2017.12.19. Kalkulus I. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ függvény deriváltját az $x_0 = -1$ helyen. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \sqrt[n]{7^n - 3^n}\ , \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-5}{3n+1}\right)^{3+n} .$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln|x|$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$(a) \quad \int_e^\infty \frac{1}{z \ln^3 z}\, dz\ , \qquad (b) \quad \int_{-1}^0 v e^{2-3v}\, dv\ , \qquad (c) \quad \int_0^2 \frac{t+1}{t^2-4t}\, dt\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (a_n) sorozat határértéke végtelen. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $x_0 = 3$ pontban. *5pt*

(iii) f szigorúan monoton növő $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 4$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!