2015.06.16. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Lineáris transzformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = 1 - e^{2+3x}$ függvényt. *8pt*

2. Határozzuk meg az $f(t) = t^3 - 4t^2 + 16$ függvény szélsőértékeit a $[-2, 2]$ halmazon. *7pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos^2 t \; dt, \qquad \text{(ii)} \int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{-y/2} \; dy, \qquad \text{(iii)} \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2 - 4} \; dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \; (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \; .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) A $g(x)$ függvény differenciálható a -3 pontban. *5pt*

(iii) A korlátos H számhalmaz supremuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -2} f(x) = -1$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.06.16. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. a) Határozzuk meg a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2-n-2}$ sor összegét.

   b) Konvergens-e $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt{\ln n}}$. *22pt*

2. Oldjuk meg: $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. *22pt*

3. Határozzuk meg $\int_\gamma x(1-y)\, dx + 2y\, dy$ értéket, ahol γ

   a) az $O(0,0)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, negatív irányítasú körvonal $A(-2,0)$ és $B(2,0)$ pontjait összekötő körív.

   b) az $A(-1,0)$ és $B(1,3)$ pontokat összekötő szakasz ($A \to B$). *23pt*

4. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^3$ függvény szélsőértékeit a $(1,-1)$, $(-1,2)$, és $(1,2)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *23pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1,$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1, \quad \int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n : = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) : = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$
$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$
$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$