2014.06.17. Kalkulus I./Matematika 1. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+1}$ sorozatot. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}-3n}{\sqrt{n+2}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+5}\right).$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} u\cos u\,du, \qquad \text{(iii)} \int_3^{\infty} \frac{2y+3}{y^2-y-2}\,dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenessel közelíthető az 1 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény korlátos az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux-féle felső integrál (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.06.17. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y)=\sqrt{1-xy}$ függvénynek a $(-1,2)$ pontban, a $(-3,4)$ irányban vett iránymenti deriváltját. *16pt*
2. Oldjuk meg : $(\cos x - x\sin x + y)\ dx = (\cos y - x)\ dy$. *18pt*
3. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n}{n^2+1}(3x-1)^{n+1}$ függvénysor konvergencia–tartományát. *18pt*
4. Legyen $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$. Határozzuk meg f szélsőértékeit. *18pt*
5. Határozzuk meg $\int\int_H \frac{x+y}{x+1}\ dxdy$ értékét, ahol H a $(2,0)$, $(1,2)$ és $(0,0)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$
$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$
$$\int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$