

2019.05.28.

Műszaki matematika I.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. A tanult módon vizsgáljuk a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2^n n^2} (1-3x)^{n-2}$  sort. 25pt
2. Laplace-transzformációval oldjuk meg:  $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 1$ . 20pt
3. Határozzuk meg az  $f(x, y) = xy + 2y - \ln(xy^2)$  függvény lokális szélsőérték helyeit és értékeit is. 20pt
4. Határozzuk meg az  $\int_L (2x + y) dx - (x - y^2) dy$  integrál értékét, ahol  $L$  a  $P(2, 0)$  középpontú, 3 sugarú körív  $A(2, 3) \rightarrow B(-1, 0)$  pontjait negatív irányban köti össze. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

Vizsgajegy:

79–90	5
66–78	4
53–65	3
40–52	2
0–39	1

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x \cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

2019.06.11.

Műszaki matematika I.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. Oldjuk meg az  $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$  differenciálegyenletet. 20pt
2. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az  $f(x, y) = \sqrt{xy-y}$  függvény  $P(2, 3)$  pontban vett  $u(-3, 1)$  irány szerinti deriváltját. 20pt
3. Határozzuk meg az  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y$  függvény globális szélsőértékeit az  $y = 0$ ,  $x = -2$  és az  $2x + y = 0$  egyenletű egyenesek által határolt korlátos, zárt síklemezen. 25pt
4. Számítsuk ki az  $\iint_H (e^{-y^2} + 2xy) \, dxy$  integrált, ahol  $H$  a  $(-2, -2)$ ,  $(0, 0)$  és a  $(0, -2)$  pontok által határolt, zárt háromszög. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

Vizsgajegy:

79–90	5
66–78	4
53–65	3
40–52	2
0–39	1

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x \cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a  $f(x, y) = 3xy - 1/y$  függvény  $f'_x(1, 4)$  és  $f'_y(-1, 2)$  parciális deriváltjait. 20pt
2. Laplace-transzformációval oldjuk meg az  $y'' - 4y = 4e^{-2x} - 8 \sin 2x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$  kezdeti érték problémát. 25pt
3. Határozzuk meg a  $\lim_{(x,y) \rightarrow A} \frac{3y + x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  határértéket, ahol  
 a)  $A = (-3, \infty)$ ,    b)  $A = (\infty, \infty)$ ,    c)  $A = (0, 0)$ . 20pt
4. Határozzuk meg az  $\int_L \frac{x}{y+2} dx - (x - y^2) dy$  integrál értékét, ahol  $L$  a  $(-2, 1) \rightarrow (0, 0)$  pontokat összekötő szakasz. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

Vizsgajegy:

79–90	5
66–78	4
53–65	3
40–52	2
0–39	1

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x \cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

2019.06.25.

Műszaki matematika I.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. Oldjuk meg a  $(\cos x - x \sin x + y) dx + (x - \cos y) dy = 0$  differenciálegyenletet. 20pt
2. A tanult módon vizsgáljuk a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n-2}}{n^2+1} (3x-1)^{n-4}$  sort. 20pt
3. Határozzuk meg az  $\int_L (x-3y) dx - y^2 dy$  integrál értékét, ahol  $L$  a  $P(1, -2)$  középpontú, 2 sugarú körív  $A(1, 0) \rightarrow B(1, -4)$  pontjait pozitív irányban köti össze. 25pt
4. Számítsuk ki az  $\iint_H (x \sin xy + x^2 y) dxy$  integrált, ahol  $H$  az  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$ ,  $y = 0$  és az  $y = 1$  egyenletű egyenesek által határolt téglalap. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

Vizsgajegy:

79–90	5
66–78	4
53–65	3
40–52	2
0–39	1

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x \cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$



1. Laplace-transzformációval oldjuk meg az  $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  kezdeti érték problémát. 25pt

2. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét: 20pt

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{n+6} - 2^{3n+1}}{4^{2n-5}} \qquad (b) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{6}{n^2 - n - 2}$$

3. Határozzuk meg az  $f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$  függvény globális szélsőértékeit az  $(-1, 0)$ ,  $(2, 3)$  és a  $(2, 0)$  pontok által határolt zárt háromszögön. 20pt

4. Határozzuk meg az  $\int_L \ln(x+1) dx - xy^2 dy$  integrál értékét, ahol  $L$  a  $(2, -1) \rightarrow (0, 2)$  pontokat összekötő szakasz. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizgázhat!**

Vizsgajegy:

79–90	5
66–78	4
53–65	3
40–52	2
0–39	1

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x \cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$