

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 4$, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ ($n > 1$) rekurzív sorozatot. 9pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 9pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n - 2 \cdot 4^n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{n+3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 32pt

$$(i) \int_1^2 \frac{3 \sin(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt, \quad (ii) \int_1^\infty \frac{dz}{z^2 + 4z + 2}, \quad (iii) \int_2^3 x \ln(2x-3) dx.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, & \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{x_n\}$ sorozat alulról korlátos. 5pt
- (ii) A H számhalmaznak a -1 supremuma. 5pt
- (iii) Az $f(x)$ függvénynek konkáv a $[c, d]$ -n. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. 5pt
- (v) Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK

1. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2y - y^3 - 2$ függvény szélsőértékeit (és helyeit) a $(-1, -1)$, $(2, -1)$, $(-1, 3)$, $(2, 3)$ pontok által meghatározott zárt négyszögön. 22pt
2. Oldjuk meg: $xy' + y^2 + y = 0$, $y(1) = 1$. 22pt
3. Határozzuk meg $\int_{\gamma} (x + y) dx + y^2 dy$ értékét, ahol
 - a) γ az $O(1, 3)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, pozitív irányítású körvonal $A(1, 1)$ és $B(-1, 3)$ pontjait összekötő körív ($A \rightarrow B$),
 - b) γ az $A(1, 1)$ és $B(-1, 3)$ pontokat összekötő szakasz ($A \rightarrow B$). 23pt
4. A megfelelő sorfejtés első 5 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_1^2 \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^3} dx$ értékét. 23pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1,$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1, \quad \int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u'_x = v'_y, \quad -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$