

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, ($n > 1$) rekurzív sorozatot. 10pt

2. Határozzuk meg a következő határértéket: 5pt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{3n-4} \right)^{2n-3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-\frac{1}{x}}$ függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 35pt

$$(i) \int_0^1 t^3 \ln t dt, \quad (ii) \int_0^{\pi/2} \sin z \cos z dz, \quad (iii) \int_0^1 \frac{u+1}{u^2-u-6} du.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x+a} dx &= \ln|x+a| + C, \quad (x \neq -a) \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \operatorname{arctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1), \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, & \int \frac{1}{\sin x} dx &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő. 5pt
- (ii) Az $f(x)$ függvény deriválható a -3 pontban. 5pt
- (iii) Az $f(x)$ függvény folytonos az 1 pontban. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$. 5pt
- (v) Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ -n. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érní. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

FELADATOK:

1. Oldjuk meg : $(x \ln x)y'' - y' = 0$, $y(1) = 2$, $y'(e) = 1$. 18pt
2. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 2^n} (x-1)^{n+1}$ függvénysor konvergencia tartományát. 18pt
3. Határozzuk meg az $f(x, y) = \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ határértékét a $(0, 0)$, $(\infty, -2)$ és a (∞, ∞) helyeken. 18pt
4. A megfelelő sorfejtés első 5 tagjának segítségével becsüljük meg $\arcsin 1/2$ értékét. 18pt
5. $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+3} f(x, y) dy dx$ esetén ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük föl az integrálási sorrendet. 18pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C, \quad (x \neq -a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

$$L[f](p) := \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u'_x = v'_y, \quad -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^{\infty} f(x) dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$