2015.05.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $h(x) = \sqrt{3x - x^2}$ függvény deriváltját az $x = 2$ helyen. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - \pi} - \sqrt{n^2 - 2n}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln^2 x$ függvényt. *15pt*

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *32pt*

$$\text{(i)} \int_{-1}^{0} \frac{ds}{s^2 - 2s + 2}, \qquad \text{(ii)} \int_{3}^{\infty} \frac{1}{t^2 - 2t} dt, \qquad \text{(iii)} \int_{1}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A -2 korlátja az $\{b_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(ii) $g(x)$ konvex $[-1, 3]$–n. *5pt*

(iii) A korlátos H számhalmaz infimuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.05.19. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\sqrt{n+1}}{2n^2-3}(x+5)^{n-1}$ sort. *22pt*
2. Oldjuk meg: $y' = 2y + 4x - e^{2x}$, $y(0) = 2$. *22pt*
3. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y)\to A} \frac{x^2y+3xy^2}{x^2+y^2}$ határértéket, ahol

   a) $A = (0, 0)$, b) $A = (-\infty, 2)$, c) $A = (-1, -\infty)$, d) $A = (\infty, -\infty)$. *23pt*
4. Határozzuk meg $\int_H \int \frac{xy}{y+1}\, dxy$ értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(4, 1)$ és $(0, 3)$ pontok által kijelölt zárt háromszög. *23pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1,$$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1, \quad \int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n : = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) : = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$
$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz.$$
$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$