2018.01.02. Kalkulus I. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$ függvénynek az $a = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor polinomját, és segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{2}$ értékét. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n^2+2}}{2n+5}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{5n-3}\right)^{2n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(a)} \int_{-\pi/2}^{\pi} z\cos(3z-2)\ dz, \qquad \text{(b)} \int_0^3 \frac{1-4x}{3x+2}\ dx, \qquad \text{(c)} \int_0^\infty e^{-u/2}\ du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A (z_n) sorozat konvergens. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x = -2$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan konvex $[-1, 2]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = 2$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!