

Szegedi Tudományegyetem
Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék

Egy neuronhálózat dinamikai elemzése

Diplomamunka

Készítette:

Garab Ábel

matematikus szakos hallgató

V. évfolyam

Témavezető:

Dr. Krisztin Tibor

tanszékvezető

egyetemi tanár

Szeged

2008

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Neuronhálózatok modellezése	4
1.1. Az idegsejtek felépítése és az ingerület terjedése	4
1.2. Egy általános modell	5
1.3. A késleltetés szükségessége	8
2. Az alapegyenlet	10
2.1. Az egyenlet és ekvivalens alakjai	10
2.2. A megoldások létezése és egyértelműsége	12
3. A megoldás dinamikája egy sejt esetén	15
4. A karakterisztikus egyenlet vizsgálata	20
4.1. Az egyensúlyi helyzetek	20
4.2. Az egyensúlyi helyzetek stabilitása	21
5. Periodikus pályák	27
5.1. Periodikus pálya létezése negatív visszacsatolás esetén	27
5.2. Numerikus példák	30
Összefoglalás	33
Irodalomjegyzék	34
Köszönetnyilvánítás	36
Nyilatkozat	37

Bevezetés

A természettudományok azért alakultak ki, hogy általuk megérthessük a minket körülvevő világ működésének törvényszerűségeit. A természeti jelenségek mindig valamilyen fizikai, kémiai vagy biológiai törvénynek engedelmeskednek, melyek modellezhetők a matematika eszközeivel.

Az időben folytonosan változó rendszerek leírására leggyakrabban használt eszközök a differenciálegyenletek. Az olyan modelleket, melyekben figyelembe vesszük, hogy az állapot pillanatnyi változása függ a rendszer korábbi állapotaitól is, késleltetett differenciálegyenletek vagy egyenletrendszerek segítségével tudjuk leírni. Ezek fontosságára Picard hívta fel a figyelmet 1908-ban. A késleltetett differenciálegyenletek elméletét számos problémakörben alkalmazzák, például neuronhálózatok elméletében, elektrodinamikában, járványtanban, populációdinamikában, közgazdasági modellezésben, helymeghatározásban stb.

Napjainkban az agy működésének megértése, modellezése nemcsak az orvostudomány, hanem a számítástechnika legfontosabb feladatainak is egyike, hiszen a mesterséges intelligencia fejlesztésében fontos szerepet tölt be. 1943-ban McCulloch és Pitts [14] voltak az elsők, akik matematikailag modellezték az idegsejtekből álló hálózatokat. Azóta sokan foglalkoztak ezzel a területtel, mégis alig van olyan rendszer, melynek ismert lenne a pontos viselkedése.

Dolgozatomban idegsejtek egy gyűrűszerű hálózatának viselkedését vizsgálom az idegsejtek közti kapcsolatok függvényében, remélve, hogy ezzel hozzájárulhatok néhány élet-tani folyamat megértéséhez.

1. fejezet

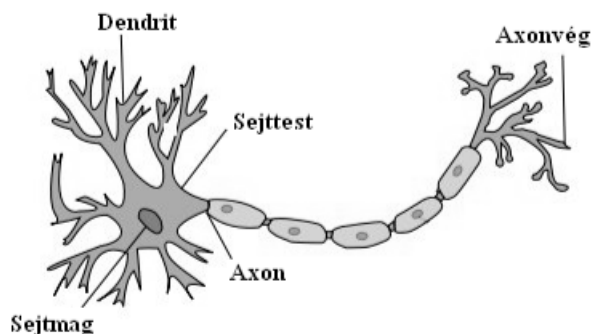
Neuronhálózatok modellezése

Az ember viselkedéséért és gondolkodásáért felelős szerv, a központi idegrendszer irányítóközpontja az agy, melyet több, mint százmilliárd egymással összeköttetésben álló idegsejt (neuron) alkot. Az idegsejt az idegrendszer legkisebb önálló egysége. Alakjuk, méretük és elhelyezkedésük nagyban különbözhet, felépítésük azonban meglehetősen egységes és az ingerület továbbítása is ugyanazon elektronikai és kémiai alapokon történik, így lehetőségünk nyílik egységes modellezésükre. Az ehhez szükséges biológiai ismereteket [20] alapján foglalom össze.

1.1. Az idegsejtek felépítése és az ingerület terjedése

Az 1.1 ábrán [19] láthatjuk a neuron sematikus felépítését. A neuron sejtteste tartalmazza a sejtmagot és más sejtalkotókat, melyek a sejt működéséhez szükségesek. Ebből ágaznak szét gyökérszerű nyúlványokként a sejt dendritjei és axonjai. A sejttest és a dendritek rendelkeznek egy speciális ingerület fogadó területtel, az úgynevezett szinapszissal. Az axon a sejttest szál szerű nyúlványa, mely számos elágazás után más idegsejtek szinapszisaikhoz kapcsolódik. Ilyen módon egy neuron akár 10000 másikkal is továbbíthatja az ingerületet.

Az idegsejt nyugalmi állapotában – azaz, amikor külső inger nem éri – megfigyelhető, hogy a sejtben és a sejt közötti térben a nátrium és kálium kationok, illetve a kloridionok és a disszociált aminosavak koncentrációja különböző. A legnagyobb különbség a nátrium- és káliumionok eloszlásában van: a sejtben belül a káliumion koncentrációja magasabb, míg a nátriumioné alacsonyabb, mint a sejtben kívüli térben. Ennek köszönhetően nyugalmi állapotban a sejt belsejének a sejtben kívüli térhez viszonyított relatív elektromos potenciálja – melyet nyugalmi potenciálnak nevezünk – körülbelül -60 mV és -80 mV között van. Ezt az állapotot a membránban működő Na-K-pumpa tartja fenn.



1.1. ábra. Egy tipikus neuron sematikus felépítése.

Az ingerület elektromos impulzus formájában terjed a sejten belül és a sejtek közt egyaránt. A sejten belül elektromos vezetés érvényesül, míg a sejtek közti szinapszisoknál kémiai mechanizmusok segítségével történik a jel továbbítása. Inger hatására az idegsejt membránja depolarizálódik: a membrán felszíne 20–30 millivolttal pozitívabb lesz a külsőnél. Ezt a gyors potenciálváltozást nevezik akciós potenciálnak. Ekkor a membrán nátriumion áteresztőképessége többszázszorosára növekszik, így a nátriumionok a sejtbe áramlanak. Ennek köszönhetően a sejt belsejének relatív potenciálja átmenetileg pozitív lesz. A depolarizáció az ingerlés területével szomszédos részekre is átterjed a membránon, így az elektromos impulzusok hullámszerűen végighaladnak a neuronon egészen az axonvégig. Az axonvég és a hozzá szinapszissal kapcsolódó sejt membránjai között van egy körülbelül 20–30 nm nagyságú rés, ez a szinaptikus rés. Ez a távolság túl nagy ahhoz, hogy a depolarizáció az előbb leírtak szerint át tudjon terjedni a másik sejtre is, így itt ingerületátvivő anyagok segítségével megy végbe a folyamat. Aszerint, hogy mi az ingerületátvivő anyag, megkülönböztetünk serkentő, illetve gátló szinapszisokat. A serkentő szinapszis esetén az átvivő anyag az acetilkolin, mely a követő neuron membránját depolarizálja, így az ingerület tovább terjed. A gátló szinapszis esetén az átvivő anyag a γ -amino-vajsav, melynek molekulái a követő neuronhoz kapcsolódva hiperpolarizálják annak membránját, így kloridionok áramlanak be a sejtbe, mely csökkenti vagy közömbösíti a környéken lévő serkentő szinapszisok hatását. Az akciós potenciál létrejötte után a Na-K-pumpa visszaállítja az idegsejt nyugalmi potenciálját.

1.2. Egy általános modell

A következőkben Harvey [5] modelljét veszem alapul és néhány egyszerűsítő feltételezéssel élek. Egy neuronhálózat az előzőek alapján felfogható úgy, mint egy áramkör, melynek pillanatnyi állapotát az egyes sejtek potenciálja írja le az adott időpontban. Tekintsünk

egy n neuronból álló hálózatot. Az egyes sejteket jelölje rendre v_1, \dots, v_n . Vezessük be a következő változókat:

- $x_i(t) = v_i$ potenciáljának eltérése t időpillanatban a nyugalmi potenciáltól,
- $Z_{ij} = v_i$ és v_j közti szinapszisban v_i axonján egy frekvenciára jutó átlagos ingerületátvivő anyag kibocsátás mennyisége.

Így v_i állapotát x_i írja le, míg Z_{ij} -t a v_i és v_j neuronok közti *kapcsolaterősség*nek nevezzük. A továbbiakban feltételezzük, hogy Z_{ij} konstans minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén. x_i változása egyaránt köszönhető a sejten belüli állapotváltozásoknak (gondoljunk a Na-K-pumpa működésére), a neuronhálózaton kívülről érkező ingereknek és hálózaton belüli kölcsönhatásoknak, melyek lehetnek serkentő vagy gátló típusúak. Feltételezzük, hogy ezek a hatások összeadódnak, vagyis:

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{belső}} + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{serk}} - \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{gátló}} + \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{inger}}. \quad (1.1)$$

Tegyük fel továbbá, hogy egy magára hagyott neuron potenciálja exponenciális sebességgel tér vissza a nyugalmi potenciáljához:

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{belső}} = -A_i(x_i)x_i, \quad A_i(x_i) > 0.$$

A modellek többségében A_i konstans. A továbbiakban mi is ezt feltételezzük. Feltéve, hogy a serkentő szinapszisok hatása arányos a jel frekvenciájával, a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{serk}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Z_{ki} S_{ki},$$

ahol S_{ki} v_k és v_i szinapsziséjánál v_k axonjában jelentkező jel átlagos frekvenciáját jelöli, mely függ a jel v_k -tól v_i -ig terjedésének τ_{ki} idejétől, valamint egy Γ_k küszöbértéktől a következők szerint:

$$S_{ki} = f_k(x_k(t - \tau_{ki}) - \Gamma_k),$$

ahol $f_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ adott nemnegatív függvény v_k jelátviteli függvénye. Hasonlóan:

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{\text{gátló}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n c_{ki} f_k(x_k(t - \tau_{ki}) - \Gamma_k),$$

ahol $c_{ki} \geq 0$ konstansok. A fent leírtak szerint és bevezetve $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ jelölést, (1.1)-ből a következő késleltetett differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{x}_i = -A_i x_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ki} f_k(x_k(t - \tau_{ki}) - \Gamma_k) + I_i(t), \quad (1.2)$$

ahol $a_{ki} \in \mathbb{R}$ konstansok, és $I_i(t)$ jelöli a neuronhálózaton kívülről v_i -be érkező külső ingert, mely függhet az időtől. Ha $a_{ki} > 0$, akkor azt mondjuk, hogy a v_k és v_i közötti kapcsolat serkentő, míg $a_{ki} < 0$ esetén gátló kapcsolatról beszélünk, a_{ki} nagysága pedig a kapcsolat erősségét írja le.

A különböző modellekben különböző jelátviteli függvények lehetnek (lásd az 1.2 és 1.3 ábrákat). A leggyakrabban használt jelátviteli függvények a következők:

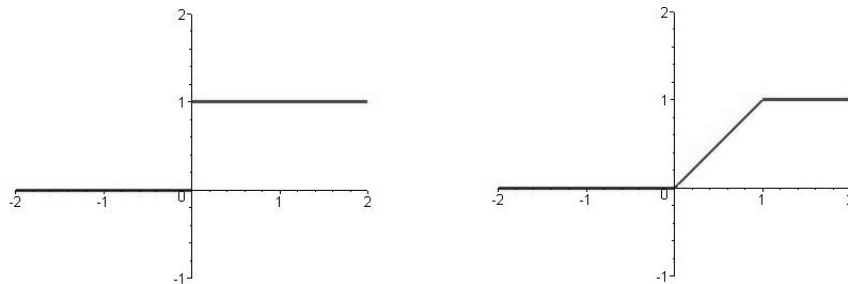
- lépcsős függvény,
- szakaszonként lineáris függvény,
- szigmoid függvény.

A lépcsős függvényt legtöbbször a következőképp definiálják:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

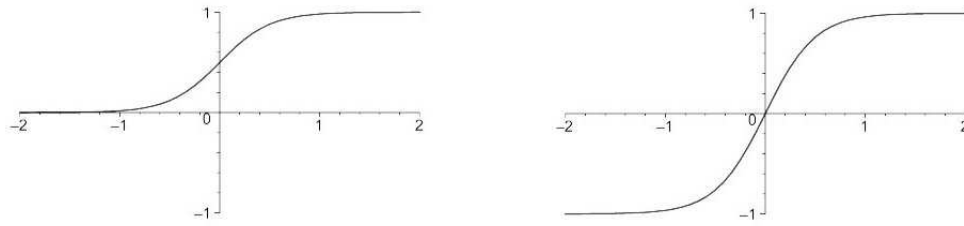
A szakaszonként lineáris függvényt általában az alábbi módon definiálják:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \beta x & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{\beta}, \\ 1 & \text{ha } x \geq \frac{1}{\beta}. \end{cases}$$



1.2. ábra. Egy lépcsős és egy szakaszonként lineáris függvény.

Simaságuk miatt a szigmoid függvények messze a legelterjedtebbek a jelátviteli függvények modellezésében, ezek közt is leggyakrabban használatosak az $f(x) = \frac{1}{1+e^{-4\beta x}}$ vagy ennek az eltoltjaként kapható – páratlan – tangens hiperbolikus függvény, illetve az inverz tangens típusú függvények. Vegyük észre, hogy $\beta \rightarrow \infty$ esetén a fent említett szigmoid- és szakaszonként lineáris függvények lépcsős függvényekhez tartanak.



1.3. ábra. Az $\frac{1}{1+e^{-4x}}$ és a $\tanh(2x)$ függvények.

1.3. A késleltetés szükségessége

Minden neuronhálózatban jelen van a késleltetés, hiszen az inger csak véges sebességgel terjedhet, ez azonban a legtöbb esetben sokkal bonyolultabb modellt eredményez, mintha ezt a paramétert elhanyagolnánk, így felvetődik a kérdés, hogy érdemes-e figyelembe venni a késleltetést, vagyis megváltoztatja-e lényegesen a megoldások dinamikáját? A válasz függ a konkrét modelltől is. Definiáljunk néhány speciális tulajdonságú hálózatot, melyek például fognak szolgálni késleltetéstől független jelenségekre.

1.1. Definíció. Tekintsük az (1.2) egyenletrendszer által modellezett neuronhálózatot. Tegyük fel, hogy $\forall i$ -re f_i Lipschitz-folytonos egy alkalmas L_i konstanssal, $f_i(0) = 0$, $\Gamma_i = 0$, továbbá I_i konstans. Ha

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{L_i}{A_i} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1,$$

akkor azt mondjuk, hogy a neuronhálózat kontraktív.

Megjegyezzük, hogy ha a jelátviteli függvények tangens hiperbolikus vagy arcus tangens típusúak, akkor $f_i(0) = 0$ és a Lipschitz tulajdonság is teljesül $f'_i(0)$ konstanssal.

1.2. Definíció. Egy neuronhálózat irreducibilis, ha bármely neuronból bármely másikba létezik irányított út a kapcsolatok mentén.

1.3. Definíció. Egy hálózatot kooperatívnak nevezünk, ha – a változók esetleges transzformálása után – minden kapcsolat serkentő.

A következő tétel bizonyítása megtalálható Gopalsamy és He [3] cikkében.

1.4. Tétel. Tegyük fel, hogy az (1.2) egyenletű hálózat kontraktív. Ekkor létezik pontosan egy $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$, hogy (1.2) bármely megoldására $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_i^*$, $1 \leq i \leq n$.

Vegyük észre, hogy a tételben nincs semmilyen megkötés a késleltetésre, valamint hogy egy egyenletnek pontosan ugyanazok az egyensúlyi helyzetei akár van benne késleltetés, akár nincs, így az előző tétel szerint kontrakatív hálózatok esetén a megoldások aszimptotikus viselkedése nem változik a késleltetés bevezetésével. Hasonló állítás igaz [15] szerint kooperatív, irreducibilis hálózatokra is:

1.5. Állítás. *Ha az (1.2) egyenletű hálózat kooperatív, irreducibilis, a jelátviteli függvények korlátosak, folytonosan differenciálhatóak és szigorúan monoton növeők valamint $\tau_{ji} = \tau_j$ (vagyis a késleltetés csak a jelet kibocsátó sejttől függ), akkor a késleltetés nem változtatja meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását. Speciálisan, ha egyetlen egyensúlyi helyzet van, akkor ez globálisan attraktív.*

Most következzen néhány példa olyan jelenségekre, amiket a késleltetés idézhet elő. Ezekről bővebben olvashatunk Wu [20] könyvében.

- *Késleltetés-indukált periodikus oszcilláció.* Ismert, hogy a késleltetés bevezetésének hatására az addig stabil egyensúlyi helyzetek instabillá válhatnak és stabil periodikus oszcillációk keletkezhetnek. Ennek a jelenségnek szükséges feltétele, hogy legyen olyan sejt, melybe létezik olyan irányított kör a kapcsolatok mentén, hogy a körön páratlan sok gátló kapcsolat van.
- *Oszcilláció megszűnése késleltetés hatására.* A fent említett jelenség fordítottja is előfordulhat. A késleltetés hatására egy egyensúlyi helyzet stabilizálódhat és a körülötte lévő periodikus pálya megszűnhet.
- *Késleltetés-indukált kaotikus oszcilláció.* Ki kell emelni, hogy a késleltetésnek köszönhető oszcilláció nem feltétlenül periodikus, sőt, akár már két neuron esetén is tapasztalható késleltetés-indukált káosz.
- *Késleltetés-indukált ideiglenes oszcilláció* Numerikus eredmények azt mutatják, hogy ideiglenes oszcilláció előfordulhat olyan hálózatokban is a késleltetés hatására, melyben a késleltetés-indukált instabilitás kizárt. Ilyen jelenségre találtak példákat kooperatív, irreducibilis hálózatok esetén is, ahol az aszimptotikus viselkedés független a késleltetéstől. Az oszcilláció időtartama exponenciálisan nőhet a késleltetés növelésével, így olyan hosszan tarthatnak, hogy gyakorlati szempontból nem különböztethetők meg a tartós oszcillációktól.

2. fejezet

Az alapegyenlet

2.1. Az egyenlet és ekvivalens alakjai

Vizsgálatom tárgya egy $n + 1$ idegsejtből álló egyirányú lánc lesz, melyet a következő késleltetett differenciálegyenlettel modellezünk:

$$\dot{x}_i = -x_i + f_i(x_{i+1}(t - \tau_i)) \quad 0 \leq i \leq n, \quad (2.1)$$

(az indexek mod $n + 1$ értendők)

ahol $\forall i$ -re $\tau_i \geq 0$, valamint $f_i \in P_+ \cup P_-$, ahol $f \in P_- \iff -f \in P_+$ és $f \in P_+$ pontosan akkor, ha a következő tulajdonságokat teljesíti:

- (H1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható,
- (H2) $\exists M_f > 0$ úgy, hogy $|f(\xi)| < M_f$ bármely $\xi \in \mathbb{R}$ esetén,
- (H3) $f(0) = 0$,
- (H4) $f'(\xi) > 0$ bármely $\xi \in \mathbb{R}$ esetén,
- (H5) $\xi f''(\xi) < 0$ bármely $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$ esetén.

Megjegyezzük, hogy az oly sokszor használt tangens hiperbolikus függvény nyújtásaival nyerhető függvények is a fent említett két függvényosztályból valók. Pontosabban $a > 0$ konstans esetén, ha $b > 0$ ($b < 0$) konstans, akkor $b \tanh(ax) \in P_+$ (P_-).

Vegyük észre, hogy a (2.1) modellben $f'_i(0)$ nagysága írja le a kapcsolat erősségét, valamint ha előjele pozitív, akkor a kapcsolat serkentő, ha negatív, akkor gátló. Érdeemes még megemlíteni, hogy (2.1) egyenletben (1.2)-vel ellentétben – az egyszerűbb felírás érdekében – itt f_i az $(i + 1)$ -edik neuron jelátviteli függvényét jelenti (hiszen f_i kizárólag az i -edik egyenletben szerepel).

Vezessük be a következő változókat: $y_0(t) = x_0(t)$, $y_i(t) = x_i\left(t - \sum_{j=1}^i \tau_j\right)$, ha $1 \leq i \leq n$. Ekkor (2.1) a következő alakra írható át:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= -y_0 + f_0(y_1), \\ \dot{y}_1 &= -y_1 + f_1(y_2), \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-1} &= -y_{n-1} + f_{n-1}(y_n), \\ \dot{y}_n &= -y_n + f_n(y_0(t - \tau)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

ahol $\tau = \sum_{j=0}^n \tau_j$.

Legyen $\delta_i \in \{-1, 1\}$ olyan, hogy bármely $0 \leq i \leq n$ esetén $(\delta_i f_i) \in P_+$ teljesüljön, továbbá legyen $\sigma_0 = 1$, $\sigma_i = \prod_{j=0}^{i-1} \delta_j$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy a $z_i = \sigma_i y_i$, $g_i(\xi) = \sigma_i f_i(\sigma_{i+1} \xi)$ transzformációval, majd az idő átskálázásával (2.2) a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= -\tau z_0 + \tau g_0(z_1), \\ \dot{z}_1 &= -\tau z_1 + \tau g_1(z_2), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= -\tau z_{n-1} + \tau g_{n-1}(z_n), \\ \dot{z}_n &= -\tau z_n + \tau g_n(z_0(t - 1)), \end{aligned} \tag{2.3}$$

ahol $g_i \in P_+$ bármely $0 \leq i \leq n - 1$ esetén, és $g_n \in P_+ \cup P_-$, pontosabban $g_n \in P_+$, ha páros sok $0 \leq i \leq n$ van, hogy $f_i \in P_-$ és $g_n \in P_-$, ha páratlan sok $0 \leq i \leq n$ van, hogy $f_i \in P_-$. Ennek megfelelően az előbbi esetben azt mondjuk, hogy a hálózat pozitív visszacsatolású, az utóbbi esetben pedig negatív visszacsatolású.

Legyen $C_{\tau_0, \dots, \tau_n} = C(\times_{i=0}^n [-\tau_i, 0]; \mathbb{R}^{n+1})$ folytonos függvények Banach tere a

$$\|\varphi\| = \max_i \left\{ \sup_{\theta \in [-\tau_i, 0]} |\varphi_i(\theta)| \right\}, \varphi \in C_{\tau_0, \dots, \tau_n}$$

normával.

Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $x = (x_0, \dots, x_n)^T : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ függvény megoldása a (2.1) egyenletnek a $[t_0, \infty)$ intervallumon, ha $x_i : (t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható és $x_i : [t_0 - \tau_i, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos minden $0 \leq i \leq n$ esetén, valamint x kielégíti a (2.1) egyenletrendszert minden $t > t_0$ esetén.

Legyen továbbá $\mathbb{K}_\tau = [-\tau, 0] \cup \{1, \dots, n\}$, valamint

$$C_\tau = C(\mathbb{K}_\tau) = \{\varphi : \mathbb{K}_\tau \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonos}\}.$$

Ekkor C_τ Banach-tér a szuprémumnormával, vagyis

$$\|\varphi\| = \sup_{\xi \in \mathbb{K}_\tau} |\varphi(\xi)| = \max \left\{ \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} |\varphi(\theta)|, \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi(i)| \right\}, \varphi \in C_\tau.$$

$t_0 \in \mathbb{R}$ esetén azt mondjuk, hogy (2.2) egyenletrendszer megoldása $y = (y_0, \dots, y_n)^T$ függvény a $[t_0 - \tau, \infty)$ intervallumon, ha $y_0 : [t_0 - \tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, valamint $y_i : (t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatóak minden $0 \leq i \leq n$ esetén és y kielégíti a (2.2) egyenletrendszert. Az előző definíciókban τ helyére 1-et írva nyerjük $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1$ és $C = C(\mathbb{K})$ definícióját, majd az előzőek szerint definiáljuk a (2.3) egyenletrendszer megoldását egy tetszőleges $[t_0 - 1, \infty)$ intervallumra. Természetesen ugyanilyen módon definiáljuk, hogy mit értünk megoldásokon egy tetszőleges legalább egységnyi hosszúságú intervallumon.

Vegyük észre, hogy a (2.1), (2.2) és (2.3) egyenletrendszerek közötti fent leírt transzformációk ezek megoldásai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adnak, továbbá az is látható, hogy e három egyenletrendszer konvergencia tulajdonságai azonosak, így az egymásnak megfeleltetett megoldások stabilitása is azonos. Speciálisan a konstans megoldások közt is kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható, és ezek stabilitási tulajdonságai is szükségképpen megegyeznek. Ezek után a három modell közül mindig azzal fogunk dolgozni, amelyik az adott problémára legalkalmasabb.

2.2. A megoldások létezése és egyértelmősége

2.1. Állítás. *Tetszőleges $\varphi \in C$ -hez létezik egyértelmű módon $z : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ függvény, hogy z megoldása (2.3)-nak a $[-1, \infty)$ intervallumon és $z_0(\xi) = \varphi(\xi)$ fennáll $\forall \xi \in [-1, 0]$ esetén, valamint $z_i(0) = \varphi(i) \forall 1 \leq i \leq n$. Ez a φ kezdeti függvényhez tartozó megoldás, melynek jele z^φ .*

Bizonyítás. A bizonyítás az úgynevezett lépések módszerének segítségével fog történni. Legyen $z_0(t) = \varphi(t) \forall t \in [-1, 0]$ -ra, valamint $z_i(0) = \varphi(i) \forall 1 \leq i \leq n$. Ekkor (2.3) és a konstansvariációs formula alapján z pontosan akkor megoldás a $[-1, 1]$ intervallumon, ha $\forall t \in [0, 1]$ -re teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} z_0(t) &= e^{-\tau t} z_0(0) + \int_0^t e^{-\tau(t-s)} \tau g_0(z_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ z_{n-1}(t) &= e^{-\tau t} z_{n-1}(0) + \int_0^t e^{-\tau(t-s)} \tau g_{n-1}(z_n(s)) ds, \\ z_n(t) &= e^{-\tau t} z_n(0) + \int_0^t e^{-\tau(t-s)} \tau g_n(z_0(s-1)) ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mivel $z_0(t)$ ismert minden $t \in [-1,0]$ -ra, így (2.4) utolsó egyenlete szerint g_n folytonosságát kihasználva megkaphatjuk $z_n(t)$ értékét bármely $t \in [0,1]$ -re. A láncon tovább haladva megkapjuk $z_{n-1}(t), \dots, z_0(t)$ értékeit minden $t \in [0,1]$ -re. (2.4) garantálja z egyértelműségét is $[0,1]$ -en. Ezek után teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy z megoldás $[-1, k]$ intervallumon, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ekkor ismét a konstansvariációs formula és (2.3) alapján z pontosan akkor megoldás $[-1, k+1]$ intervallumon, ha teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} z_0(t) &= e^{-\tau(t-k)} z_0(k) + \int_k^t e^{-\tau(t-s)} \tau g_0(z_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ z_{n-1}(t) &= e^{-\tau(t-k)} z_{n-1}(k) + \int_k^t e^{-\tau(t-s)} \tau g_{n-1}(z_n(s)) ds, \\ z_n(t) &= e^{-\tau(t-k)} z_n(k) + \int_k^t e^{-\tau(t-s)} \tau g_n(z_0(s-1)) ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ekkor ez előbbi logikával (2.5) segítségével egyértelműen megadható $z(t)$ minden $t \in [k, k+1]$ esetén, hogy z megoldás legyen $[-1, k+1]$ intervallumon. Ezzel az állítást beláttuk. \square

2.2. Állítás. *A (2.3) egyenletrendszer minden megoldása korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy z megoldása (2.3)-nak egy I intervallumon és nem korlátos. Ekkor $\exists i : 0 \leq i \leq n$, hogy z_i nem korlátos. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $i = 0$ és hogy z_0 felülről nem korlátos (a többi eset ugyanígy bizonyítható). Legyen

$$t_0 = \inf I, m = \sup_{t \leq t_0+1} z_0(t) \text{ és } M = \max\{m, M_{g_0}\}.$$

Emlékezzünk vissza, hogy M_{g_0} konstans szigorú felső korlátja $|g_0|$ -nak, így M is az. Ekkor létezik $t_1 \in I$, hogy $z_0(t_1) = M$ és $\dot{z}_0(t_1) \geq 0$. Ugyanakkor M definíciója és (2.3) miatt igaz, hogy $\dot{z}_0(t_1) = -M + g_0(z_1(t_1)) < 0$, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás igazolja az állításunkat. \square

A (2.3) egyenletrendszernek z megoldása \mathbb{R} -en, ha minden $t_0 \in \mathbb{R}$ -re z megoldás $[t_0, \infty)$ intervallumon. Amint azt láttuk adott kezdeti függvény esetén a pozitív félegyenesen egyértelműen létezik megoldás. A teljes számegyenesen nem mindig létezik megoldás, azonban ha létezik, akkor a jelátviteli függvények monotonitása miatt az egyértelmű. Vezessük be a következő jelölést: ha z megoldása (2.3)-nak egy intervallumon, akkor

$z^t \in C$ legyen a következőképp definiálva:

$$z^t(\theta) = \begin{cases} z_0(t + \theta) & \text{ha } \theta \in [-1, 0], \\ z_\theta(t) & \text{ha } \theta \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

ahol ez értelmes. Definiáljuk a következő leképezést: $\Phi : \mathbb{R}^+ \times C \rightarrow C, (t, \varphi) \mapsto z^{\varphi t}$. Ez egy folytonos szemidinamikus rendszer. A jelátviteli függvények monotonitása miatt minden $t \geq 0$ -ra a $\Phi(t, \cdot) : C \rightarrow C$ függvény injektív. Definiáljuk $\varphi \in C$ ω -határhalmazát a következőképp:

$$\omega(\varphi) = \{\psi \in C : \exists (t_k)_0^\infty \subset [0, \infty), \text{ hogy } t_k \rightarrow \infty \text{ és } \Phi(t_k, \varphi) \rightarrow \psi, \text{ amint } k \rightarrow \infty\}.$$

Ha létezik $z : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ megoldás, melyre $z^0 = \varphi$, akkor hasonló módon definiáljuk φ α -határhalmazát is:

$$\alpha(\varphi) = \{\psi \in C : \exists (t_k)_0^\infty \subset (-\infty, 0], \text{ hogy } t_k \rightarrow -\infty \text{ és } z^{t_k} \rightarrow \psi, \text{ amint } k \rightarrow \infty\}.$$

3. fejezet

A megoldás dinamikája egy sejt esetén

Ebben a fejezetben Krisztin összefoglaló [7] cikke alapján áttekintjük az eddigi legfontosabb eredményeket arról az esetről, amikor a hálózat egyetlen sejtből áll. Látni fogjuk, hogy e látszólag egyszerű modell is milyen gazdag dinamikával bír, és hogy a teljes dinamika csak néhány, speciális tulajdonságokkal rendelkező visszacsatolási függvény esetén ismert. Megjegyezzük, hogy a – neuronhálózatokban leggyakrabban használt – szigmoid függvények rendelkeznek ezekkel a tulajdonságokkal. Tekintsük tehát a következő egyenletet:

$$\dot{x} = -\mu x(t) + g(x(t-1)) \quad (3.1)$$

ahol $\mu \geq 0$, valamint g folytonosan differenciálható, nemlineáris valós függvény, melyre $g(0) = 0$, továbbá g szigorúan monoton. Jegyezzük meg, hogy ha $g \in P_{\pm}$, akkor (3.1) megegyezik a (2.3) egyenletrendszer $n = 0$ esetével, hiszen $h(x) = \frac{1}{\mu}g(x)$ választással h megőrzi a P_{\pm} -beli tulajdonságokat és az egyenlet a kívánt alakba kerül. Ekkor a C fázistér a $[-1,0]$ intervallumon folytonos valós függvények Banach-tere a maximum-normával. Ahogy az előző fejezetben láthattuk, bármely $\varphi \in C$ függvényhez létezik pontosan egy x^{φ} megoldás $[-1, \infty)$ intervallumon, így az eddigi jelöléseket megtartva Φ egy folytonos szemidynamikus rendszer.

3.1. Definíció. *A Φ szemidynamikus rendszer globális attraktora egy olyan nemüres, kompakt $A \subset C$ halmaz, mely invariáns abban az értelemben, hogy $\Phi(t, A) = A$ bármely $t \geq 0$ esetén és bármely $B \subset C$ korlátos illetve $U \supset A$ nyitott halmazok esetén létezik $t_1 \geq 0$, hogy $\Phi([t_1, \infty) \times B) \subset U$.*

A globális attraktor nem mindig létezik, de például

$$\mu > 0 \text{ és } \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left| \frac{g(x)}{x} \right| < \mu$$

egy elegendő feltételt ad létezésére. Láthatjuk, hogy amennyiben létezik A attraktor, akkor ennek tulajdonságai leírják, hogy a rendszer hosszú távon hogy viselkedhet, hiszen $t \rightarrow \infty$ esetén minden megoldást magához vonz, igaz A alakja arról nem árulkodik, hogy mely kezdeti függvény esetén melyik részéhez fog konvergálni a megoldás. Ismert, hogy ha A létezik, akkor

$$A = \{\varphi \in C : \exists x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ korlátos megoldása (3.1)-nek, hogy } x^0 = \varphi\}$$

Jegyezzük meg, hogy a dinamika leírásában fontos szerepet betöltő egyensúlyi helyzetei és periodikus pályái Φ -nek A részét képezik és egyensúlyi helyzetek csak a fázistérbeli konstans függvények lehetnek. Az azonosan 0 függvény mindig egyensúlyi helyzete (3.1) egyenletnek. A (3.1) egyenlet linearizáltja ebben az egyensúlyi helyzetben:

$$\dot{y}(t) = -\mu y(t) + \alpha y(t-1), \quad (3.2)$$

ahol $\alpha = g'(0)$. Jelölje $y^\psi : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a ψ kezdeti függvényhez tartozó egyetlen megoldását (3.2)-nek. Ekkor $D_2\Phi(t,0)\psi = y^{\psi t}, t \geq 0$. $D_2\Phi(t,0), t \geq 0$ C_0 -félcsoport generátorának spektruma azon $\lambda \in \mathbb{C}$ komplex számokból áll, melyek a

$$\lambda + \mu - \alpha e^{-\lambda} = 0 \quad (3.3)$$

karakterisztikus egyenlet gyökei, melyeket karakterisztikus gyököknek nevezünk. Ezt az egyenletet úgy kapjuk, hogy a megoldást $e^{\lambda t}$ alakban keressük. $\alpha > 0$ esetén van pontosan egy valós gyök (λ_0), a többi gyök pedig $(\lambda_j, \overline{\lambda_j})_1^\infty$ komplex konjugált párokat alkot és a következőképp helyezkednek el a komplex síkon:

$$\lambda_0 > \text{Re}\lambda_1 > \text{Re}\lambda_2 > \dots, \quad 2(j-1)\pi < \text{Im}\lambda_j < 2j\pi,$$

ahol $j \in \mathbb{N}$, és $\text{Re}\lambda_j \rightarrow -\infty$ [1]. $\lambda_0 > 0$ pontosan akkor, ha $\alpha > \mu$ teljesül, így $\alpha > 0$ esetén a (3.1) egyenlet konstans 0 megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha $\alpha > \mu$ és instabil, ha $\alpha < \mu$.

Ha $\alpha < 0$ és $\alpha < -e^{-\mu-1}$, akkor az összes gyök $(\lambda_j, \overline{\lambda_j})_1^\infty$ komplex konjugált párokban jelentkezik és a következő relációk állnak fenn köztük:

$$\text{Re}\lambda_1 > \text{Re}\lambda_2 > \dots, \quad 2(j-1)\pi < \text{Im}\lambda_j < (2j+1)\pi,$$

ahol $j \in \mathbb{N}$ és $\text{Re}\lambda_j \rightarrow -\infty$ [1].

A továbbiakban mind a pozitív, mind a negatív visszacsatolású esetben tegyük fel, hogy létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\text{Re}\lambda_{N+1} \leq 0 < \text{Re}\lambda_N. \quad (3.4)$$

Explicit feltételek adhatók μ és α függvényében arra, hogy (3.4) pontosan mikor teljesül: jelölje θ_j^+ a $\theta = -\mu \tan \theta$ egyenlet egyetlen megoldását a $(2j\pi - \frac{\pi}{2}, 2j\pi)$ intervallumon, valamint θ_j^- a $\mu = -\theta \cot \theta$ egyenlet egyedüli megoldását a $(2j\pi, 2(j+1)\pi)$ intervallumon. Ekkor (3.4) egyenlőtlenséggel ekvivalens $\alpha > 0$ esetén a

$$\frac{\mu}{\cos \theta_N^+} \leq \alpha < \frac{\mu}{\cos \theta_{N+1}^+},$$

$\alpha < 0$ esetén pedig

$$-\frac{\mu}{\sin \theta_{N+1}^-} \leq \alpha < -\frac{\mu}{\sin \theta_N^-}$$

egyenlőtlenség. A megoldások oszcillálásának gyakorisága fontos szerepet játszik a megoldások dinamikájának elemzésében, így $\varphi \in C$ esetén jelölje $sc(\varphi) \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ φ előjelváltásainak számát, továbbá legyen $V^\pm : C \setminus \{0\} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a következőképp definiálva: ha $sc(\varphi)$ páratlan, akkor $V^+(\varphi) = sc(\varphi) + 1$, ha $sc(\varphi)$ páros, akkor $V^-(\varphi) = sc(\varphi) + 1$, a többi esetben pedig $V^\pm(\varphi) = sc(\varphi)$. A pozitív visszacsatolás esetén V^+ , míg negatív visszacsatolás esetén V^- a (3.1) egyenlet diszkrét Ljapunov funkcionálja, azaz a megoldások mentén nem növekvő, nemnegatív egész értékű függvény [11].

Ha $k \in \{1, \dots, N\}$, akkor P_k legyen $\alpha > 0$ esetén a $\{\lambda_0, \lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}\}$ sajátértékekhez tartozó valós általánosított sajátter, $\alpha < 0$ esetén pedig a $\{\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}\}$ sajátértékekhez tartozó valós általánosított sajátter, Q_k pedig jelölje a $(\lambda_i, \overline{\lambda_i})_{i=k+1}^\infty$ sajátértékekhez tartozó általánosított sajátteret. Ezzel adódik a $C = P_k \oplus Q_k$ felbontás, melyre $\dim P_k = 2k + 1$, ha $\alpha > 0$ és $\dim P_k = 2k$, ha $\alpha < 0$.

Létezik egy C^1 -sima 0-ban lokálisan instabil $W_{k,lok}^u(0)$ sokaság, melyet a 0-ban érint P_k sajátter, továbbá $W_{k,lok}^u(0)$ olyan $(-\infty, 0]$ intervallumon értelmezett megoldásszegmensekből áll, melyek exponenciális sebességgel tartanak 0-hoz, amint $t \rightarrow -\infty$ [9]. Ezen megoldások pozitív félegyenesen való folytatásával kapjuk W_k definícióját:

$$W_k = \Phi([0, \infty) \times W_{k,lok}^u(0)).$$

Mostantól a pozitív és a negatív visszacsatolású eset megkülönböztetésére használjuk a W_k^\pm , illetve az A^\pm jelöléseket, amennyiben a két eset különbözik.

Ha A globális attraktor létezik, akkor $\overline{W_k} \subset A$ teljesül, ezért A^\pm vizsgálatának első lépése lehet $\overline{W_k}^\pm$ vizsgálata, annál is inkább, hogy egyes visszacsatolási függvények esetén bizonyított (például arra az esetre, ha $g \in P_\pm$), hogy $\overline{W_k}^\pm$ egybeesik a megfelelő globális attraktorról. Továbbiakban a pozitív visszacsatolású esetre tegyük fel, hogy $\frac{g(x)}{x} < \mu$ minden elég nagy $|x|$ esetén teljesül, valamint a negatív visszacsatolás esetén $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) < \infty$, illetve $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) > -\infty$ valamelyike teljesül.

A V^\pm diszkrét Ljapunov funkcionálok segítségével Mallet-Paret és Sell [12] bizonyított egy Poincaré-Bendixson típusú tételt, melyet az ötödik fejezetben általános formában ismertetünk.

A $k = 1$ esetben sok minden ismert $\overline{W_1^\pm}$ -ről. Walther a [16] cikkben bizonyította, hogy $\overline{W_1^-}$ egy 2-dimenziós C^1 -sima, korlátos részsokasága C -nek és homeomorf a zárt egységkörlappal, $\overline{W_1^-} \setminus W_1^-$ pedig egy lassan oszcilláló periodikus pályája (3.1)-nek, ahol lassú oszcilláció alatt azt értjük, hogy bármely két z_0, z_1 zérushelyére $|z_0 - z_1| > 1$ teljesül.

Definiáljuk a következő halmazt:

$$W_{so} = \{\varphi \in C : \text{Létezik korlátos, lassan oszcilláló } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{megoldása (3.1)-nek, hogy } x^0 = \varphi\} \cup \{0\}.$$

Mallet-Paret és Walther bizonyította, hogy W_{so}^- C -nek egy sűrű, nyitott halmazát vonzza [13]. Walther és Yebdri [17, 18] bizonyították, hogy létezik $a : \text{dom}(a) \rightarrow Q_1$ C_1 -leképezés, ahol $\text{dom}(a) \subset P_1$, hogy $W_{so}^- = \{\varphi + a(\varphi) : \varphi \in \text{dom}(a)\}$, és $\text{dom}(a)$ homeomorf a kétdimenziós egységkörlappal, ha $W_{so}^- \neq \{0\}$, továbbá $\overline{W_{so}^-} \setminus W_{so}^-$ egy lassan oszcilláló periodikus pálya. Lehetnek más lassan oszcilláló periodikus pályák is W_{so}^- -ban. Ekkor a 0 egyensúlyi helyzet a periodikus pályák belsejében van. W_{so}^- 0 egyensúlyi helyzettől különböző nemperiodikus pályái pedig heteroklinikus pályákat alkotnak a periodikus pályák közt, illetve a periodikus pályák és az egyensúlyi helyzet között.

A pozitív visszacsatolás esetén, ha továbbra is feltesszük, hogy van pozitív valósrészű sajátérték, akkor létezik egy legkisebb pozitív x^+ konstans és egy legnagyobb negatív x^- konstans, hogy $C \ni e^\pm(s) = x^\pm$ egyensúlyi helyzetek. Ha $g'(x^\pm) > \mu$, akkor e^+ és e^- hiperbolikusak. Ekkor $\overline{W_1^+}$ 3 egyensúlyi helyzetből és egyetlen periodikus pályából (O_1) áll, homeomorf a 3-dimenziós egységgömbbel, valamint, hogy $\overline{W_1^+} \setminus W_1^+$ homeomorf a 3-dimenziós gömbhéjjal. W_1^+ egy 3-dimenziós C^1 -sima részsokasága a fázistérnek, $\overline{W_1^+} \setminus (W_1^+ \cup e^+ \cup e^-)$ pedig egy 2-dimenziós C^1 -sima részsokasága $\overline{W_1^+}$ -nak. Ez utóbbi tartalmazza O_1 -et és heteroklinikus pályákat O_1 és e^\pm között. Létezik egy 2-dimenziós sima körlap, melyet O_1 határol $\overline{W_1^+}$ -ban. Ez a körlap tartalmazza a 0 egyensúlyi helyzetet, O_1 -et és heteroklinikus pályákat 0 és O_1 között, továbbá két részre vágja $\overline{W_1^+}$ -at, melynek egyik részén e^+ , másikon e^- attraktív [9].

Az általános eset jellemzése részletesen megtalálható a [8] cikkben. $\overline{W_k^-}$ a 0 egyensúlyi helyzetből, pontosan k darab periodikus pályából (O_1, \dots, O_k) és heteroklinikus pályákból áll. A pontosabb leíráshoz vezessük be a következő jelöléseket:

$$C_j^0 = \{\varphi \in \overline{W_k^-} : \text{Létezik (3.1)-nek } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{megoldása, hogy } x^0 = \varphi, \alpha(x) = \{0\}, \omega(\varphi) = O_j\}, \quad (3.5)$$

$$C_j^l = \{\varphi \in \overline{W_k^-} : \text{Létezik (3.1)-nek } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ megoldása, hogy } x^0 = \varphi, \alpha(x) = O_j, \omega(\varphi) = O_l\} \quad (3.6)$$

minden $j, l \in \{1, \dots, k\}$ esetén. Ekkor

$$\overline{W_k^-} = \{0\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^k O_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k C_j^0 \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq l < j \leq k} C_l^j \right).$$

[8] azt is megmutatta, hogy $O_j \in (V^-)^{-1}(2j-1)$, vagyis O_j egységnyi szegmensenként $(2j-2)$ -ször vagy $(2j-1)$ -szer vált előjelet.

$\overline{W_k^+}$ tartalmazza a $0, e^+, e^-$ egyensúlyi helyzeteket, valamint pontosan k darab periodikus pályát, valamint heteroklinikus pályákat. Definiáljuk az előző esethez analóg módon C_j^0 és C_l^j halmazokat. Ezeken kívül definiáljuk még a következőket:

$$C_{\pm}^0 = \{\varphi \in \overline{W_k^+} : \text{Létezik (3.1)-nek } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ megoldása, hogy } x^0 = \varphi, \alpha(x) = \{0\}, \omega(\varphi) = \{e^{\pm}\}\}, \quad (3.7)$$

$$C_{\pm}^j = \{\varphi \in \overline{W_k^+} : \text{Létezik (3.1)-nek } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ megoldása, hogy } x^0 = \varphi, \alpha(x) = O_j, \omega(\varphi) = \{e^{\pm}\}\}, \quad (3.8)$$

minden $j \in \{1, \dots, k\}$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} \overline{W_k^+} = & \{0, e^-, e^+\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^k O_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k C_j^0 \right) \cup C_-^0 \cup C_+^0 \\ & \cup \left(\bigcup_{1 \leq l < j \leq k} C_l^j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k C_-^j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^k C_+^j \right). \end{aligned}$$

Ebben az esetben $O_j \subset (V^-)^{-1}(2j)$ teljesül, vagyis O_j egységnyi szegmensein az előjelváltások száma $(2j-1)$ vagy $(2j)$. Az előzőekben adott jellemzés $\overline{W_k^{\pm}}$ -nak egy úgynevezett Morse-felbontását adja. Ismét kiemeljük, hogy a neuronhálózatokban gyakori szigmoid visszacsatolási függvények esetén $\overline{W_N} = A$, tehát ekkor a globális attraktor egy Morse-felbontását nyerjük.

4. fejezet

A karakterisztikus egyenlet vizsgálata

Ebben a fejezetben az alapegyenletet a (2.2) alakjában fogjuk tekinteni. Azt fogjuk vizsgálni, hogy hogyan változik az *egyensúlyi helyzetek száma és stabilitása* a kapcsolaterősségek függvényében és rögzített késleltetés esetén. Látni fogjuk, hogy az előbbieket csak a kapcsolaterősségek *szorzatától* függnek és hogy mind pozitív, mind negatív visszacsatolás esetén a (2.2) egyenlet azonosan 0 megoldásának létezik egy aszimptotikusan stabil és egy instabil tartománya erre a paraméterre, rögzített késleltetés mellett. Jellemzést adunk majd a karakterisztikus gyökök elhelyezkedéséről is.

4.1. Az egyensúlyi helyzetek

Egyszerű észrevétel, hogy egyensúlyi helyzet csak konstans megoldás lehet. Így az $y(t) = y^*$, $y^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ pontosan akkor egyensúlyi helyzete (2.2)-nek, ha teljesül a következő egyenletrendszer

$$\begin{aligned} y_0^* &= f_0(y_1^*), \\ &\vdots \\ y_{n-1}^* &= f_{n-1}(y_n^*), \\ y_n^* &= f_n(y_0^*). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Vegyük észre, hogy (4.1) ekvivalens

$$y_0^* = f_0(f_1(\dots(f_n(y_0^*)))) \tag{4.2}$$

egyenlettel.

4.1. Lemma. *Tetszőleges $f_+, g_+ \in P_+$ és $f_-, g_- \in P_-$ függvényekre teljesül, hogy*

$$(f_+ \circ g_+), (f_- \circ g_-) \in P_+, \text{ valamint } (f_- \circ g_+), (f_+ \circ g_-) \in P_-$$

Bizonyítás. A négy közül csak az egyik esetet bizonyítjuk, a többi eset is könnyen ellenőrizhető. Tekintsük tehát az $(f^+ \circ g^-)$ függvényt. Ekkor f^+ és g^- kétszer folytonosan differenciálhatóságából következik a kompozíció kétszer folytonos differenciálhatósága is. Mivel f_+ korlátos, így az összetett függvény is az. $f_+(0) = 0$ és $g_-(0) = 0$ következménye, hogy $f_+(g_-(0)) = 0$.

$[f_+(g_-(x))]'$ = $f'_+(g_-(x)) \cdot g'_-(x) < 0$ teljesül, hiszen az első szorzótényező pozitív, a második pedig negatív. Vizsgáljuk most a második derivált előjelét

$$[f_+(g_-(x))]'' = f''_+(g_-(x)) \cdot [g'_-(x)]^2 + f'_+(g_-(x)) \cdot g''_-(x).$$

$[g'_-(x)]^2 > 0$ és $f'_+(g_-(x)) > 0$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ha $x > 0$, akkor $g''_-(x) > 0$, valamint $g_-(x) < 0$, így $f''_+(g_-(x)) > 0$. Ekkor az összes tényező pozitív, így az összetett függvény konvex a pozitív félegyenesen, míg ha $x < 0$, akkor $g''_-(x) < 0$, valamint $g_-(x) > 0$, így $f''_+(g_-(x)) < 0$, tehát az összeg mindkét tagjában az egyik tényező pozitív, a másik negatív, így a negatív félegyenesen konkáv az összetett függvény. Ezzel beláttuk, hogy $(f_+ \circ g_-) \in P_-$. \square

Vezessük be a következő jelölést: $a = \prod_{j=0}^n f'_j(0)$

4.2. Tétel. A (2.2) egyenletnek

- (i) egyetlen egyensúlyi helyzete a 0 pontosan akkor, ha $a \leq 1$,
- (ii) az azonosan 0 megoldáson kívül pontosan két másik egyensúlyi helyzet van, akkor és csak akkor, ha $a > 1$.

Speciálisan, ha $a < 0$, akkor az egyetlen egyensúlyi helyzet az azonosan 0 megoldás.

Bizonyítás. A 4.1 lemmából következik, hogy negatív visszacsatolás esetén (azaz amikor $a < 0$) $f_0 \circ \dots \circ f_n \in P_-$, pozitív visszacsatolás esetén pedig $f_0 \circ \dots \circ f_n \in P_+$, így ha $a < 0$, akkor (H3) és (H4)-nek megfelelő tulajdonságok miatt (4.2) csak $y^* = 0$ esetén teljesülhet. Ha $0 < a \leq 1$, akkor P_+ (H3) és (H5) tulajdonságaiból következik, hogy (4.2) ismét csak $y^* = 0$ esetén teljesül.

Ha $a > 1$, akkor (H2), (H3) és (H5) tulajdonságokból következik, hogy (4.2)-nek az $y^* = 0$ megoldásán kívül létezik pontosan egy pozitív és egy negatív megoldása. \square

4.2. Az egyensúlyi helyzetek stabilitása

Jelölje $a > 0$ esetén $\tilde{e}^+ \in C_\tau$ a konstans $e^+ \in \mathbb{R}^{n+1}$ egyensúlyi helyzetet, valamint $\tilde{e}^- \in C_\tau$ a konstans $e^- \in \mathbb{R}^{n+1}$ egyensúlyi helyzetet, ahol az indexben lévő kitevő a

nulladik komponens előjelére utal. Ezek után tekintsük a (2.2) egyenlet linearizáltját az $\tilde{e}(s) = \hat{e}$ egyensúlyi helyzetben

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(t) &= -z_0(t) + f'_0(\hat{e}_1)z_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) &= -z_{n-1}(t) + f'_{n-1}(\hat{e}_n)z_n(t), \\ \dot{z}_n(t) &= -z_n(t) + f'_n(\hat{e}_0)z_0(t - \tau), \end{aligned} \tag{4.3}$$

ahol $\hat{e} = (\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)^T \in \{0, e^+, e^-\}$. A megoldásokat $ce^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ alakban keresve nyerjük a karakterisztikus egyenletet:

$$(\lambda + 1)^{n+1} - \prod_{j=0}^n f'_j(\hat{e}_{j+1})e^{-\tau\lambda} = 0, \tag{4.4}$$

ahol most $\hat{e}_{n+1} = \hat{e}_0$. Ekkor ismert a következő stabilitásra vonatkozó lemma (lásd [4]).

4.3. Lemma.

(i) A (4.3) egyenlet azonosan 0 megoldása pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha a (4.4) egyenlet minden gyökének valós része negatív;

(ii) Ha a (4.3) egyenlet azonosan 0 megoldása aszimptotikusan stabil, akkor a (2.2) egyenlet \tilde{e} megoldása is aszimptotikusan stabil;

(iii) Ha a (4.4) egyenletnek létezik pozitív valós részű gyöke, akkor a (4.3) 0 megoldása és a (2.2) \tilde{e} megoldása instabil.

Ismert, hogy a karakterisztikus gyökök folytonosan függnek a karakterisztikus egyenlet paramétereitől és, hogy a $\text{Re}\lambda > 0$ nyitott félsíkon a karakterisztikus gyökök száma, csak akkor változhat ezen paraméterek változtatására, ha egy gyök áthalad az imaginárius tengelyen [6]. Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie, ha $\lambda = i\omega$ tisztán képzetes gyök, megengedve $\omega = 0$ esetet is. Feltehető, hogy $\omega \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, hiszen ha λ gyök, akkor $\bar{\lambda}$ is az. Vezessük be a $b = \prod_{j=0}^n f'_j(\hat{e}_{j+1})$ jelölést. Ekkor a (4.4) egyenlet a következő alakba írható:

$$(1 + i\omega)^{n+1} = be^{-\tau i\omega},$$

ami ekvivalens az

$$1 + i\omega = e^{i\varphi_k} \beta e^{-\sigma i\omega} \quad \text{valamely } k \in \{0, \dots, n\},$$

egyenlettel, ahol $\sigma = \frac{\tau}{n+1}$, $\mathbb{R}^+ \ni \beta = \sqrt[n+1]{|b|}$ és bármely $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén

$$\varphi_k = \begin{cases} \frac{2\pi k}{n+1} & \text{ha } a > 0, \\ \frac{2\pi(k+1)}{n+1} & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

Ez írható a következőképp is:

$$1 + i\omega = \beta(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)(\cos \sigma\omega - i \sin \sigma\omega) \quad \text{valamely } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Különválasztva a valós és képzetes részt az előzővel ekvivalens

$$\begin{aligned} 1 &= \beta(\cos \varphi_k \cos \sigma\omega + \sin \varphi_k \sin \sigma\omega) = \beta \cos(\varphi_k - \sigma\omega), \\ \omega &= \beta(\sin \varphi_k \cos \sigma\omega - \cos \varphi_k \sin \sigma\omega) = \beta \sin(\varphi_k - \sigma\omega) \end{aligned} \quad (4.5)$$

egyenletrendszert kapjuk. Négyzetre emelve (4.5) mindkét egyenletét, majd azokat összeadva kapjuk a következő összefüggést β és ω között:

$$1 + \omega^2 = \beta^2 \iff \beta = \sqrt{1 + \omega^2}. \quad (4.6)$$

Ebből következik, hogy tisztán képzetes gyök csak $|b| \geq 1$ esetén lehetséges. Könnyen látható, hogy $b = 0$ esetén a karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív. Összevetve ezeket a 4.3 lemmával és az utána leírt tényekkel azonnal adódik az alábbi tétel.

4.4. Tétel. *Ha $|a| < 1$, akkor a (2.2) egyenlet 0 megoldása aszimptotikusan stabil függetlenül τ értékétől.*

Az előzőek alapján könnyen adódik az alábbi tétel.

4.5. Tétel. *Ha $a > 1$ teljesül, akkor a (2.2) egyenlet \tilde{e}^\pm egyensúlyi helyzetei aszimptotikusan stabilak függetlenül τ és a választásától.*

Bizonyítás. Vezessük be az $F = f_0 \circ \dots \circ f_n$ jelölést. Ekkor $a > 1$ egyenlőtlenségből és 4.1 lemmából következik, hogy $F \in P_+$. Tudjuk továbbá, hogy $F(e_0^\pm) = e_0^\pm$. Könnyen látható a (4.1) egyenletből, hogy ha \tilde{e}^\pm egyensúlyi helyzete a (2.2) egyenletnek, akkor $e_i^\pm = f_i(e_{i+1}^\pm)$ bármely $0 \leq i \leq n$ esetén, ahol az indexek mod $n + 1$ értendők. Bevezetve a $b^\pm = \prod_{j=0}^n f_j'(e_j^\pm)$ jelöléseket az előzőek alapján és a láncszabály segítségével az alábbi összefüggést nyerjük:

$$\begin{aligned} F'(e_0^\pm) &= (f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{n-1})'(f_n(e_0^\pm))f_n'(e_0^\pm) = \\ &= (f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{n-2})'(f_{n-1}(e_n^\pm)) \cdot f_{n-1}'(e_n^\pm) \cdot f_n'(e_0^\pm) = \\ &= \dots = \prod_{j=0}^n f_j'(e_{j+1}^\pm) = \\ &= b^\pm. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Mivel F e_0^+ -ban és e_0^- -ban metszi az $y = x$ egyenest és $F \in P_+$, így a pozitív félegyenesen konkáv, a negatív félegyenesen pedig konvex függvény, ezért $0 < F'(e_0^\pm) < 1$

azonnal következik. Tehát $0 < b^\pm < 1$. Ismét a 4.3 lemmából és az utána leírtakból, illetve abból, hogy tisztán képzetes gyök létezésének szükséges feltétele a (4.6) összefüggés, következik az állítás. \square

Ezek után foglalkozunk a 0 egyensúlyi helyzettel. Vegyük észre, hogy $a = 1$ esetén a $\lambda = 0$ megoldása a (4.4) karakterisztikus egyenletnek. Ezt összevetve azzal, hogy $|a| < 1$ esetén nincs gyök a képzetes tengelyen, kapjuk, hogy pozitív visszacsatolás esetén a -t változtatva a $[0, \infty)$ intervallumon az első olyan gyök, ami rajta van a képzetes tengelyen $a = 1$ -nél jelentkezik. A (4.6) összefüggést (4.5) első egyenletébe visszaírva kapjuk az

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} = \cos(\varphi_k - \sigma\omega) \quad (4.8)$$

egyenletet. Jegyezzük meg, hogy (4.6) reláció mellett $\omega \rightarrow \infty$, amint $b \rightarrow \infty$. Mivel (4.8) mindkét oldala folytonosan változik, amint ω -t növeljük, bal oldala szigorúan 0 és 1 közé esik bármely $\omega \in \mathbb{R}^+$ esetén, a jobb oldal pedig periodikusan változik és minden periódusban kétszer bejárja a $[0,1]$ intervallumot, így lesz periódusonként legalább egy olyan értéke ω -nak, melyre (4.8) teljesül és $\sin(\varphi_k - \sigma\omega) > 0$, így ekkor szükségképpen a (4.5) egyenletrendszer mindkét feltétele teljesül. Így megállapíthatjuk, hogy mindkét visszacsatolás esetén $|a|$ -et növelve végtelen sokszor lesz tisztán képzetes gyöke a karakterisztikus egyenletnek. A következőkben meg fogjuk mutatni, hogy a fenti esetekben a karakterisztikus gyök átmegy a $\operatorname{Re}\lambda < 0$ félsíkból a $\operatorname{Re}\lambda > 0$ félsíkba. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

4.6. Lemma. *Legyen τ tetszőleges rögzített pozitív. Vezessük be a*

$$\Delta(\lambda, a) = (1 + \lambda)^{n+1} - ae^{-\tau\lambda}$$

jelölést, és legyen $a_0 \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített, melyre létezik λ^ , hogy $\Delta(\lambda^*, a_0) = 0$ és $\operatorname{Re}\lambda^* > -1$. Ekkor létezik $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\lambda_0 : (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény, úgy hogy bármely $a \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ esetén $\lambda_0(a)$ adja $\Delta(\lambda, a) = 0$ egyenlet egyetlen megoldását és λ_0 folytonosan differenciálható a_0 -ban a szerint.*

Bizonyítás. Az implicit függvények tétele szerint elegendő megmutatni, hogy

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta(\lambda^*, a_0) \neq 0.$$

Használni fogjuk, hogy $\Delta(\lambda^*, a_0) = 0$ miatt $a_0 e^{-\tau\lambda^*} = (\lambda^* + 1)^{n+1}$ összefüggés teljesül.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta(\lambda^*, a_0) &= (n+1)(\lambda^* + 1)^n + a_0 \tau e^{-\tau\lambda^*} = \\ &= (\lambda^* + 1)^n (n+1 + \tau(\lambda^* + 1)) = 0 \iff \\ &\iff (n+1 + \tau(\lambda^* + 1)) = 0. \end{aligned}$$

Ez $\operatorname{Re}\lambda^* > -1$ miatt nem teljesülhet, így

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta(\lambda^*, a_0) \neq 0.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. □

Az alábbi tételben megmutatjuk, hogy $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ esetén minden karakterisztikus gyök valós része nő, miközben $|a|$ -et növeljük.

4.7. Tétel. *Legyen τ rögzített, valamint $\lambda(a) = c(a) + i \cdot d(a)$ és a_0 olyan, hogy a 4.6 lemma feltételei teljesüljenek. Ekkor $\operatorname{sgn}(c'(a)) = \operatorname{sgn}a$.*

Bizonyítás.

$$(\lambda(a) + 1)^{n+1} - ae^{-\tau\lambda(a)} = 0$$

egyenletet a szerint deriválva kapjuk a következőt:

$$(n+1)(\lambda(a) + 1)^n (c'(a) + i \cdot d'(a)) - e^{-\tau\lambda(a)} + \tau ae^{-\tau\lambda(a)} (c'(a) + i \cdot d'(a)) = 0.$$

Kihasználva, hogy $e^{-\tau\lambda(a)} = \frac{(\lambda(a)+1)^{n+1}}{a}$, valamint hogy $c(a) \geq 0$, így $(\lambda(a) + 1) \neq 0$, nyerjük a következő egyenletet:

$$(n+1 + \tau + \tau(c(a) + i \cdot d(a))) \cdot (c'(a) + i \cdot d'(a)) - \frac{c(a) + i \cdot d(a) + 1}{a} = 0.$$

Külön választva a valós és a képzetes részét az egyenletnek az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} c'(a)(n+1 + \tau + \tau c(a)) - \tau d'(a)d(a) - \frac{c(a) + 1}{a} &= 0, \\ d'(a)(n+1 + \tau + \tau c(a)) + \tau c'(a)d(a) - \frac{d(a)}{a} &= 0. \end{aligned}$$

Ebből kifejezve $c'(a)$ -t és $d'(a)$ -t kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d'(a) &= \frac{d(a)(n+1)}{a[(n+1 + \tau + \tau c(a))^2 + \tau^2 d^2(a)]} \quad \text{és} \\ c'(a) &= \frac{(c(a) + 1)(n+1 + \tau + \tau c(a)) + \tau d^2(a)}{a[(n+1 + \tau + \tau c(a))^2 + \tau^2 d^2(a)]}, \end{aligned}$$

amiből következik az állítás. □

4.8. Megjegyzés. A 4.7 tételből következik, hogy ha egy gyök eléri a képzetes tengelyt, akkor $|a|$ -et tovább növelve át is halad azon a pozitív valósrésű felsík felé, továbbá a pozitív valósrésű felsíkról nem mehet vissza gyök a negatív valósrésűre, amint $|a|$ -et növeljük.

4.9. Megjegyzés. A 4.7 tétel bizonyításából az is kiderül, hogy ugyanekkor a pozitív valósrésű gyökök távolodnak a valós egyenestől, így egy komplex gyökből nem lehet később valós. Könnyen belátható, hogy $a > 1$ esetén a $(\lambda + 1)^{n+1} - ae^{-\tau\lambda}$ karakterisztikus egyenletnek pontosan egy megoldása létezik a pozitív, valós számok körében. A [11] cikk szerint, adott paraméterek esetén az azonos valósrésszel rendelkező gyökök száma legfeljebb 2, így mivel tudjuk, hogy λ gyök esetén $\bar{\lambda}$ is gyök, ezért a gyökök megőrzik a valósrésük szerinti egymás közti rendezést. Ezek alapján következik, hogy $a > 1$ esetén a pozitív valósrésű félsíkon a legnagyobb valósrésű karakterisztikus gyök valós (pozitív), míg az összes többi (ha van) komplex konjugált párban jelentkezik. Vegyük észre hogy $a < 0$ esetén a (4.4) karakterisztikus egyenletnek nincs pozitív valós gyöke, így a negatív visszacsatolás esetében a pozitív valósrésű félsíkon minden karakterisztikus gyök komplex konjugált párban jelentkezik.

Az alábbi tétel az eddigi eredményeket foglalja össze.

4.10. Tétel. *A következő két állítás igaz a (2.2) egyenletű hálózatokra.*

- (i) *Negatív visszacsatolás esetén az egyetlen egyensúlyi helyzet a $0 \in C_\tau$. Ekkor létezik $a_0(\tau) \leq -1$, hogy $a_0(\tau) < a < 0$ esetén az egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil, míg $a < a_0(\tau)$ esetén instabil.*
- (ii) *Pozitív visszacsatolás esetén ha $0 < a < 1$, akkor az egyetlen egyensúlyi helyzet a $0 \in C_\tau$, mely ekkor aszimptotikusan stabil, míg $a > 1$ esetén a 0 instabil és létezik pontosan két másik egyensúlyi helyzet, melyek aszimptotikusan stabilak.*

Érdemes megemlíteni, hogy [2] szerint a (2.2) egyenletrendszer 0 egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabil, ha minden $0 \leq i \leq n$ esetén $|f'_i(0)| < 1$, τ értéktől függetlenül. Ehhez tehát szükség van minden kapcsolaterősség korlátozására, nem elegendő csak a szorzatokra feltételt adni.

5. fejezet

Periodikus pályák

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy a negatív visszacsatolású esetben, ha a $0 \in C$ instabil egyensúlyi helyzet, akkor a (2.3) egyenletnek létezik periodikus megoldása. Ezután numerikus példákkal szemléltetem az eredményeket.

5.1. Periodikus pálya létezése negatív visszacsatolás esetén

Használni fogjuk a Poincaré-Bendixson tételt, melyet valamivel általánosabb alakú egyenletekre bizonyított [12]. Definiáljuk a $\pi^i : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ projekciókat:

$$\pi^i \varphi = \begin{cases} (\varphi(i), \varphi(i+1)) & \text{ha } 0 \leq i \leq n-1, \\ (\varphi(n), \varphi(-1)) & \text{ha } i = n. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1. Tétel (Poincaré-Bendixson Tétel). *Tegyük fel, hogy $z(t)$ megoldása a (2.3) egyenletnek egy $[t_0, \infty)$ intervallumon, ahol minden $0 \leq i \leq n-1$ esetén $g_i \in P_+$, valamint $g_n \in P_{\pm}$. Jelölje $\omega(z) \subset C$ a korábban definiált ω -határhalmazát a megoldásnak. Ekkor a következők valamelyike teljesül:*

- (a) $\omega(z)$ egy periodikus pálya, vagy különben
- (b) ha u tetszőleges megoldás, melyre teljesül $u^t \in \omega(z)$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor

$$\alpha(u) \cup \omega(u) \subset E,$$

ahol $E \subset C$ az egyensúlyi helyzetek halmazát jelöli, továbbá mindkét esetben bármely $0 \leq i \leq n$ esetén a

$$\pi^i : \omega(z) \rightarrow \pi^i(\omega(z)) \subset \mathbb{R}^2$$

projekciók injektívek, így a kompakt $\omega(z)$ halmazt homeomorf módon ágyazzák a síkba.

A fejezet további részében olyan negatív visszacsatolású rendszerekről lesz szó, melyeknek a 0 instabil egyensúlyi helyzete. Tehát vizsgáljuk a

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= -\tau z_0 + \tau g_0(z_1), \\ \dot{z}_1 &= -\tau z_1 + \tau g_1(z_2), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= -\tau z_{n-1} + \tau g_{n-1}(z_n), \\ \dot{z}_n &= -\tau z_n + \tau g_n(z_0(t-1)),\end{aligned}$$

alakú egyenletrendszer, ahol $g_i \in P_+$ bármely $i \in \{1, \dots, n-1\}$ -re és $g_n \in P_-$, továbbá $a = \prod_{j=0}^n g'_j(0)$ olyan, hogy létezik pozitív valósrésű sajátérték. Legyen $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\}$ a két legnagyobb valósrésű sajátérték. Mivel negatív visszacsatolás esetén $E = \{0\}$, így a periodikus pálya létezéséhez az előző tétel szerint elegendő megmutatnunk, hogy létezik olyan megoldás, melynek ω -határhalmaza nem tartalmazza a 0 egyensúlyi helyzetet. Jelölje P a $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\}$ által generált valós általánosított sajátteret. Ekkor [9] szerint létezik egy lokálisan instabil $W_{lok}^u(0)$ sokaság a 0 körül, melyet a 0-ban érint a P sajátter, továbbá $W_{lok}^u(0)$ olyan $(-\infty, 0]$ intervallumon értelmezett megoldásszegmensekből áll, melyek tartanak 0-hoz, amint $t \rightarrow -\infty$. Ezen megoldások pozitív félegyenesen való folytatásával kapjuk W definícióját:

$$W = \Phi([0, \infty) \times W_{lok}^u(0)).$$

Ekkor igaz, hogy bármely $\varphi \in W$ esetén létezik pontosan egy z^φ megoldása a (2.3) egyenletnek, melyre teljesül $z^{\varphi t} \in W$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén és $z^{\varphi t} \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow -\infty$.

Tegyük fel, hogy a (2.3) egyenletnek z megoldása $(-\infty, t_0]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy z *oszcillál* a negatív félegyenesen, ha létezik $(t_k)_1^\infty$, hogy $t_k \rightarrow -\infty$, amint $k \rightarrow \infty$ és létezik $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $z_i(t_j)z_i(t_{j+1}) < 0$ bármely $j \in \mathbb{N}$ esetén.

5.2. Lemma. *Negatív visszacsatolás esetén, ha $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ megoldása a (2.3) egyenletnek és $z^t \in W \setminus \{0\}$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor z oszcillál a negatív félegyenesen.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ekkor létezik egy $-T < 0$, hogy bármely $t', t'' < -T$ és $0 \leq i \leq n$ esetén $z_i(t')z_i(t'') \geq 0$, azaz a $-T$ időpillanat előtt a megoldás egyik komponense sem vált előjelet. Különböztessünk meg a z_0 ezen a félegyenesen vett előjele szerint két esetet.

Első eset, hogy $z_0(t) \geq 0$ bármely $t \in (-\infty, -T)$ esetén. Ekkor

$$\dot{z}_n(t) = -\tau z_n(t) + \tau g_n(z_0(t-1))$$

összefüggés miatt, ha $z_n(t) \geq 0$ bármely $t \in (-\infty, -T)$ esetén, akkor $g_n \in P_-$ miatt $\dot{z}_n(t) \leq 0$ következik, ami ellentmond annak, hogy $z_n(t)$ nem azonosan 0, és $z_n(t) \rightarrow 0$,

$t \rightarrow -\infty$ esetén. Ebből következik, hogy $z_n(t) \leq 0$ bármely $t \in (-\infty, -T)$ esetén. Ezután

$$\dot{z}_{n-1}(t) = -\tau z_{n-1}(t) + \tau g_{n-1}(z_n(t))$$

összefüggés szerint, ha $z_{n-1}(t) \geq 0$ bármely $t \in (-\infty, -T)$ esetén, akkor $g_{n-1} \in P_+$ miatt $\dot{z}_{n-1}(t) \leq 0$ következik, ami ellentmond annak, hogy $z_n(t)$ nem azonosan 0, és $z_n(t) \rightarrow 0$, amint $t \rightarrow -\infty$. A hálózaton tovább lépkedve visszafele ugyanezen logika szerint adódik, hogy $z_i(t) \leq 0$ bármely $0 \leq i \leq n$ esetén, amiből a feltevésünk szerint következik, hogy z_0 azonosan 0, ami ellentmondás.

A $z_0(t) \geq 0$ eset analóg gondolatmenettel ugyancsak ellentmondásra vezet. Ezzel az állítást bizonyítottuk. \square

5.3. Tétel. *Legyen $\varphi \in W \setminus \{0\}$. Ekkor $\omega(\varphi)$ egy periodikus pálya.*

Bizonyítás. Az 5.1 tétel és $E = \{0\}$ miatt elegendő megmutatni, hogy $0 \notin \omega(\varphi)$. Az 5.2 lemmából következik, hogy $z = z^\varphi$ oszcillál a negatív félegyenesen, tehát létezik $i \in \{0, \dots, n\}$ és $(t_k)_0^\infty$ sorozat, hogy $t_k \rightarrow -\infty$, amint $k \rightarrow \infty$ és

$$z_i(t_j)z_i(t_{j+1}) < 0$$

teljesül bármely $j \in \mathbb{N}$ esetén. Feltehető, hogy $i = 0$. Legyen a $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ görbe a következőképp definiálva:

$$\gamma(t) = \pi^0 z^{\varphi t} = (z_0(t), z_1(t)),$$

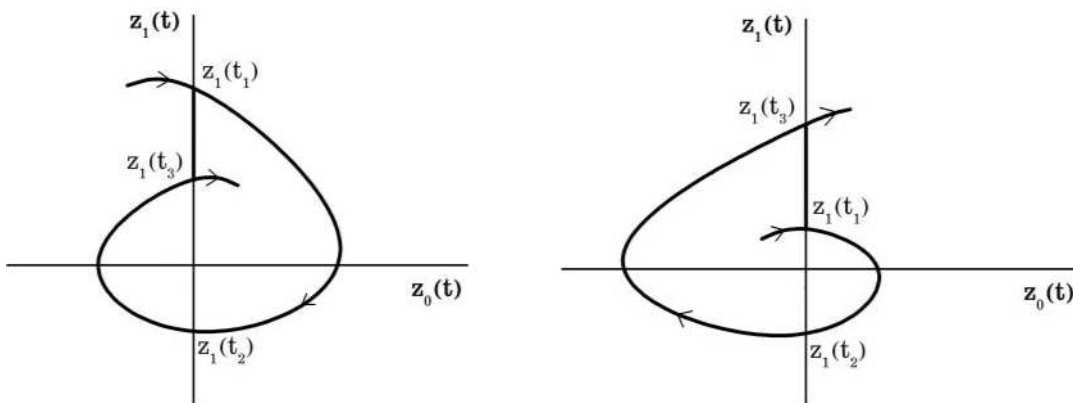
mely [12] szerint önmagát nem metsző és $\gamma(t) \neq (0,0)$ semmilyen t -re. Megfigyelhetjük továbbá, hogy ha t' olyan, hogy $z_0(t') = 0$ és $z_1(t') > 0$, akkor

$$\dot{z}_0(t') = -z_0(t') + g_0(z_1(t')) > 0$$

teljesül, míg $z_0(t') = 0$ és $z_1(t') < 0$ esetén pedig $\dot{z}_0(t') < 0$ következik, így γ a tengelyeket csak egyik irányban metszheti. Ezekből következik, hogy ha z_0 két egymást követő zéróhelye t' és t'' , akkor $z_1(t')z_1(t'') < 0$. Vezessük még be az alábbi jelölést:

$$\gamma_{[t', t'']} = \{(z_0(t), z_1(t)) : t \in [t', t'']\}.$$

Ezek után vegyünk három egymást követő zéróhelyét z_0 -nak: $t_1 < t_2 < t_3$. Ekkor a $\gamma_{[t_1, t_3]}$ görbéhez hozzávéve a $\gamma(t_1)$ és $\gamma(t_3)$ közti egyenes szakaszt, kapunk egy Jordan-görbét, mely tartalmazza az origót (lásd az 5.1 ábrát). Ha $z_1(t_3) < z_1(t_1)$, akkor $\gamma(t)$ a $(-\infty, t_1)$ intervallumon csak e zárt görbén kívül haladhat, így ez ellentmond annak, hogy $z^t \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow -\infty$, ezért ez az eset nem fordulhat elő. Tehát $z_1(t_1) > z_1(t_3)$ kell teljesüljön, ekkor pedig $\gamma(t)$ a (t_3, ∞) intervallumon kell a Jordan-görbén kívül haladjon, amiből $0 \notin \omega(\varphi)$ következik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square



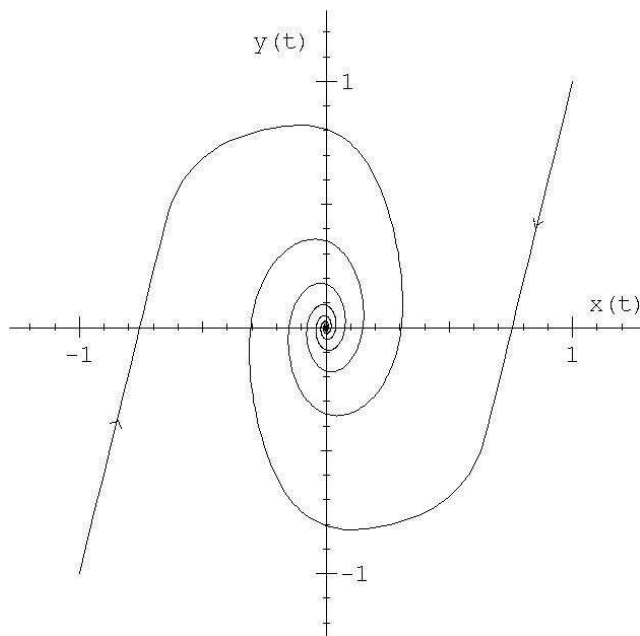
5.1. ábra. A $\gamma_{[t_1, t_3]}$ görbe $z_1(t_1) > z_1(t_3)$ illetve $z_1(t_1) < z_1(t_3)$ esetén.

5.2. Numerikus példák

Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + \alpha_1 \tanh(y(t-1)), \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + \alpha_2 \tanh(x(t-1)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

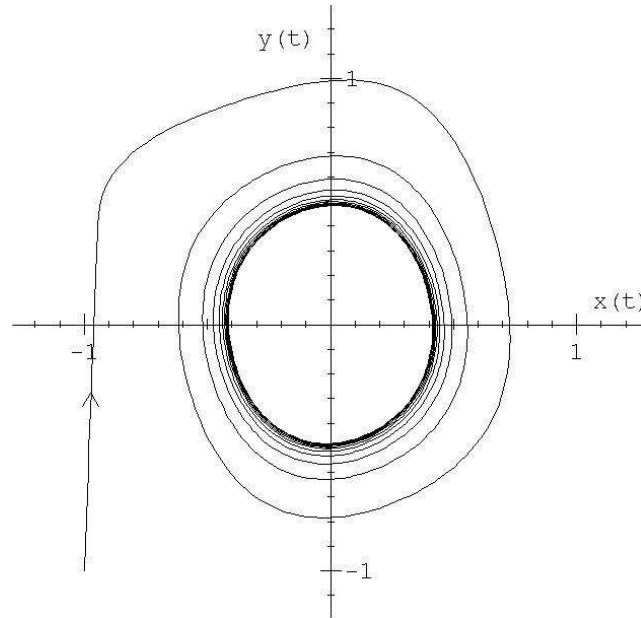
egyenletrendszer. Az 5.2 ábrán látható példában $\alpha_1 = 0,6$ és $\alpha_2 = -1,6$ értékeket választottuk, így $-1 < \alpha_1 \alpha_2 < 0$. A 4. fejezetben bizonyítottak szerint ekkor a 0 egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil. Ezt jól szemlélteti az 5.2 ábra¹.



5.2. ábra. Az (5.2) egyenletrendszer $\alpha_1 = 0,6$ és $\alpha_2 = -1,6$ kapcsolaterőségekkel.

¹ A szimulációk a DifEqu program segítségével készültek [10].

Ebben a fejezetben bizonyítottuk periodikus pálya létezését. A numerikus eredmények arra engednek következtetni, hogy ezek majdnem mindenhol attraktívák is. Ezt szemlélteti az 5.3 ábra, ami az (5.2) egyenletnek egy megoldását ábrázolja $\alpha_1 = 1,2$ és $\alpha_2 = -1,6$ konstansokkal.

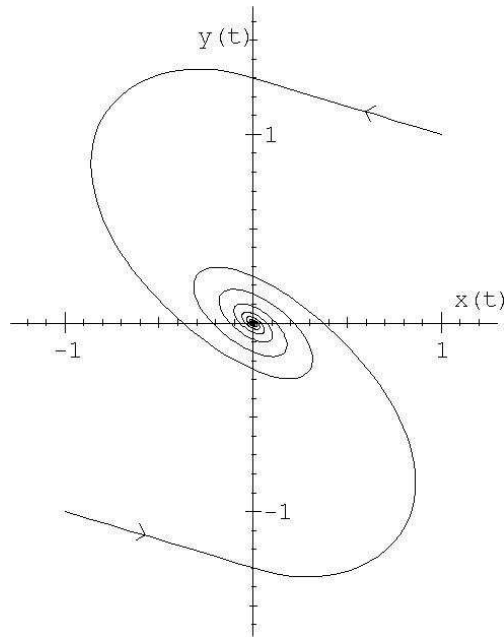


5.3. ábra. Az (5.2) egyenletrendszer $\alpha_1 = 1,2$ és $\alpha_2 = -1,6$ kapcsolaterősségekkel.

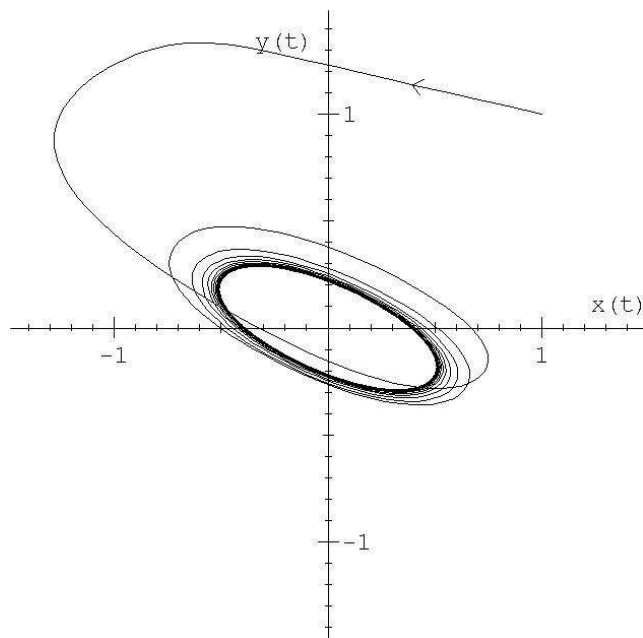
Az utóbbi két fejezetben bizonyított tételek a 3. fejezetben ismertetett rendszerre bizonyított állítások egy részének általánosítása. Célom, hogy további tulajdonságokat is kiterjesszek az ebben a dolgozatban vizsgált, illetve annál bonyolultabb struktúrájú hálózatokra is. Numerikus eredmények arra engednek következtetni, hogy az előzőekben látott jelenségek – például periodikus pálya keletkezése – megfigyelhetőek más típusú neuronhálózatokban is. Tekintsük például a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + \alpha_{11} \tanh(x(t-1)) + \alpha_{12} \tanh(y(t-0,5)), \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + \alpha_{21} \tanh(x(t-0,5)) + \alpha_{22} \tanh(y(t-0,5)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ennek az egyenletrendszernek az $\alpha_{11} = \alpha_{12} = -1, \alpha_{21} = +1,5, \alpha_{22} = +0,8$ kapcsolaterősségek melletti megoldását illusztrálja az 5.4 ábra $x(s) = y(s) = 1$ illetve $x(s) = y(s) = -1$ kezdeti függvények esetén. Az 5.5 ábra ismét az (5.3) egyenlet megoldását szemlélteti $x(s) = y(s) = 1$ kezdeti függvénnyel azzal a különbséggel, hogy most $\alpha_{11} = -2$, vagyis ezt a kapcsolaterősséget kétszeresére növeltük, a többit nem változtattuk az előzőekhez képest. Láthatjuk, hogy a megoldás egy periodikus pályára tekeredik rá.



5.4. ábra. Az (5.3) egyenletrendszer megoldása
 $\alpha_{11} = \alpha_{12} = -1, \alpha_{21} = +1,5, \alpha_{22} = +0,8$ esetén.



5.5. ábra. Az (5.3) egyenletrendszer megoldása
 $\alpha_{11} = -2, \alpha_{12} = -1, \alpha_{21} = +1,5, \alpha_{22} = +0,8$ esetén.

Összefoglalás

A neuronhálózatok viselkedésének megértéséhez elengedhetetlen eszköz a késleltetett differenciálegyenletekkel való modellezés. Dolgozatomban a következő gyűrűszerű neuronhálózatot leíró késleltetett differenciálegyenletet vizsgáltam:

$$\dot{x}_i = -x_i + f_i(x_{i+1}(t - \tau_i)) \quad 0 \leq i \leq n,$$

(az indexek mod $n + 1$ értendő)

ahol minden $0 \leq i \leq n$ esetén $\tau_i \geq 0$, valamint $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, 0-ban eltűnő, korlátos függvény, mely szigorúan monoton és rendelkezik egy konvexitási tulajdonsággal.

Bizonyítottam, hogy a kezdetiérték-problémának létezik egyértelmű megoldása, amely mindig korlátos. Az $a = \prod_{j=0}^n f'_j(0)$ jelöléssel élve $a \leq 1$ esetén az egyenletnek egyetlen egyensúlyi helyzete az azonosan 0, $a > 1$ esetén pedig a 0 mellett két további egyensúlyi helyzete van, melyek aszimptotikusan stabilak a késleltetésektől függetlenül. $0 < a < 1$ esetén a 0 egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil, míg $a > 1$ esetén instabil függetlenül a késleltetésektől. Megmutattam hogy létezik $a(\tau)$, $\tau = \sum_{j=0}^n \tau_j$, hogy $a(\tau) < a < 0$ esetén a 0 aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet, míg $a < a(\tau)$ esetén a 0 instabil, továbbá hogy ekkor létezik az egyenletnek periodikus megoldása. Az eredményeket végül numerikus szimulációk segítségével szemléltettem.

Irodalomjegyzék

- [1] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel and H.-O. Walther, *Delay Equations, Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer Verlag, New York, 1995.
- [2] P. van den Driessche, Jianhong Wu, Xingfu Zou, Stabilization role of inhibitory self-connections in a delayed neural network, *Phys. D* **150** (2001), 84-90.
- [3] K. Gopalsamy, X.-Z. He, Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, *Phys. D* **40** (1994), 344-358.
- [4] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.
- [5] R.L. Harvey, *Neural Network Principles*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1994.
- [6] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, *Stability of functional differential equations*, Vol. 180 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1986.
- [7] T. Krisztin, Global dynamics of delay differential equations, *Period. Math. Hung.*, **56** (2008), 83-95.
- [8] T. Krisztin and J. Wu, The global structure of an attracting set, personal communication.
- [9] T. Krisztin, H.-O. Walther and J. Wu, *Shape, Smoothness, and Invariant Stratification of an Attracting Set for Delayed Monotone Positive Feedback*, Fields Institute Monograph Series vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
- [10] G. Makay, *DifEqu*, 1994.
- [11] J. Mallet-Paret and G. Sell, Systems of differential delay equations : Floquet multipliers and discrete Lyapunov functions, *J. Diff. Eq.* **125** (1996), 385-440.
- [12] J. Mallet-Paret and G. Sell, The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay, *J. Diff. Eq.* **125** (1996), 441-489.

- [13] J. Mellet-Paret and H.-O. Walther, *Rapid oscillations are rare in scalar systems governed by monotone negative feedback with a time delay*, Preprint, Math. Inst., University of Giessen, 1994.
- [14] W. McCulloch and W. Pitts, A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bull. Math. Biophys.* **7** (1943), 115 - 133.
- [15] H.L. Smith, Monotone semiflows generated by functional differential equations, *J. Diff. Eq.* **66** (1987), 420-442.
- [16] H.-O. Walther, An invariant manifold of slowly oscillating solutions for $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$, *J. Reine Angew. Math.* **414** (1991), 67-112.
- [17] H.-O. Walther, *The 2-dimensional attractor of $\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$* , Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol. 544, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [18] H.-O. Walther, and M. Yebdri, Smoothness of the attractor of almost all solutions of a delay differential equation, *Dissertationes Mathematicae* **368**, 1997.
- [19] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Agy>
- [20] J. Wu, *Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission*, de Gruyter, Berlin, 2001.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Édesapámnak, hogy már gyerekkoromban megismertette velem a matematika szépségeit; általános- és középiskolai tanárainnak, külön kiemelve Mike Jánost és Ábrahám Gábort. Köszönet Dr. Ágoston Dénesnek a biológiai modellel kapcsolatos hasznos tanácsaiért. Külön szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Krisztin Tibornak, végtelen türelméért és szakmai irányításáért, melyek nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el.

Nyilatkozat

Alulírott Garab Ábel, matematikus szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel. Tudomásul veszem, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Szeged, 2008. május 16.

.....

aláírás