2018.01.23. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n}{3n^2-5} = \dfrac{1}{3}$. *8pt*
2. A tanult módon vizsgáljuk az alábbi rekurzív sorozatot: $a_1 = 3$, $6a_n = a_{n-1}^2 + 8 \ \ (n > 1)$. *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{0} \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\, dz, \qquad \text{(ii)} \int_{1}^{\infty} \frac{5}{x^2+6}\, dx, \qquad \text{(iii)} \int_{0}^{\pi/4} (3y-1)\sin 2y\, dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az $\{x_n\}$ sorozat Cauchy–sorozat. *5pt*

(iii) f szigorúan konkáv az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 3$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!