

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $h(x) = \sqrt{3x - x^2}$ függvény deriváltját az $x = 2$ helyen. 8pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 10pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - \pi} - \sqrt{n^2 - 2n}), \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n-1} \right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln^2 x$ függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 32pt

$$(i) \int_{-1}^0 \frac{ds}{s^2 - 2s + 2}, \quad (ii) \int_3^{\infty} \frac{1}{t^2 - 2t} dt, \quad (iii) \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, & \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A -2 korlátja az $\{b_n\}$ sorozatnak. 5pt

(ii) $g(x)$ konvex $[-1, 3]$ -n. 5pt

(iii) A korlátos H számhalmaz infimuma. 5pt

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. 5pt

(v) Darboux-féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK:

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5}{n^2 - n + 3} = 2$. 9pt
 2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor-féle polinomját, továbbá becsüljük meg $\sqrt[3]{2}$ értékét. 9pt
 3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt. 15pt
- (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 32pt

$$(i) \int_0^1 v^2(3+5v^3)^{12} dv, \quad (ii) \int_1^2 \frac{du}{u^3+u^2}, \quad (iii) \int_0^\infty xe^{3-2x} dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{x_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökken. 5pt
- (ii) A $h(x)$ függvény lineárisan approximálható a -1 pontban. 5pt
- (iii) A $\{c_n\}$ sorozat részsorozata a $\{b_n\}$ sorozatnak. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$. 5pt
- (v) A Lagrange-féle maradéktag. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ ($n > 1$) rekurzív sorozatot. 10pt
 2. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + \sqrt{5}}{n - 4} = \infty$. 10pt
 3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x}$ függvényt. 15pt
- (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 30pt

$$(i) \int_{-\pi/4}^{\pi/2} x \cos 2x \, dx, \quad (ii) \int_0^{\infty} ue^{-u^2} \, du, \quad (iii) \int_0^1 \frac{t^3 - 1}{t + 2} \, dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (x_n) sorozat korlátos. 5pt

(ii) A $g(x)$ függvény monoton nő $[c, d]$ -n. 5pt

(iii) A $h(x)$ -nek az $x = -1$ pont kritikus pontja. 5pt

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$. 5pt

(v) Integrálfüggvény. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n + 1}{3 - n + 2n^2} = \infty$. 10pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 10pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{1 - \sqrt[n]{9}}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \frac{x}{e^x(1-x)}$ függvényt. 20pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 25pt

$$(i) \int_2^3 \frac{u^3 + u + 1}{u^2 - 1} du, \quad (ii) \int_0^{\infty} v e^{1-v^2} dv .$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, & \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C . \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 3. 5pt

(ii) A $g(x)$ szigorúan monoton csökken a $[0, 2]$ -on. 5pt

(iii) Az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja van az $x = -2$ helyen. 5pt

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$. 5pt

(v) Az integrálható $f(x)$ függvény integrálközepe a $[c, d]$ -on. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érní. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK:

1. Lineáris transzformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = 1 - e^{2+3x}$ függvényt. 8pt
 2. Határozzuk meg az $f(t) = t^3 - 4t^2 + 16$ függvény szélsőértékeit a $[-2, 2]$ halmazon. 7pt
 3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. 15pt
- (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 35pt

$$(i) \int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos^2 t \, dt, \quad (ii) \int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{-y/2} \, dy, \quad (iii) \int_1^3 \frac{1}{x^2 - 4} \, dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő. 5pt
- (ii) A $g(x)$ függvény differenciálható a -3 pontban. 5pt
- (iii) A korlátos H számhalmaz supremuma. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$. 5pt
- (v) Riemann-féle integrálközelítő összeg (részletesen). 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 4$, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ ($n > 1$) rekurzív sorozatot. 9pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 9pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n - 2 \cdot 4^n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{n+3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 32pt

$$(i) \int_1^2 \frac{3 \sin(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt, \quad (ii) \int_1^\infty \frac{dz}{z^2 + 4z + 2}, \quad (iii) \int_2^3 x \ln(2x-3) dx.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, & \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{x_n\}$ sorozat alulról korlátos. 5pt

(ii) A H számhalmaznak a -1 supremuma. 5pt

(iii) Az $f(x)$ függvénynek konkáv a $[c, d]$ -n. 5pt

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. 5pt

(v) Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 + e^{-x} + 2x + 1}$ függvénynek az $x = 0$ pontba húzott érintőegyenésének az egyenletét. 5pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 10pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + n^3}{3 - 2^{n-1}}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^2 - 1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 3\sqrt{x^2}$ függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 35pt

$$(i) \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 6x + 9} dx, \quad (ii) \int_0^1 s e^{2s-1} ds, \quad (iii) \int_2^3 t \sqrt[5]{t^2 - 4} dt.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, & \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $\{b_n\}$ sorozat konvergál -2 -hez. 5pt

(ii) A $h(x)$ függvénynek helyi maximuma van -1 -ben. 5pt

(iii) A $g(x)$ függvény differenciálható a c pontban. 5pt

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$. 5pt

(v) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos a $[2, 3]$ -on. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**