2017.12.12. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Adjuk meg a $b_n = \dfrac{3n-7}{9-2n}$ sorozat infimumát, szuprémumát. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2-n-3}\right), \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{2n+1}\right)^{3-2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3\sqrt{x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_{-1}^{1}\frac{z^2}{\sqrt[4]{z^3+9}}\,dz, \qquad (b) \quad \int_{-\infty}^{0}\frac{3}{2v^2+1}\,dv, \qquad (c) \quad \int_{0}^{2}\frac{t-1}{t^2-4}\,dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1), \qquad \int\frac{1}{x}dx = \ln|x|+C,$$

$$\int\cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int\frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x = -2$ pontban. *5pt*

(iii) g–nek helyi minimuma van x_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -3^+} h(x) = -1$. *5pt*

(v) A korlátos D számhalmaz szuprémuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2017.12.19. Kalkulus I. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ függvény deriváltját az $x_0 = -1$ helyen. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \sqrt[n]{7^n - 3^n} \ , \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-5}{3n+1}\right)^{3+n} \ .$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln|x|$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_e^\infty \frac{1}{z\ln^3 z}\ dz \ , \qquad (b) \quad \int_{-1}^0 v e^{2-3v}\ dv \ , \qquad (c) \quad \int_0^2 \frac{t+1}{t^2-4t}\ dt \ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke végtelen. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 = 3$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan monoton növő $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 4$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.02. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$ függvénynek az $a = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor polinomját, és segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{2}$ értékét. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n^2+2}}{2n+5}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{5n-3}\right)^{2n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(a)} \int_{-\pi/2}^{\pi} z\cos(3z-2)\, dz, \qquad \text{(b)} \int_0^3 \frac{1-4x}{3x+2}\, dx, \qquad \text{(c)} \int_0^{\infty} e^{-u/2}\, du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A (z_n) sorozat konvergens. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x = -2$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan konvex $[-1, 2]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = 2$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.09. Kalkulus I. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2-1}$ függvény $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenletét. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{3n+1} - n^5}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27} - \sqrt[n]{9}}{1 - \sqrt[n]{9}}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty 3xe^{1-x^2}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{2q+5}{q^2-4q+4}\, dq, \qquad \text{(iii)} \int_1^e \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) f–nek helyi minimuma van $a = -2$–ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.16. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+3)^3$ függvény szélsőértékét a $[-4, 1]$ zárt intervallumon. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}-n}{\sqrt[5]{n^3-n^4+1}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{3x}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 z \ln(1+2z)\, dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\, dx, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \frac{3}{\sqrt[3]{1-u}}\, du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke -2. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenessel közelíthető a 2 pontban. *5pt*

(iii) f monoton csökkenő $[1,4]$–en. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 4} z(x) = \infty$. *5pt*

(v) Integrálfüggvény (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.23. Kalkulus I. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{3n^2-5} = \frac{1}{3}$. *8pt*
2. A tanult módon vizsgáljuk az alábbi rekurzív sorozatot: $a_1 = 3$, $6a_n = a_{n-1}^2 + 8 \ (n > 1)$. *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{0} \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\, dz, \qquad \text{(ii)} \int_{1}^{\infty} \frac{5}{x^2+6}\, dx, \qquad \text{(iii)} \int_{0}^{\pi/4} (3y-1)\sin 2y\, dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az $\{x_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*

(iii) f szigorúan konkáv az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = 3$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!

2018.01.30. Kalkulus I. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2}{(2-x)^2}$ függvény $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenletét. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} + n^4}{n - n^2 + 4n^3}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{2n-3}\right)^{2n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-1/x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{2x}{e^{5x-1}}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^2 \frac{2y-1}{y^2-2y-3}\, dy, \qquad \text{(iii)} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) 5 torlódási pontja az (a_n) sorozatnak. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $[1,3)$ intervallumon. *5pt*

(iii) f egyenletesen folytonos $[3,5]$–ön. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{t\to 2^+} \phi(t) = 4$. *5pt*

(v) $f(x)$–nek az $x = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor–polinomja. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!