2018.01.16. Kalkulus I. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+3)^3$ függvény szélsőértékét a $[-4, 1]$ zárt intervallumon. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}-n}{\sqrt[5]{n^3-n^4+1}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{3x}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 z\ln(1+2z)\ dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\ dx, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \frac{3}{\sqrt[3]{1-u}}\ du.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $(a_n)$ sorozat határértéke $-2$. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenessel közelíthető a 2 pontban. *5pt*

(iii) $f$ monoton csökkenő $[1, 4]$–en. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 4} z(x) = \infty$ . *5pt*

(v) Integrálfüggvény (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

**Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**