2018.01.09. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2-1}$ függvény $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenletét. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{3n+1} - n^5}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27} - \sqrt[n]{9}}{1 - \sqrt[n]{9}}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\infty} 3xe^{1-x^2}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{2q+5}{q^2-4q+4}\, dq, \qquad \text{(iii)} \int_1^e \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $(a_n)$ sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iii) $f$–nek helyi minimuma van $a = -2$–ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

**Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**