

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor-féle polinomját, segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{3}$ értékét. 5pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 10pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n} - 4^n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{4} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 35pt

$$(i) \int_{-1}^1 \frac{3}{y^2 - 4} dy, \quad (ii) \int_0^\pi \cos^2 z \sin z dz, \quad (iii) \int_0^\infty \frac{x}{e^{2x}} dx.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x+a} dx &= \ln|x+a| + C, \quad (x \neq -a) \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \operatorname{arctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1), \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, & \int \frac{1}{\sin x} dx &= \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. 5pt
- (ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 3 pontban. 5pt
- (iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő az I intervallumon. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$. 5pt
- (v) Az E korlátos számhalmaz infimuma. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x, y) = x\sqrt{1 + xy}$ függvénynek a $(0, 2)$ pontban, a $(-3, 4)$ irányban vett iránymenti deriváltját. 18pt
2. Oldjuk meg : $y' \sin x - y \cos x = 0$, $y(1) = 0$. 18pt
3. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_0^{1/2} \sqrt{1 + x^2} dx$ értékét. 14pt
4. Határozzuk meg $\int_{\gamma} (x + y) dx - x^2 dy$ értékét, ahol γ az origó középpontú, 2 sugarú, negatív irányítású körvonal $(2, 0) \rightarrow (0, 2)$ pontjait köti össze. 20pt
5. Határozzuk meg $\int \int_H (x - y) dx dy$ értékét, ahol H a $(0, 4)$, $(2, 0)$ és $(5, 4)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. 20pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C, \quad (x \neq -a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

$$L[f](p) := \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u'_x = v'_y, \quad -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^{\infty} f(x) dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$