában diszkrét, és G/Λ kompakt. Ezeket a

Λ-kat hívjuk *rácsnak.* A 0 egységelem G/Λ szerinti osztályát, ami egy $F = F(\Lambda) \subseteq G$ kompakt halmaz, hívjuk a Λ rács *fundamentális tartományának.* Ez persze nagyjából megegyezik a szokásos fundamentális tartomány definícióval, amikor is a Λ csoport eltolásokkal való hatását nézzük a G felületen.

(b) $\mathbb{R}^n$-ben vagy $\mathbb{Q}^n$-ben pontosan az n darab lineárisan független elem által generált szabad Abel-csoportok a rácsok.

(c) Ha egy $\Lambda \le \mathbb{R}^n$ rács generátorai az $f_1, \dots, f_n$ vektorok, mégpedig az $\mathbb{R}^n$ egy $e_1 \dots, e_n$ bázisában felírva $f_k = \sum_i c_{ki} e_i$, akkor az F fundamentális tartományra $\mathrm{Vol}\,(F) = \det\,(c_{ij})$, ahol az e_i-k által feszített egységkocka térfogata 1. Ez a $\mathrm{Vol}\,F$ nem függ az f_i generátorrendszertől. Ha $\Gamma \le \Lambda$ egy részrács, akkor $[\Lambda : \Gamma] = \mathrm{Vol}\,F(\Gamma)/\mathrm{Vol}\,F(\Lambda)$.

(d) Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ egy 0-ra centrálszimmetrikus konvex kompakt halmaz $\mathrm{Vol}\,K \ge 2^n \mathrm{Vol}\,F(\Lambda)$ térfogattal, akkor K tartalmaz rácspontot az origón kívül. Ez *Minkowski 1. számgeometriai tétele.*

22. Egy összefüggő Abel-féle valós Lie-csoport $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ alakú.

23. Kompakt összefüggő komplex Lie-csoport mindig Abel-féle.

24. Egy G Lie-csoportnak a T_eG-n értelmezett $\mathfrak{g}$ Lie-algebráján van az $\mathrm{ad}(X)Y$-ként definiált $[X, Y]$ Lie-zárójel. Tetszőleges $X, Y \in T_eG$ vektorokhoz tekinthetjük az $\tilde{X}$ és $\tilde{Y}$, a teljes TG-re kiterjesztett vektormezőket, ahol $\tilde{X}_g = (dm_g)_e X$, $m_g : G \longrightarrow G$ a g-vel való balról szorzás. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ diffható függvényre $[X, Y]f = \tilde{X}(\tilde{Y}f) - \tilde{X}(\tilde{Y}f)$.

Riemann-felületek és fedőleképezéseik

25. Igazoljuk a következő Riemann-felület automorfizmus-csoportokat!

(a) $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C} = \{z \mapsto az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$.

(b) $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D} = \{z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}} : |a|^2 - |c|^2 = 1\} \le PSL(2, \mathbb{R})$.

(c) $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1\} \simeq PSL(2, \mathbb{C})$.

26. Mik az univerzális fedői a következő Riemann-felületeknek? Nyílt körlap mínusz egy pont; sík mínusz egy pont; sík mínusz két pont. (Ötlet: a $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ moduláris csoport Möbius-trafókkal való hatása a felső félsíkon.)

***27.** Bizonyítsuk be a *Kis és Nagy Picard-tételt*, melyek szerint egy egész síkon holomorf nemkonstans függvény lefeljebb egy értéket hagyhat ki értékkészletéből, illetve egy lényeges szingularitás tetszőleges környezetében is legfeljebb egy kivételes érték van. (Ötlet: ne féljünk áttérni az univerzális fedőkre!) Adjunk példákat, amikor van kivételes érték!

28. Legyen R egy g génuszú Riemann-felület, ω egy tetszőleges meromorf differenciál, és $\kappa = \mathrm{div}\,\omega$ az ő kanonikus divizorja. Bizonyítsuk be, hogy $\deg \kappa = 2g - 2$.

***29.** Írjuk ki szépen a Riemann-Roch tételben a Lemma 1-3. állítások bizonyítását!

30. Van egy tétel, miszerint tetszőleges kompakt $g \ge 2$ génuszú R Riemann-felület automorfizmus csoportja véges. Ezt ismertnek feltéve, bizonyítsuk be, hogy $|\mathrm{Aut}\,R| \le 84(g - 1)$.

Kommutatív algebra

31. Legyenek M, M', M'', N egy A (ezentúl mindig kommutatív) gyűrű fölötti modulusok.

(a) Ha az $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ sorozat egzakt, akkor az $M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$ sorozat is az.

(b) A hasonló állítás a $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ egzakt sorozatra nem igaz.

32. Írjuk ki rendesen a következő tételek bizonyítását!

(a) Legyen $I \lhd A$, M egy végesen generált A-modulus, $\Phi : M \longrightarrow M$ modulushomomorfizmus úgy, hogy $\Phi(M) \subseteq IM$. Biz. be, hogy $\exists\, a_0, \ldots a_{n-1} \in I$, amelyekkel teljesül a $\Phi^n + a_{n-1}\Phi^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ egyenlet!

(b) Ha $I \lhd \operatorname{rad} A := \cap_{m \max} m$, és $IM = M$, akkor $M = 0$. Ez a *Nakayama-lemma.*

(c) Legyenek $A \subseteq B$ gyűrűk. Ekkor tetszőleges $x \in B$-re az $A[x]$ modulus pontosan akkor végesen generált A fölött, ha x egy algebrai egész A-ban.

33. Ha $A \subseteq B$ integritástartományok, és B algebrailag egész A fölött, akkor A és B pontosan egyszerre testek.

34. Legyenek $A \subseteq B$ gyűrűk, és B algebrailag egész A fölött.

(a) Minden $P \lhd A$ prímhez létezik $Q \lhd B$ prím, hogy $P = Q \cap A$.

(b) Ha $P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_n$ prímideálok A-ban, és $Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_m$ prímek B-ben úgy, hogy $\forall i \leq m < n$-re $Q_i \cap A = P_i$, akkor a láncunk megfelelően kiterjeszthető $\cdots \subseteq Q_m \subseteq \cdots \subseteq Q_n$-né. Ez a *Going up tétel.* Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk a *Going down* tételt is!

35. Algebrai számelmélet bemelegítésként igazoljuk az itt fölelevenített állításokat!

(a) Ha $[K : \mathbb{Q}] = n$ egy algebrai számtest, akkor a K *algebrai egészeinek*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K : &= \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : \alpha \in K \text{ egy } \mathbb{Z}\text{-együtthatós polinom gyöke}\} \\ &= \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Z}[\alpha] \text{ egy végesen generált } \mathbb{Z}\text{-modulus}\} \end{aligned}$$

halmaza egy gyűrű, amelyre $\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ és $\mathcal{O}_K \otimes_Z \mathbb{Q} = K$.

(b) Pontosan n darab $\sigma_\nu : K \longrightarrow \mathbb{C}$ testbeágyazás van, ezek közül $2s$ darab egymás páronkénti komplex konjugáltjai, $\sigma_{r+i} = \overline{\sigma}_{r+s+i}$, $r + 2s = n$. Ha $\sigma = (\sigma_1, \ldots \sigma_n) : K \longrightarrow \mathbb{C}^n$, akkor $V := \sigma K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$, ahol az izomorfizmus a $\sigma \mapsto \tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \Re\sigma_{r+1}, \ldots, \Re\sigma_{r+s}, \Im\sigma_{r+1}, \ldots, \Im\sigma_{r+s})$ megfeleltetés. Végül definiáljuk a $\operatorname{Norm}_{K/\mathbb{Q}} \alpha = \prod_{\nu=1}^n \sigma_\nu \alpha$ és $\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}} \alpha = \sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu \alpha$ számokat.

36. Bizonyítsuk be (nem feledve a 21. feladatot, és az előző feladat jelöléseivel) a következőket:

(a) $\mathcal{O}_K$ egy szabad $\mathbb{Z}$-modulus n generátorral; legyenek ezek $\alpha_1, \ldots \alpha_n$.

(b) Az $M = (\sigma_\mu \alpha_\nu)$ mátrixra a K test *diszkriminánsa*

$$d_K := \det\,(M^T M) = \det\,(\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_\mu \alpha_\nu)) \neq 0.$$

Továbbá $\operatorname{Vol} V/\tilde{\sigma}\mathcal{O}_K = 2^{-s}|d_K|^{1/2}$.

(c) Ha $\mathfrak{a}$ az $\mathcal{O}_K$ egy törtideálja, akkor értelmes a

$$\operatorname{Norm}_{K/\mathbb{Q}} \mathfrak{a} = (\operatorname{Vol} V/\tilde{\sigma}\mathfrak{a})/(\operatorname{Vol} V/\tilde{\sigma}\mathcal{O}_K)$$

definíció, rendes $\mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K$ ideálokra ez egyenlő $[\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}]$-val, és $\mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}}\,\alpha$, tetszőleges $\alpha \in \mathcal{O}_K$-ra.

***37.** Igazoljuk, hogy
(a) $\mathcal{O}_K$ egy Dedekind-tartomány.
(b) $\mathrm{Cl}\,\mathcal{O}_K$ véges.

38. Bizonyítsuk a következőket:
(a) Tetszőleges A gyűrű nilpotens elemeinek ideálja $\mathrm{nil}\,A = \cap_{P \text{ prím}} P$.
(b) Egy (A, m) lokális gyűrűben $\dim A_P < \dim A$ minden $m \neq P$ prímre.
(c) Ha egy A gyűrű minden maximális m ideáljára $\dim A_m = r$, akkor $\dim A_m = r$ is igaz.

39. Egy A Noether-tartomány pontosan akkor UFD, ha minden $x \in A$ prímre A_x is az, illetve pontosan akkor, ha minden $\mathrm{ht}\,P := \dim A_P = 1$-t teljesítő P prímideál főideál is.

***40.** Bizonyítsuk egy A Noether-gyűrűben a következőket:
(a) Ha I primér, akkor $\sqrt{I} = P$ prím. Ilyenkor hívjuk I-t P-primérnek.
(b) Ha $\sqrt{I}$ maximális, akkor I primér.
(c) Minden irreducibilis I ideál primér is. Ennek fordítottja nem igaz.
(d) Tetszőleges ideál előáll véges sok primér ideál metszeteként.

41. Legyen (A, m) lokális gyűrű és M egy végesen generált A-modulus (pld. egy prímideálja A-nak). Igazoljuk, hogy ekkor M minimális generátorszáma egyenlő $\dim_{A/m} M/mM$-mel. Így definícióként elfogadhatjuk, hogy (A, m) *reguláris*, ha

$$\min_{m\text{-primér } Q} (Q \text{ minimális generátorszáma}) =: r(A) = \dim_{A/m} m/m^2.$$

42. Ha (A, m) reguláris, és $x \in m \setminus m^2$, akkor $A/(x)$ is reguláris.

43. Bizonyítsuk be az $r(A) = \dim A$ *dimenzió-tétel* azon felét, hogy $r(A) \leq \dim A$.

44. Feltéve a dimenzió-tételt igazoljuk, hogy ha (A, m) reguláris, akkor A egy integritástartomány.

45. Legyen C egy k fölötti irred. algebrai görbe. Ekkor
(a) C pontosan akkor nemszinguláris, ha $A = k[C]$ normális.
(b) Ha A egészségi lezártja $\mathrm{Frac}\,A$-ben $\tilde{A}$, akkor létezik egy nemszinguláris $\tilde{C} \subseteq k^n$ görbe, hogy $\tilde{A} = k[\tilde{C}]$, és az $A \longrightarrow \tilde{A}$ beágyazás egy polinomiális $\tilde{C} \longrightarrow C$ leképezéshez tartozik.

46. Igazoljuk, hogy ha (mint a NNL-ban) van egy $k[Y_1, \ldots, Y_m] \longrightarrow k[V]$ véges modulus-kiterjesztésünk, akkor az ennek megfelelő $k^n \supseteq V \longrightarrow k^m$ vetítésnek véges fibrumai vannak. Sőt, ha $k = \overline{k}$, akkor a fibrumok nemüresek.

47. Egy $P \lhd A = k[V]$ pontosan akkor maximális, ha $[\mathrm{Frac}\,(A/P) : k] < \infty$.

***47.5.** Ha $A = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ vagy $A = k[V]$, ahol k egy véges test, akkor minden $m \lhd A$ maximális ideálra az A/m test véges.

48. Legyen $J = (XY, XZ, YZ) \lhd k[X, Y, Z]$. Micsoda $V(J) \subseteq k^3$? Igaz-e, hogy $J = I(V(J))$? Biz. be, hogy J nem generálható 2 polinommal. Tekintsük $J' = (XY, (X - Y)Z)$-t. Találjuk meg $V(J')$-t és $\mathrm{rad}\,J'$-t.

49. Írjuk ki rendesen annak bizonyítását, hogy ha $V = V(I)$, $I \lhd k[X_1, \ldots, X_n]$, és $I = (f_1, \ldots, f_r)$, akkor $\operatorname{rank}(\partial f_i/\partial X_j)(P) \leq n - \dim V$.

50. Legyen $\overline{k} = k$ test. A Jacobi-rangos definícióval könnyen látszik, hogy k^n minden pontjában sima. Bizonyítsuk be ebben a speciális esetben azt a tételt, hogy pontosan akkor sima egy $p \in V$ pont egy tetszőleges k feletti algebrai varietáson, ha $\mathcal{O}_{V,p}$ reguláris.

***51.** V affin algebrai varietás $\overline{k} = k$ felett. Biz. be (a dimenzió-tétel felhasználásával), hogy $\operatorname{tr}\deg[k(V) : k] =: \dim V = \dim \mathcal{O}_{V,p}$ minden $p \in V$-re. Következmény, hogy $\dim V = \dim k[V]$.

***52.** Legyenek $V, W \subseteq k^n$ részvarietások. Bizonyítsuk be, hogy $V \cap W$ tetszőleges Z komponensére $\operatorname{codim} Z \leq \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W$.

***53.** Legyen C és D két $k = \overline{k}$ feletti projektív görbe. Mint azt tudjuk, minden sima $p \in C$ pontra $\dim_k m_p/m_p^2 = 1$, és persze $k = \mathcal{O}_{C,p}/m_p$. Definiáljunk egy diszkrét értékelést $\mathcal{O}_{C,p}$-n, mégpedig $\operatorname{ord}_p(f) := \max\{d \geq 0 : f \in m_p^d\}$. Ez természetes módon kiterjeszhető egy $\operatorname{ord}_p : k(C) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ értékeléssé. Egy $t \in k(C)$ függvényt *p-beli uniformizálónak* hívunk, ha $\operatorname{ord}_p(t) = 1$, azaz ha m_p egy generátora. Egy $f : C \longrightarrow D$ algebrai leképezésre $\deg f := [k(C) : f^*k(D)]$, persze $\deg f := 0$, ha f konstans. Ha f sima görbék közötti nem-konstans leképezés, akkor definiáljuk minden $p \in C$-ben az *elágazási indexet* $e_f(p) := \operatorname{ord}_p(f^* t_{f(p)})$-ként. Bizonyítsuk be, hogy minden $q \in D$ pontra

$$\sum_{p \in f^{-1}(q)} e_f(p) = \deg f,$$

és amúgy is, fenti definícióink Riemann-felületek holomorf leképezéseire megegyeznek a szokásosakkal.

54. Legyen k egy tökéletes test, $I \lhd k[X_1, \ldots, X_n]$, $V = V_k(I)$, $\overline{V} = V_{\overline{k}}(I)$. Igazoljuk, hogy a Zariski-zárt pontokra $|V| = |\overline{V}|/\operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$.

55. Tetszőleges k fölötti V varietásra $\operatorname{Pic} V \simeq \operatorname{Cl} k[V]$.

Elliptikus görbék és moduláris formák

***56.** Biz. be a következő állításokat!
 (a) $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$
 (b) A Weierstrass-paraméterezés egy konform-ekvivalencia $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ és E_τ között.
 (c) Az E_τ pontosan akkor nemszinguláris, ha $\Delta(\tau) \neq 0$, ami potosan akkor, ha $\tau \neq \infty$.

57. Igazoljuk a Riemann-Roch-tétel nélkül az $\mathfrak{M}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{C}(\wp(z), \wp'(z))$ GAGA-típusú állítást.

***58.** Igazoljuk, hogy
 (a) $\operatorname{End}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{Z}$ vagy $R \leq \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D < 0$, részgyűrű, ahol R egy végesen generált modulus $\mathbb{Z}$ fölött, és $R \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.
 (b) Pld., ha $A\tau^2 + B\tau + C = 0$, akkor $\operatorname{End}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}A\tau$.

***59.** Írjuk ki rendesen a $\operatorname{Pic}^0(E) \simeq (E, \boxplus)$ tétel bizonyítását, azaz

(a) $\boxplus_{x\in E}\operatorname{ord}_x(f)x = 0$.
(b) Az egyetlen holomorf lehetőség a $\theta(z+1)=\theta(z)$ és $\theta(z+\tau)=e^{-\pi i(2z+\tau)}\theta(z)$ tulajdonságok kielégítésére a $\theta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n z}$.
(c) A θ-nak egyszeres gyökei vannak az $(1+\tau)/2+\Lambda_\tau$ pontokban, máshol nincsenek.

60. $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$.

61. Határozzuk meg a Γ moduláris csoport hatását $\mathbb{H}$-n: $\langle S,T\rangle$ generátorrendszer, fundamentális tartomány, diszkrétség, stabilizátorok.

***62.** Biz. be, hogy $\Gamma=\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_3$ szabad szorzat!

63. Határozzuk meg a $[\Gamma:\Gamma(n)]$ indexet.

***64.** Írjuk ki rendesen annak bizonyítását, hogy $\mathbb{C}$ fölött két elliptikus görbe E_τ és $E_{\tau'}$ pontosan akkor konformekvivalensek, ha $j(\tau)=j(\tau')$.

***65.** Igazoljuk, hogy $M^\Gamma=\mathbb{C}[g_2(\tau),g_3(\tau)]$.

66. Biz. be, hogy egy $k=\mathbb{F}_q$ fölötti E elliptikus görbére a $\phi : E(\overline{k}) \longrightarrow E(\overline{k})$, $\phi(x,y)=(x^q,y^q)$, Frobenius-leképezés jóldefiniált, és fixpontjainak halmaza éppen $E(k)$.

67. Igazoljuk, hogy tetszőleges k test feletti V projektív varietásra $\zeta(V(k),s)=\zeta(k(V),s)$.

***68.** Igazoljuk Hasse $|E(\mathbb{F}_q)-q-1|<2\sqrt{q}$ tételéből a megfelelő Riemann-sejtést: ha $\zeta(E(\mathbb{F}_q),s)=0$, akkor $\Re s=1/2$.